现代数学基础丛书 106

非线性演化方程的稳定性与分歧

马天　汪守宏　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-2604.0101)


ISBN 978-7-03-018113-8

9 787030 181138 >

销售分类建议：高等数学

定 价：58.00 元

内 容 简 介

本书是一部关于非线性演化方程稳定性与分歧理论及应用的专著.主要内容包括作者最近发展的关于定态分歧、动态分歧和跃迁理论,以及这些理论在物理、化学、流体动力学及地球物理流体动力学中的应用,特别是在化学中Belousov-Zhabotinsky反应、二元体相分离问题的Cahn-Hilliard方程、超导体Ginzburg-Landau方程的相变与分歧理论、Rayleigh-Benard对流问题、Couette流的Taylor问题及赤道上大气层的Walker环流等重要问题中的应用.

本书的读者对象为从事数学、物理、化学、地球物理流体动力学及其他与相变、分歧和稳定性理论相关的高年级大学生、研究生、教师及科研人员.

图书在版编目(CIP)数据

非线性演化方程的稳定性与分歧/马天,汪守宏著.北京:科学出版社,2007
(现代数学基础丛书;106/杨乐主编)
ISBN 978-7-03-018113-8

Ⅰ.非… Ⅱ.①马…②汪… Ⅲ.孤立子-线性方程 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第118858号

责任编辑:吕 虹 赵彦超/责任校对:桂伟利
责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年4月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007年4月第一次印刷 印张:28 1/2
印数:1—4 000 字数:540 000

定价:58.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换(环伟))

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨 乐

2003 年 8 月

前言

本书较系统地介绍了作者在非线性耗散系统方面最近提出的分歧与跃迁理论及其在物理、化学、流体动力学和地球物理流体动力学等领域中的应用. 同时, 对传统的稳定性与分歧以及相关的数学基础也作了较为详细的论述.

在非线性科学中, 相变是一类普遍的自然现象, 它广泛地存在于物理、化学、生物、经济、流体动力学及地球物理流体动力学的自然运动中. 所谓相变就是系统状态的跃迁与突变. 在数学中, 反映和描述这类自然现象的学科分支就是非线性演化方程动力学. 它的主要研究内容就是稳定性、分歧与混沌. 最近, 作者在非线性演化方程动力学领域的稳定性、定态分歧、动态分歧及跃迁等方面提出一套系统的理论和方法, 它们形成一个统一的整体. 应用这些理论和方法, 许多非线性科学中长期存在的分歧和相变中一些困难问题变得可以理解和处理. 特别地, 在本书中, 我们广泛讨论了许多物理、化学及流体动力学中典型偏微分方程的动态分歧与相变问题, 包括控制相分离的Cahn-Hilliard方程;描述 Belousov-Zhabetinsky 型化学反应的 Field-Noyes 方程; 控制燃烧问题的 Kuramoto-Sivashinsky 方程; 反映流体稳定性的复 Ginzburg-Landau 方程; 超导体的 Ginzburg-Landau 方程; 热对流的 Benard 问题; 同轴柱体间 Couette 流稳定性的 Taylor 问题以及赤道上大气层的 Walker 环流. 可以期待更多的非线性科学中动态分歧与相变问题能够被处理与理解.

第一章主要论述了微分方程与自然运动之间的联系. 特别突出从自然角度去理解数学、再从数学的角度去理解自然这一双向过程, 强调从自然源泉中汲取数学发展的动力这一宗旨. 第二章较为系统地介绍了必要的数学基础理论与知识. 这里, 作者采用的写作方法与传统的形式化方式有所不同, 它非常重视对数学实在意义的揭示, 重视数学的直观与严谨性之间的统一. 第三章讨论了非线性耗散系统的稳定性, 较系统地介绍了全局吸引子存在性理论及其最近的一些进展. 全局吸引子的存在性理论与书中提出的动态分歧与跃迁理论相结合, 对于理解非线性科学中相变现象, 建立相应的理论起到了十分重要的作用. 第四章首先提出了线性全连续场谱理论, 该理论在后面发展的分歧与跃迁理论中是非常基本的. 建立在谱理论基础之上, 这里介绍的 Lyapunov-Schmidt 约化过程与传统的观点有所不同. 古典的方法是对算子的临界特征子空间及其补空间的直和分解, 而这里采用广义特征向量空间与其补空间的直和分解, 利用这种分解可以对后面所讨论的定态分歧理论作统一处理. 特别地, 该方法在新建立的偶数阶非退化奇点处分歧理论起到关键作用, 该理论不考虑临界特征值的代数重数,

这是与传统理论的一个很大区别. 在第五和第六章中, 作者提出了非线性耗散系统的动态分歧和跃迁理论. 该理论的条件与结论基本上是根据物理、化学、生物及流体动力学中普遍存在的相变现象中抽象而来. 因而这些理论能够有效地广泛处理非线性科学中的相变问题. 在第七和第八章中, 应用作者建立的理论讨论了几个来自物理、化学及流体动力学的动力系统与偏微分方程的分歧与相变问题, 得到了一些具有物理意义的结果.

最后, 借此机会, 作者对导师陈文嵘教授表示深深的感谢. 先生的学术观点与远见, 以及对数学科学的献身精神对我们的数学生涯产生重大影响. 本书得到了四川大学人才引进基金的资助, 对此我们表示感谢. 另外, 作者对科学出版社吕虹老师的支持也表示真诚的感谢.

马　天　汪守宏

2006 年 6 月 6 日

目　录

第一章　从自然观点看微分方程

§1.1　自然定律与方程

物理世界给人类提供了三大研究课题：物理背景空间、相互作用与运动、物质结构．这三大课题构成了数学强有力的自然背景．另一方面，根据 Bourbaki 学派的观点，数学具有三大基本结构：拓扑结构、序结构、代数结构．这三大基本结构所代表的三类重要学科分支分别为拓扑与几何学、微分方程、群论及其表示理论．这样，物理学与数学给出下面三个基本的对应：

物理背景空间		相互作用与运动		物质结构与对称	
/	\	/	\	/	\
拓扑结构 ——	拓扑与几何学	序结构 ——	微分方程	代数结构 ——	群论及其表示

在自然中，系统的运动都要遵守一定的规则与定律．而微分方程可视为自然定律的数学表达形式．简而言之，方程即是运动规律与规则．

为了理解这种观点，下面给出三个例子．

例 1.1　扩散方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f(x,t), \quad x \in \Omega \subset R^3, \quad t \geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

这里 $k > 0$ 为扩散系数，Δ 是拉普拉斯算子，Ω 是 R^3 中一个开区域，f 是扩散源．

扩散运动是指高浓度的某种物质朝低浓度方向运动的过程，如热传导、烟雾扩散等．若未知函数 u 为浓度，则扩散方程 (1.1.1) 是下面两个自然定律的数学表示．

(1) Fick 定律：扩散的流量 $\overrightarrow{q}$ 与浓度 u 的梯度负值成正比：

$$\overrightarrow{q} = -k\nabla u, \quad k > 0. \tag{1.1.2}$$

(2) 质量守恒定律：在任一区域内质量的变化率等于单位时间内通过该区域表面的通量与扩散源 f 之和．令 x 点为一无穷小区域，则在 x 点该定律表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\text{变化率}) = -\text{div}\,\overrightarrow{q}(\text{通量}) + f, \tag{1.1.3}$$

这里表面通量取负号是约定流入的量为正，流出 x 点的量为负．显然从 (1.1.2) 和 (1.1.3) 便可得到方程 (1.1.1).

例 1.2 Navier-Stokes 方程：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v=\mu\Delta v-\nabla p+f,\quad x\in\Omega, \tag{1.1.4}$$

$$\text{div } v=0, \tag{1.1.5}$$

Navier-Stokes 方程是流体运动的控制方程，这里 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 是定义在区域 $\Omega\subset R^3$ 上的流体元的速度，$\mu>0$ 为动力黏性系数，p 为压力函数，f 为外力密度.

方程 (1.1.4) 是 Newton 第二定律的数学表达：

$$F=ma. \tag{1.1.6}$$

在 (1.1.4) 中，流体元的质量密度被单位化 $m=1$, 加速度 $a=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的每个分量为

$$\begin{aligned}a_i=\frac{dv_i}{dt}&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt}\\&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\quad (v_j=\frac{dx_j}{dt})\\&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v_i\qquad i=1,2,3.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

流体元所受力为

$$F=\mu\Delta v-\nabla p+f, \tag{1.1.8}$$

其中 $\mu\Delta v$ 为流体黏性引起的内摩擦力，$-\nabla p$ 为压力差，f 为外力密度. 这样从 (1.1.6)~ (1.1.8) 即可得到方程 (1.1.4).

一个向量场 v 在 x 点的散度 $\text{div}v(x)$ 的实在意义就是由向量场 v 确定的流穿过包含 x 点的无穷小区域表面的通量，简单地说就是进入 x 点的流量减去流出 x 点的流量. 由此可知方程 (1.1.5) 就是质量守恒定律：通过 x 点无穷小区域的流体通量等于该点区域内质量密度变化率，

$$\frac{d\rho}{dt}=-\text{div}v,\quad \rho\text{为质量密度.}$$

当考虑流体为不可压缩时，$d\rho/dt=0$, 即流入 x 点的量等于流出的量，这就是方程 (1.1.5).

例 1.3 经济周期的 Kaldor 模型：

$$\frac{dx}{dt}=k(I(x,y)-S(x,y)), \tag{1.1.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = I(x, y), \tag{1.1.10}$$

其中 x 是国民经济总收入， y 为实际资本存量， $k > 0$ 为常数， $I(x, y)$ 为净投资函数， $S(x, y)$ 为储蓄函数.

方程 (1.1.9) 是经济学家 Keynes 理论的数学表达：每年国民收入的增量 $\frac{dx}{dt}$ 与社会超额需求 $I - S$ 成正比. 方程 (1.1.10) 表明每年实际资本的增量 $\frac{dy}{dt}$ 等于净投资 I.

注 1.1

社会超额需求 = 社会总需求 − 社会总收入；

社会总需求 = 正常消费 + 净投资；

社会总收入 = 正常消费 + 储蓄.

在本书中，我们始终突出数学的自然观及其实在意义，也就是说我们强调从自然的角度去理解数学和从数学的角度去理解自然这一双向过程. 因此我们以"方程即是定律"这一观点作为本书的开端.

上述三个例子具有典型意义，特别是在稳定性与分歧问题方面. 在文献 [52] 中，具体给出了关于 Kaldor 模型的投资函数与储蓄函数，并且证明了当生产技术水平超过某一临界点时，就会产生经济周期规律. 后面我们还会更详细讨论这一问题.

§1.2 运动类型与方程分类

§1.2.1 古典的分类

在自然界中，有许多不同的运动类型. 但是我们所遇到的比较典型的运动大致有这几类：天体与机械运动、反应扩散运动、遗传与变异、化学反应与相变、流体运动、波的传播、微观粒子的波动性等. 所有这些运动都受到微分方程的控制.

在另一方面，以下是微分方程的几种典型类型：

常微分方程：

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t), \quad x \in R^n,$$
$$v = (v_1, \cdots, v_n) \text{是 } n \text{ 维向量场.}$$

抛物型方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega \subset R^n,$$

$$u = (u_1, \cdots, u_m), \quad f = (f_1, \cdots, f_m),$$

这里 $\Omega \subset R^n$ 是一个开区域.

双曲型方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega \subset R^n,$$

$$u = (u_1, \cdots, u_m), \quad f = (f_1, \cdots, f_m).$$

椭圆型方程:

$$-\Delta u = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega,$$

$$u = (u_1, \cdots, u_m), \quad f = (f_1, \cdots, f_m).$$

大致上讲, 自然界中不同类型的运动与受控方程的分类有如下关系: 天体运动与机械运动所受的控制方程是常微分方程 (Hamilton 系统).

反应扩散运动、流体动力学、化学反应与相变等所受的控制方程是抛物型的 (广义意义下) 偏微分方程.

波的传播、微观粒子的波动性所受的控制方程是双曲型的.

§1.2.2 耗散结构的方程

在自然界, 还可以从另一角度分出一大类运动, 称为具有耗散结构的运动. 这类运动的特点就是伴随着运动有大量的某种能量的损耗, 使得必须有外部能源补充才能平衡其运动. 描述这一类运动的方程通常称为具有耗散结构的方程或动力系统. 只有在这一类方程中分歧问题与混沌才具有普遍意义. 在这里, 我们将主要考虑这类方程的分歧及稳定性问题.

具有耗散结构的运动在自然界中非常普遍. 如上面提到的反应扩散运动、流体运动、化学反应与相变、生物生态平衡、带阻尼的振动等都属于这类运动. 因此不能用传统的上述分类来刻画具有耗散结构方程. 但是一般具有耗散结构的微分方程都能够被归为如下满足一定条件的抽象形式.

令 H 和 H_1 是两个 Hilbert 空间, $H_1 \subset H$ 是一个稠密与紧致的包含嵌入. 我们引入下面非线性演化方程:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

这里 $u : R^+ \to H$ 是未知函数, $R^+ = (0, \infty)$, $\lambda \in R$ 是实参数, $G : H_1 \times R \to H$ 是连续映射, 满足

$$G(u, \lambda) = o(\| u \|_{H_1}), \quad \forall \lambda \in R, \tag{1.2.2}$$

$L_\lambda : H_1 \to H$ 是线性全连续场，它满足：

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B_\lambda, \\ A : H_1 \to H\text{是线性同胚且特征值具正实部}, \\ B_\lambda : H_1 \to H\text{是一个线性紧算子}. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

下面我们给出两个具有耗散结构方程的例子. 从这两个例子也可以看到如何将一个微分方程化为 (1.2.1) 抽象形式的过程.

例 1.4 Navier-Stokes 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p + \lambda f, \quad x \in \Omega \subset R^3, \\ \text{div}u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.2.4}$$

这里 $f \in L^2(\Omega, R^3), \varphi \in H$, 下面将给出 H 的定义.

首先，我们知道对任何 $\lambda \in R$, 下面定态方程在 $H^2(\Omega, R^3)$ 中存在一个解

$$\begin{cases} \mu\Delta u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p + \lambda f = 0, \\ \text{div}u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

令 v_λ 是 (1.2.5) 的解，然后作平移变换

$$v = u - v_\lambda \ (u\text{是 (1.2.4) 的解}), \quad \phi(x) = \varphi(x) - v_\lambda,$$

则方程 (1.2.4) 等价于如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu\Delta v - (v_\lambda\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)v_\lambda - (v\cdot\nabla)v - \nabla p, \\ \text{div}v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \\ v(0,x) = \phi(x). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

我们建立如下空间

$$H = \{u \in L^2(\Omega, R^3) | \text{div}u = 0, u\cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H_1 = \{u \in H^2(\Omega, R^3) \cap H | \ \ u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

这里 n 为 $\partial\Omega$ 的单位法向量. 由 Hodge 分解定理, $L^2(\Omega, R^n)(n \geqslant 2)$ 能够被分解为如下两个子空间的直交和

$$\begin{cases} L^2(\Omega, R^n) = H \oplus G, \\ H = \{u \in L^2(\Omega, R^n) | \mathrm{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ G = \{\nabla\varphi \in L^2(\Omega, R^n) | \varphi \in H^1(\Omega)\}, \\ G \bot H. \end{cases}$$

这样, 我们可以定义一个正交投影, 称为 Leray 投影.

$$P : L^2(\Omega, R^n) \to H.$$

现在定义映射

$$L_\lambda = -A + B_\lambda : H_1 \to H, \quad G : H_1 \to H$$

如下: $\forall u \in H_1$,

$$\begin{cases} Au = -\mu P[\Delta u], \\ B_\lambda u = -P[(v_\lambda \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v_\lambda], \\ Gu = -P[(u \cdot \nabla)u], \end{cases} \tag{1.2.7}$$

这里 $P : L^2(\Omega, R^3) \to H$ 是 Leray 投影.

由 (1.2.7) 可以看到方程 (1.2.6) 化为抽象形式 (1.2.1). 条件 (1.2.2) 显然成立, 由 Sobolev 空间的紧嵌入定理, B_λ 是一个线性紧算子. 因为 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

对任何 $f \in L^2(\Omega, R^3)$ 存在唯一解 $u \in H_1$, 因而算子 $A : H_1 \to H$ 是一个线性同胚. 进一步我们可以看到, A 算子的特征方程 $Au = \lambda u$ 对应于如下形式的 Stokes 算子的特征方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = \lambda u, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

由泛函分析中对称紧算子特征值理论, 我们知道 (1.2.8) 具有可数无穷个实特征值:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots, \quad \lambda_k \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

并且第一特征值 λ_1 满足

$$\begin{cases} \lambda_1 = \min_{u\in\widetilde{H}}\mu\dfrac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2dx}{\displaystyle\int_\Omega|u|^2dx}, \\ \widetilde{H} = \{u \in H_0^1(\Omega, R^3)|\text{div}u = 0\}. \end{cases}$$

因而 $\lambda_1 > 0$, 即 A 的所有特征值都是正的. 这样我们看到 Navier-Stokes 方程 (1.2.4) 是一个具有耗散结构的微分方程.

例 1.5 具有阻尼项的波方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda u + g(x, u), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi, \quad u_t(x, 0) = \psi, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

这里 $\Omega \subset R^3$ 是一有界开区域, $\alpha > 0$ 为实数, u 是未知标量函数, $g(x, z)$ 是连续函数, 满足

$$g(x, z) = o(|z|).$$

容易看出方程 (1.2.9) 是等价于下面方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \Delta u + \lambda u - \alpha v + g(x, u), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi, \quad v(x, 0) = \psi. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

取空间

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$
$$H_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

然后定义映射

$$L_\lambda = -A + B_\lambda : H_1 \to H, \quad G : H_1 \to H$$

如下: 对任何 $(u, v) \in H_1$ $(u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), v \in H_0^1(\Omega))$,

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & \alpha I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha v \end{pmatrix},$$

$$B_\lambda(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda u \end{pmatrix},$$

$$G(u,v)=\begin{pmatrix}0\\ g(x,u)\end{pmatrix}.$$

显然 $A: H_1 \to H$ 是满映射并且是一一的. 因而 A 是线性同胚. 显然 B_λ 是紧的, G 满足 (1.2.2). 最后我们考察 A 的特征值.

首先考虑 Laplace 算子的特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{1.2.11}$$

我们知道, 特征值问题 (1.2.11) 有一个无穷的实特征值序列:

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots,$$

而且对应的特征向量序列 $\{e_k|k=1,2,\cdots\}$ 构成一个 $H_0^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$ 的公共正交基. 因而对任 $(u,v)\in H, u$ 和 v 能够表达为

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k,\quad v=\sum_{k=1}^{\infty}y_ke_k.$$

这样 A 的所有特征值由下面二阶矩阵的特征值构成:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ \lambda_k & \alpha\end{pmatrix},\quad k=1,2,\cdots.$$

因而得到 A 的所有特征值为

$$\beta_k=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\lambda_k}}{2},\quad k=1,2,\cdots,$$

即 A 的特征值都具有正的实部. 这就验证了具有阻尼项的波方程是一个耗散结构的方程. 具有阻尼的波方程一般是描述自然界中各种振动问题.

§1.3　方程解的形态

根据自然界运动的各种不同特征, 微分方程解的形态有许多不同的类型. 大致上人们普遍关心如下几种类型的解: 定态解 (也称为稳态解) 、全局解、爆破解、周期解、行波解、正解 (或非负解) 、弱解. 所有这些类型的解都有其自然背景. 下面将分别给予解释.

§1.3.1 定态解

对于演化方程 (1.2.1), 下面方程的解

$$L_\lambda u + G(u,\lambda) = 0$$

称为 (1.2.1) 的定态解，有时也称为奇点或平衡点.

非线性演化方程定态解对于理解方程的动力学行为起到非常重要的作用. 所谓方程的动力学行为是指方程 (1.2.1) 的解 $u(t,\varphi)$ 随时间趋于无穷大 $(t\to\infty)$ 时的行为.

经常地，人们用方程 (1.2.1) 的流来理解其动力学行为. 所谓方程 (1.2.1) 在某个区域 $D\subset H$ 的流是指下面的集合

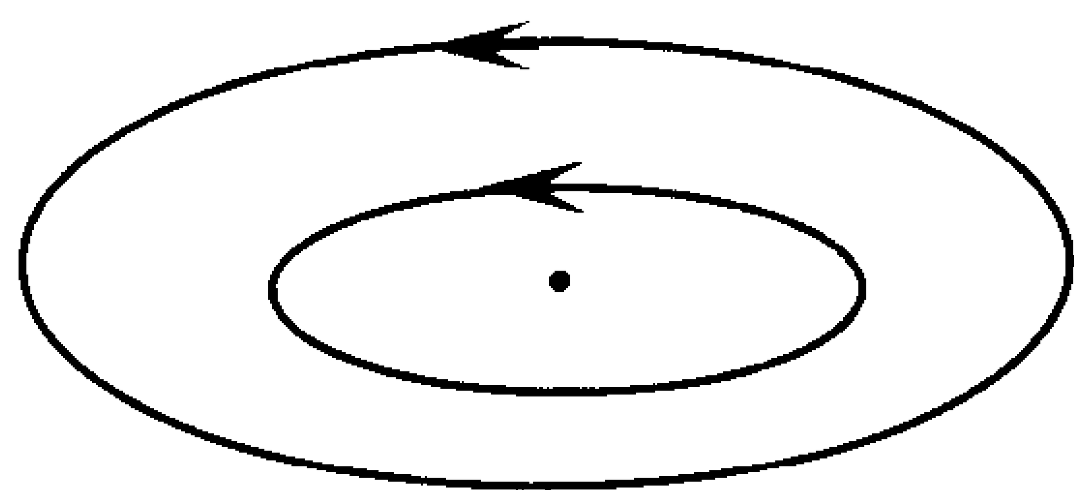
$$\Phi(t) = \{u(t,\varphi) \mid \varphi\in D,\quad u(t,\varphi)\text{是 (1.2.1) 的解}\}.$$

每一个解 $u(t,\varphi)$ 是流 $\Phi(t)$ 的一条以 φ 为起点的轨道. 方程 (1.2.1) 的定态解在很大程度上影响了它的流 $\Phi(t)$ 的拓扑结构.

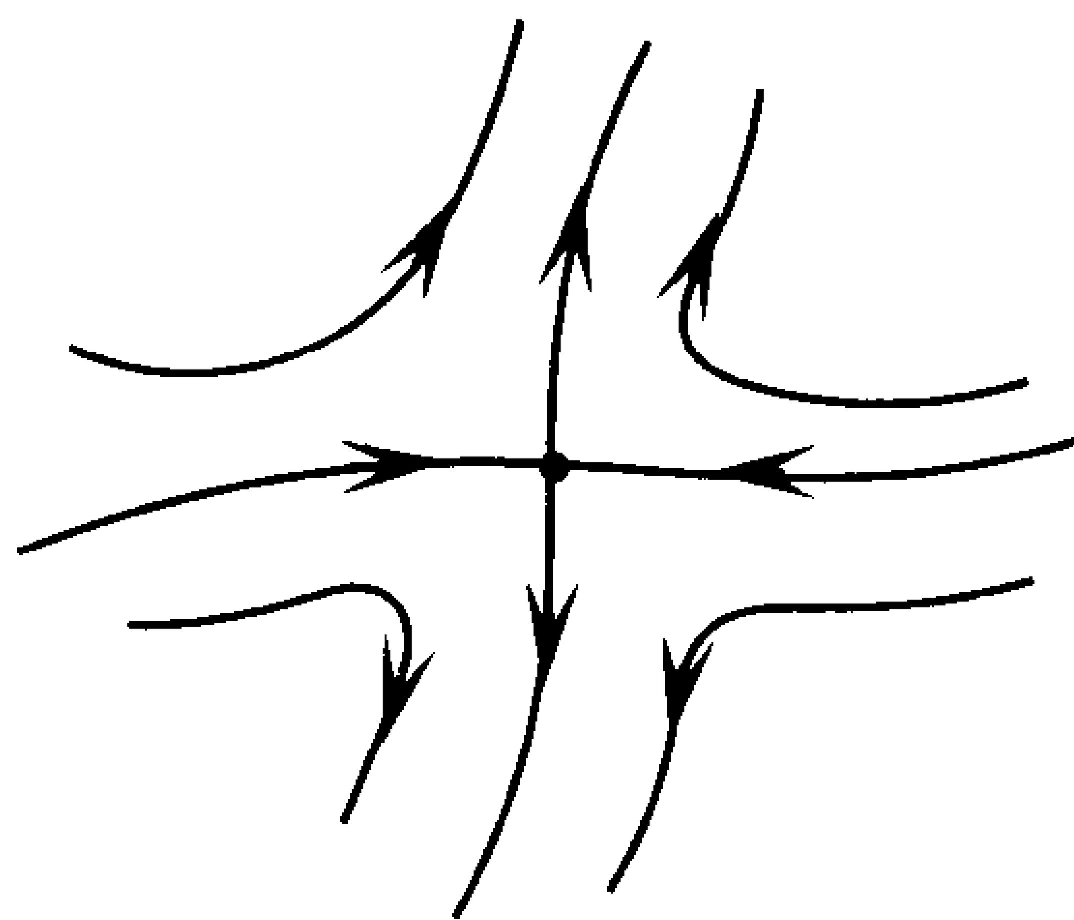
例如，当 $v(x)$ 是某个二维流体的速度场时，描述该流体流的方程为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

那么 (1.3.1) 的奇点 (定态解) 就是该流体流的一个漩涡中心或鞍点. 如图 1.1 所示.



(a) 一个漩涡中心



(b) 一个鞍点

图 1.1

§1.3.2 全局解

从自然的观察中我们知道，一个无生命的运动无论时间延续多久都在继续发生. 从数学的角度看，这一现象意味着描述该运动的方程在任何一个时间范围内解都存在. 这就是方程全局解的概念.

更严格地，方程 (1.2.1) 存在一个全局解，或整体解，是指存在一个连续映射

$$u : [0,\infty) \to H_1,$$
$$\frac{du}{dt} : [0,\infty) \to H,$$

使得 $u(t)$ 满足 (1.2.1).

一个描述自然运动的方程一定具有一个全局解. 因此一个模型是否合理，其整体解的存在性是一个重要判据. 当然这是指一般情况. 对于那些有奇性的自然现象，这个原理就不再适用，例如对于宇宙中的黑洞现象，人们能够期望 Einstein 场方程的解具有奇点，这就是下面要说的爆破解的现象，但在自然界中这种奇性现象较少发生.

§1.3.3 爆破解

爆破解与全局解的概念正好相反. 如果一个方程具有爆破解，那么它一定没有整体解. 爆破解所描述的自然现象比较少，但还是存在，如宇宙中的黑洞现象. 爆破解更重要的是它的数学价值，通过它我们能知道存在整体解的方程类范围和特征.

从数学的定义，爆破解是指某个方程的解 $u(x,t)(x\in\Omega)$ 在某时刻 $t_0>0$ 和某一点 $x_0\in\Omega$ 其值取无穷大，也就是说

$$\lim_{t\to t_0} u(x_0,t)=\infty.$$

这一点 $x_0\in\Omega$ 称为爆破点或奇点.

一般出现爆破解的方程都缺乏某种正定性. 例如，下面抛物方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+|u|^p u, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ u(x,0)=\varphi,\end{cases}$$

当 p 大于某个值 $p_0>0$ 时，存在 φ 使得该方程有一个爆破解. 因为这一项 $|u|^p u$ 在方程中起到补充能量的作用.

§1.3.4 周期解

周期运动是自然界中一种普遍现象. 如天体运动、波的振动、气候四季变化、经济周期规律等. 因此周期解的存在性是许多演化方程的公共问题.

考虑下面发展方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u,t), \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

这里 F 是微分算子或向量场, 关于 t 是周期的.

周期解问题就是找初始条件 φ, 使得 (1.3.2) 的解 $u(x,t)$ 关于 t 是周期的, 或等价地求下面问题的存在性

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u,t), \\ u(t+T_0) = u(t), \quad \text{对某个 } T_0 > 0. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

在求周期解的问题上, 形式 (1.3.2) 和 (1.3.3) 在方法和观念上都是不一样的. 对于 (1.3.2), 周期解是作为一个特殊的不变集来考虑, 并且要涉及到周期解的稳定性问题, 是属于动力系统范畴. 而 (1.3.3) 则是将问题转化为方程的一种关于时间 t 是周期的特殊边值问题来处理. 一些分歧理论如 Hopf 分歧对问题 (1.3.2) 就有效, 但是对 (1.3.3) 则无效.

§1.3.5 行波解

行波解问题在数学中广泛引起兴趣是由孤立子问题兴起的. 1834 年, 英国科学家 Russell 在河流中发现孤立波现象, 如图 1.2 所示.

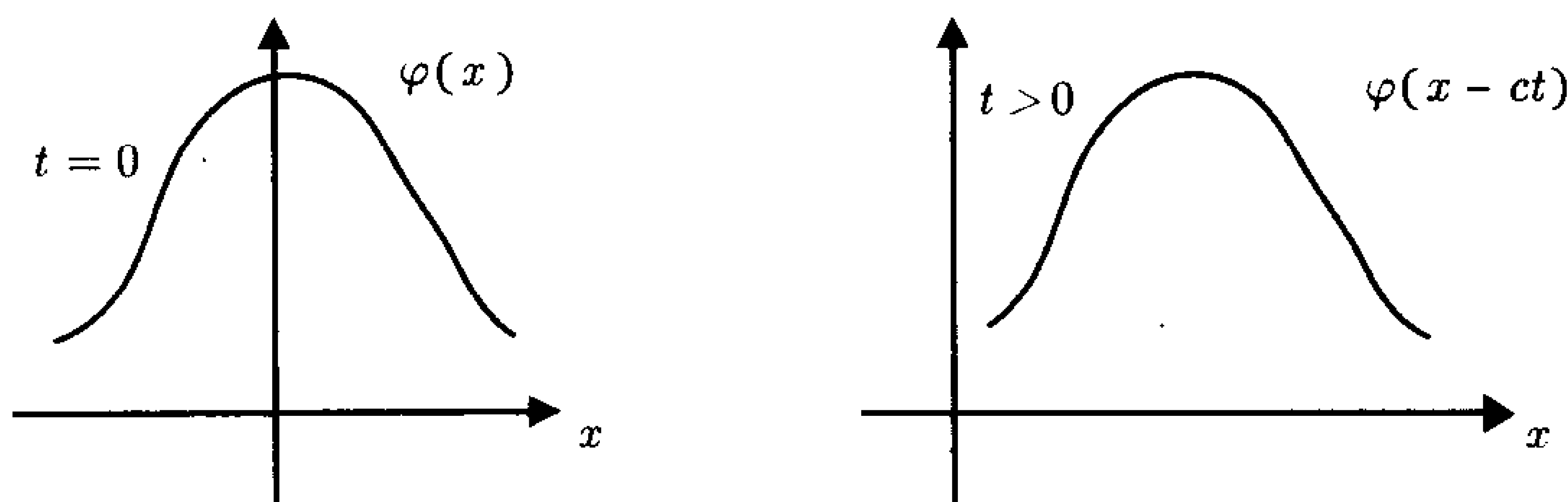


图 1.2

1895 年, Korteweg 和 de Vries 由浅水波导出的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + r\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

中发现孤立子解

$$\begin{cases} u(x,t) = \alpha \mathrm{sech}^2 \sqrt{\dfrac{\alpha}{12r}}(x-ct), \\ \mathrm{sech} z = \dfrac{2}{e^z + e^{-z}}. \end{cases}$$

这是一个形状如单驼峰的行波解，如图 1.2 所示.

行波现象是波的传播行为，也是自然界中较为普遍的现象，如海岸边的冲击波行为就是行波现象，如图 1.3 所示.

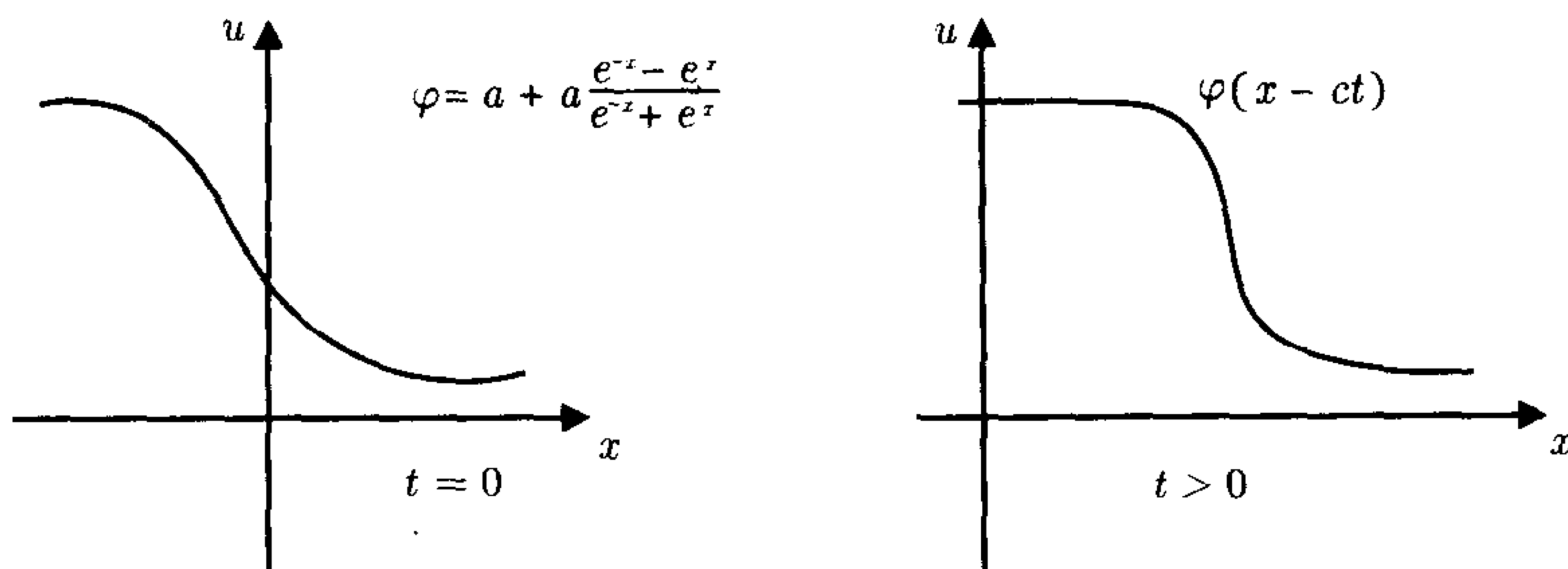


图 1.3

波的传播方式非常丰富，一个演化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,t)$$

的行波解一般是如下形式

$$u(x,t) = \varphi(\phi(x,t)),$$

这里 φ 为波形函数，$\phi(x,t)$ 为相函数.

§1.3.6　正解

有许多描述物理与化学现象的量是没有负值的，如气体和液体浓度、质量密度等. 在生态平衡及经济动力学模型中，许多量也是取非负值的. 因此，关于这一类量的方程，其解都是非负的. 这就是微分方程中的正解问题. 在偏微分方程中，正解问题只在椭圆方程和抛物方程理论中发生，它是与极值原理紧密相关联的.

例如，在椭圆方程中，正解问题为下面方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u > 0, \ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

解的存在性及个数问题. 这里 $f(x,z) \geqslant 0$, $\forall x \in \Omega$, $z > 0$.

§1.3.7 弱解

弱解概念的出现极大地推动了偏微分方程现代理论的发展，使得泛函分析方法、 Sobolev 空间理论、正则性理论成为现代偏微分方程理论的主要支柱.

弱解最早是由 Sobolev, Schwartz 和 Fridrichs 等人在 20 世纪 40 年代提出. 虽然这一概念是从数学自身发展的需要而产生，但是它的自然意义是很强的.

我们从一个简单的例子开始来说明这一点. 考虑一个简谐振子的运动：一根长度为 1 的弹簧，其固定的一端坐标为 $x=0$, 另一端系一个质量为 m 的小球，如图 1.4 所示.

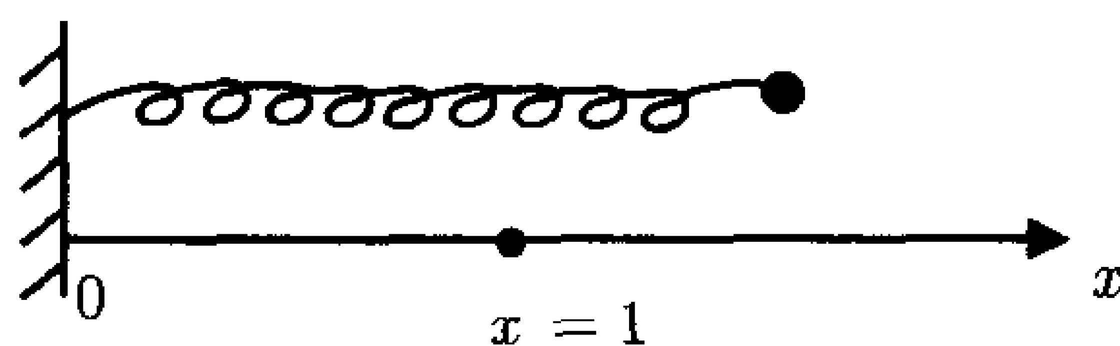


图 1.4

由 Newton 第二定律和 Hooke 定律，小球的位移函数 $x(t)$ 满足如下方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k(x-1)=0. \tag{1.3.4}$$

令谐振子满足周期条件

$$x(t+T)=x(t). \tag{1.3.5}$$

方程 (1.3.4) 就是 Newton-Hooke 定律形式，该定律要求解 $x(t)$ 必须满足二次可微条件，这就是古典解的定义.

再用 Hamilton 最小作用原理来描述谐振子的运动. 容易看到谐振子的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,$$

势能为

$$V=\frac{1}{2}k(x-1)^2.$$

Lagrange 动力学中的 Hamilton 最小作用原理说：谐振子位移函数满足一次连续可微和条件 (1.3.5) ，并且是下面泛函的极值解

$$F(x(t))=\int_0^T L(x,\dot{x})dt, \tag{1.3.6}$$

这里 $L(x,\dot{x})$ 是 Lagrange 密度函数，其形式为

$$L(x,\dot{x})=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(x-1)^2. \tag{1.3.7}$$

$x(t)$ 是泛函 (1.3.6) 的极值解的数学定义为： $x(t)$ 满足下面积分等式

$$\int_0^T \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot y\right] dt = 0, \tag{1.3.8}$$

这里 $y(t)$ 是满足 $y(t+T) = y(t)$ 的任意连续可微函数. 从 (1.3.7) 和 (1.3.8) 推得， $x(t)$ 满足

$$\int_0^T \left[m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} - k(x-1)y\right] dt = 0. \tag{1.3.9}$$

方程 (1.3.9) 称为描述简谐振子运动的 Hamilton 定律形式. (1.3.9) 也是问题 (1.3.4) 和 (1.3.5) 的弱解定义. Hamilton 定律形式的解只要求一次可微就够了.

上述讨论得出这样一个结论：问题 (1.3.4) 和 (1.3.5) 的古典解就是 Newton-Hooke 定律形式的解，而弱解是 Hamilton 定律形式的解. 古典解和弱解在描述自然运动方面的差异仅仅是不同自然定律的选择.

再用双曲守恒律的一个例子继续说明上面的观点. 考虑拟线性波方程

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in R \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1.3.10}$$

这里 $a(u)$ 为 u 的函数.

由隐函数的微分法可验证，问题 (1.3.10) 的解 $u(x,t)$ 可由如下隐函数形式解出 (局解解)

$$u = \phi(x - a(u)t). \tag{1.3.11}$$

给定初始值

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{1.3.12}$$

由 (1.3.11) 知，问题 (1.3.10) 此时根本无古典解.

然而根据双曲守恒定律的理论， (1.3.10) 所描述的物理现象解是存在的. 它反映的是矩形波的行波现象，这种解具有间断性质.

由定律 (1.3.10) 描述的波的传播改用双曲守恒律描述时，满足如下方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = E(u(x_1,t)) - E(u(x_2,t)), \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{1.3.13}$$

这里

$$E(u) = \int a(u)du, \quad x_1, x_2 \in (-\infty,\infty)\text{为任意.}$$

方程 (1.3.13) 称为双曲守恒律形式，它说明 $u(x,t)$ 在区间 (x_1,x_2) 内总量的变化率等于通过边界的流量 E. 这具有守恒意义：

$$\text{流入的量} - \text{流出的量} = \text{区域内总量变化率}.$$

可以验证，如果方程 (1.3.13) 的解是一次连续可微的，那么该解也是方程 (1.3.10) 的．事实上从下面过程就能看到这一点：

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} u_t dx &= -\int_{x_1}^{x_2} a(u)u_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} a(u)du\\ &= -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{du}\int a(u)du\\ &= E(u(x_1,t)) - E(u(x_2,t)).\end{aligned}$$

因此方程 (1.3.13) 的解可视为 (1.3.10) 的弱解.

方程 (1.3.10) 和 (1.3.13) 是两个不同自然定律对同一物理运动的数学描述. 对于初始条件 (1.3.12), 用定律 (1.3.10) 的形式描述，就失去效用，而对双曲守恒律形式 (1.3.10) 却有如下解

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < ct,\\ 0, & x > ct,\end{cases} \tag{1.3.14}$$

这里 $C = E(1)$, 它是矩形波的行波解，如图 1.5.

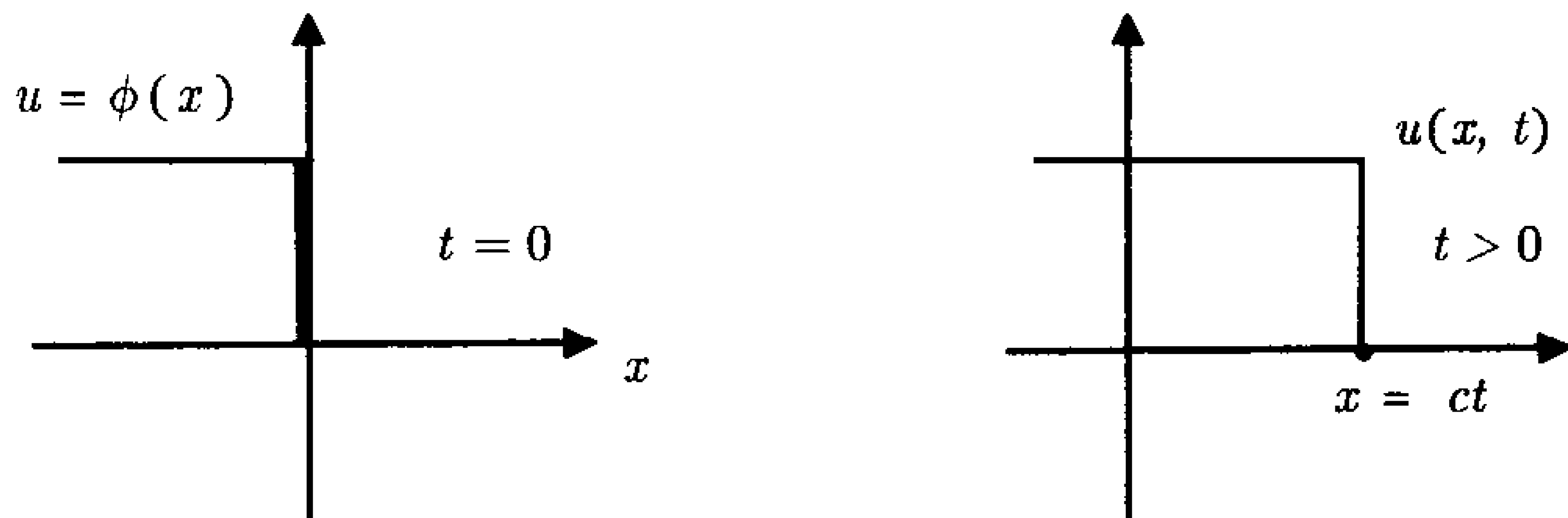


图 1.5

事实上，对任意 $x_1, x_2 \in R$, (1.3.14) 的积分为

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \begin{cases} x_2 - x_1, & x_1 < x_2 \leq ct,\\ ct - x_1, & x_1 < ct < x_2,\\ 0, & ct < x_1 < x_2,\end{cases}$$

可以推出

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)dx = \begin{cases} c, & x_1 < ct < x_2,\\ 0, & ct \bar{\in} (x_1,x_2)\end{cases}$$

$$= E(u(x_1,t)) - E(u(x_2,t)),$$

这里

$$E(u(x_1,t)) = \begin{cases} E(1), & x_1 < ct, \\ 0, & x_1 > ct, \end{cases}$$

$$E(u(x_2,t)) = \begin{cases} E(1), & x_2 < ct, \\ 0, & x_2 > ct. \end{cases}$$

这就验证了 (1.3.14) 是 (1.3.13) 的解.

对于双曲守恒律方程初值问题 (1.3.13), 一般来讲解并不是唯一的, 这需要加上某些具有物理意义的限制条件, 使得问题具有唯一物理解. 在数学上, 这方面的工作是由 P. D. Lax, O. A. Oleinik, E. Hopf 等人完成的.

§1.4 稳定性问题

稳定性是自然运动的主要特征, 没有稳定性, 任何系统都将没有秩序. 稳定性的种类很多, 但目前为止能用数学进行广泛研究的只有几类: 关于方程外参变量的稳定性、 Lyapunov 稳定性 (包括吸引子) 、 Kolmogorov 稳定性、结构稳定性. 这里我们只介绍 Lyapunov 稳定性、 Kolmogorov 稳定性和结构稳定性.

§1.4.1 Lyapunov 稳定性

考察一个经验例子. 一个盛有水的水桶内一个叶片以某小常速度在水中进行旋转. 将水桶置在火上进行加热, 当水开始翻滚时再撤去火源. 可以观察到, 经过一段时间后水桶里的水将不再翻滚, 而是变为以常速度在桶中随叶片而稳定地旋转, 如图 1.6 所示.

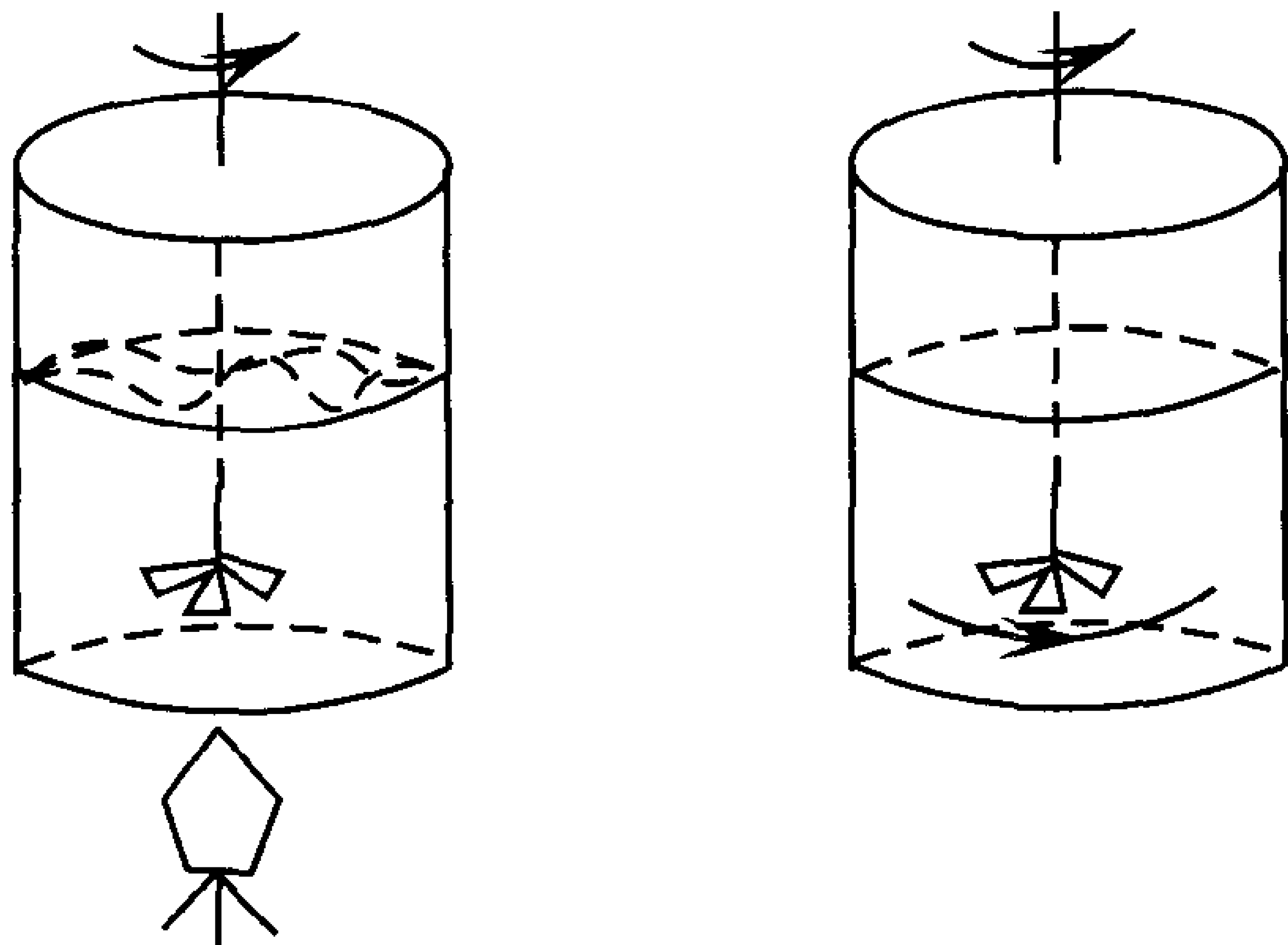


图 1.6

这一自然现象在数学中就是渐近 Lyapunov 稳定性. 桶 Ω 内的水流速度场 $u(x,t)$ 满足如下初 – 边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=\mu\Delta u-\nabla p+f(x), \quad x\in\Omega, \\ \mathrm{div}u=0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

$$u\cdot n|_{\partial\Omega}=0, \quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0, \tag{1.4.2}$$

初始条件为

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in\Omega, \tag{1.4.3}$$

这里 f 为旋转叶片产生的外力, $\varphi(x)$ 为撤去火源那一刻水的翻滚速度状态, n,τ 分别为边界 $\partial\Omega$ 上的单位法向量与切向量.

令 $u(x,t)$ 为问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的解, 它就是描述桶中流体运动过程的速度场. 则这一自然现象的数学表达就是

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=u_0(x),$$

这里 $u_0(x)$ 就是描述经过一段时间后桶中稳定旋转流体的速度场, 它是问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的定态解, 满足下面方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f(x), \quad x\in\Omega, \\ \mathrm{div}u=0, \\ u_n|_{\partial\Omega}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u_\tau}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

我们再继续观察. 让叶片的旋转速度加大, 经验告诉我们, 当旋转速度高达某种程度后, 撤去火源的水就不再渐渐地成为稳定的旋转流体, 而是变为既旋转又翻滚的流体. 但是不管初始速度 φ 有多大, 桶内流体速度会降下来保持与叶片相应的速度范围内, 绝不会发生水的流速越来越大的情况.

这种现象从数学上描述, 就是存在一个集合

$$\Sigma\subset H=\{u\in L^2(\Omega,R^3)|\ \mathrm{div}u=0;\ \ u_n=0,\ \frac{\partial u_\tau}{\partial n}=0 \text{ 在 } \partial\Omega\},$$

使得对任何 $\varphi\in H$, 问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的解 $u(x,t,\varphi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{dist}(u(x,t,\varphi),\Sigma)=0, \text{在 } H \text{ 范数下}.$$

上述第一种情况称为渐近 Lyapunov 稳定性, 表明解收敛到一个定常状态. 第二种情况是广义 Lyapunov 稳定性, 表明解收到一个有界集上. 当集合 Σ 是紧致时, Σ 称为问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的全局吸引子.

§1.4.2　Kolmogorov 稳定性

Kolmogorov 稳定性直接来源于关于太阳系稳定性问题的考虑，即太阳系的行星经过充分长时间后是否会飞出太阳系，或撞到太阳及其他行星上. 下面就以太阳系的稳定性来说明 Kolmogorov 稳定性的意义.

首先介绍描述 n 个天体运动的 Hamilton 方程. 若每个天体有 $2k$ 个自由度 $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, 其中 k 个位置坐标， k 个动量 (速度) 坐标，则 n 个天体就有 $2nk$ 个自由度. 该 n 个天体的总能量是这 $2nk$ 个自由度的函数，称为 Hamilton 函数

$$H = H(x_1, \cdots, x_{nk}, y_1, \cdots, y_{nk}),$$

这里 $(x_1, \cdots, x_{nk})$ 和 $(y_1, \cdots, y_{nk})$ 分别为 n 个星体的位置坐标与动量坐标. 此时 n 个天体的运动满足方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \cdots, nk.$$

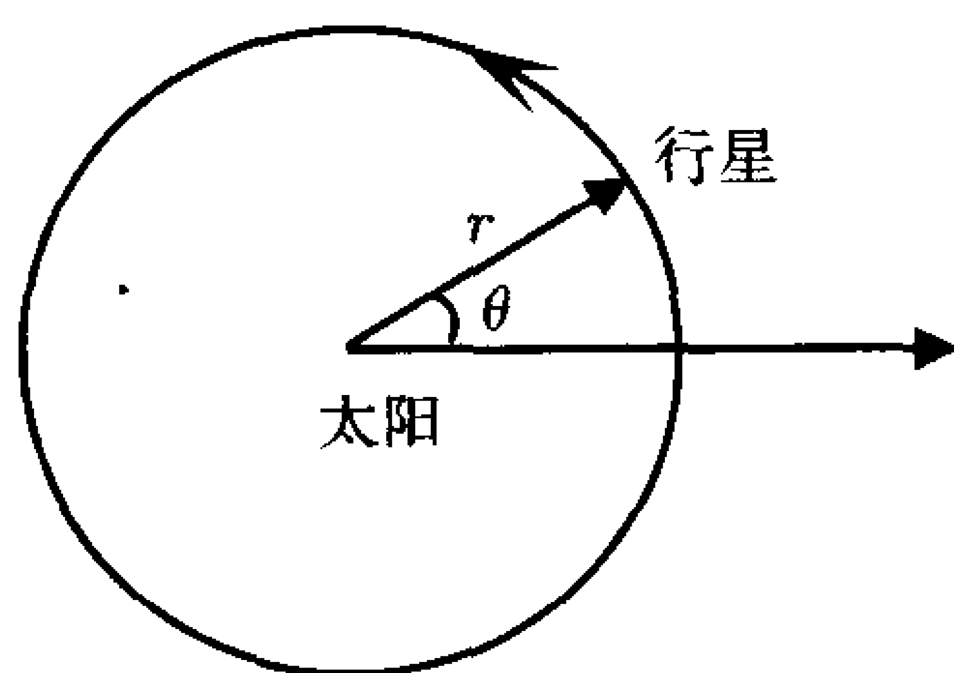


图 1.7

令太阳系有 n 个行星. 因为每个行星的质量相对于太阳系非常小，所以先不考虑行星之间的相互作用，而只考虑每个行星与太阳之间的作用，并且假设太阳在中心不动. 此时每个行星绕太阳作圆周运动，只有两个自由度，角度 θ 和角动量 $J = \frac{d\theta}{dt} mr^2$, 如图 1.7. 此时太阳系总能量为

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} H_i(\theta_i, J_i),$$

这里 H_i 为第 i 个行星与太阳作用的能量，

$$H_i(\theta_i, J_i) = \frac{1}{2} J_i^2 / r_i^2 m_i - \frac{kMm_i}{r_i},$$

其中 m_i 为行星质量， r_i 为行星到太阳距离， k 为引力常数， M 为太阳质量. 从下面 Hamilton 方程

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial J_i} = m_i^{-1} r_i^{-2} J_i = \omega_i, \\ \frac{dJ_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \theta_i} = 0, \end{aligned}$$

可得到解

$$\begin{cases} J_i(t) = J_i(0) = \text{const}, \\ \theta_i(t) = \omega_i(t) + \theta_i(0), \quad \omega_i = m_i^{-1} r_i^{-2} J_i(0). \end{cases} \tag{1.4.5}$$

如果将 n 个行星视为一个在 $2n$ 维空间 R^{2n} 中运动的一个质点 a, 其中 a 在 R^{2n} 中的坐标 $a=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ 分别与这 n 个星体坐标对应： $x_i=\theta_i, y_i=J_i$, 则 (1.4.5) 告诉我们，不考虑行星之间相互作用时，在 R^{2n} 中代表行星的质点 a 运动是一个在 n 维轮胎面上环绕的轨道线，如图 1.8.

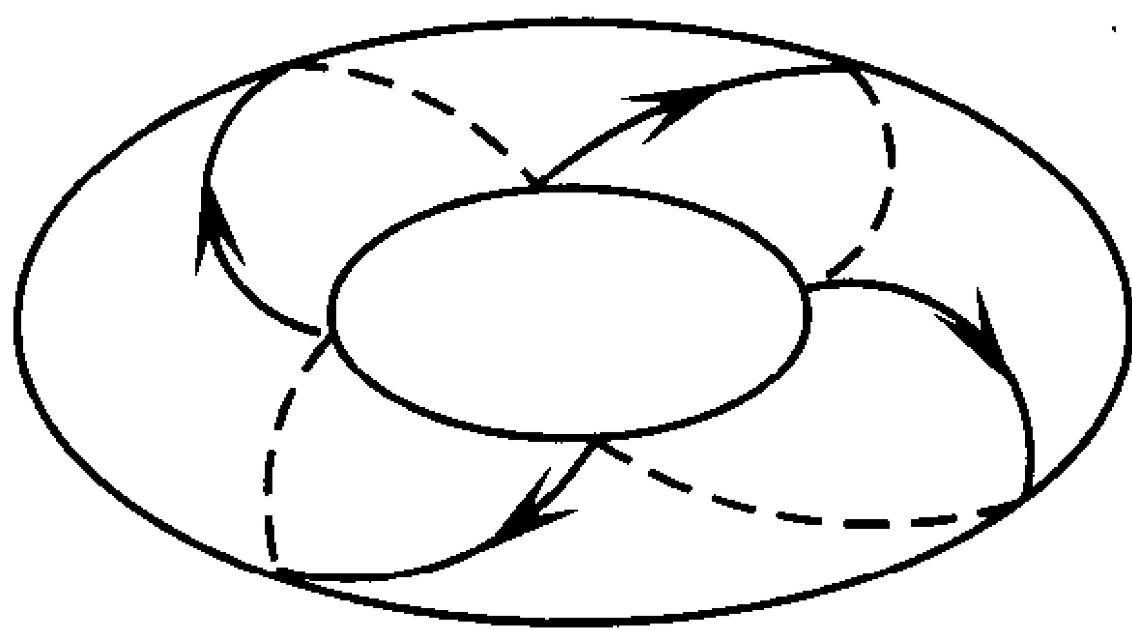


图 1.8

也就是说，对任何初值 $a(0)\in R^{2n}, a(0)\neq 0$, 质点 a 都是在一个 n 维轮胎面 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ 上进行环绕. 不同的轮胎面代表点 a 具有不同的能量.

现在再考虑各行星之间的相互作用时, 这种作用相对于太阳的作用很小，因此可视为一个小扰动，其 Hamilton 函数为

$$H=H_0(\theta,J)+\varepsilon H_1(\theta,J), \tag{1.4.6}$$

其中 Hamilton 函数 $H_1(\theta,J)$ 关于 θ 是周期的.

所谓的 Kolmogorov 稳定性就是说，在小摄动 (1.4.6) 的作用下，由 $H_0(\theta,J)$ 所确定的 R^{2n} 中轨道轮胎面 (1.4.5) 大多数都不会消失，它们只是发生一些小的形变. 换句话说，太阳系各行星仍然会绕着太阳各自作周期运动，只是轨道形状会有些改变.

Kolmogorov 稳定性是由 KAM 理论所支持的. 下面对 KAM 理论进行简单的介绍.

定义 1.1 令 M 是一个 $2n$ 维辛流形，一个 M 上的 Hamilton 系统 H 称为是完全可积的，如果存在 n 个函数 $F_1=H,F_2,\cdots,F_n\in C^\infty(M)$, 使得

(1) $dF_1\wedge\cdots\wedge dF_n\neq 0$, 并且

(2) Poisson 括号 $[F_1,F_i]=0,\ \forall 1\leqslant i\leqslant n$.

这里两个函数 F,G 的 Poisson 括号定义为

$$[F,G]=\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial y_i}-\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial y_i}.$$

条件 (1) 表示由 $F_i(x)=$ 常数 $(i=1,\cdots,n)$ 所确定的等值面 Σ_i 上法向量线性无关，条件 (2) 意味着每个等值面 Σ_i 是关于 Hamilton 流不变的.

下面三个定理构成 KAM 理论的一个完整概貌.

定理 1.1　一个 Hamilton 系统 H 在 M 上是完全可积的充要条件是对每一点 $x \in M$, 存在局部坐标 (θ, J), 使得在 (θ, J) 坐标下

$$H = H(J_1, \cdots, J_n).$$

定理 1.2(Liouville-Arnold 不变轮胎定理)　令 $H \in C^\infty(M)$ 是完全可积的 Hamilton 系统，记

$$M_z = \{x \in M |\ F_i(x) = z_i,\ \ \nabla F_i(x)\text{线性独立},\ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

则下面结论成立

(1) M_z 是 H 的 Hamilton 流 Φ_H 的不变流形，而且每一个 M_z 的连通分支是微分同胚于 $T^{n-k} \times R^k$, 特别地，若 M_z 是紧的，则 M_z 同胚于 n 维轮胎 T^n.

(2) Φ_H 是拓扑共轭于一个像 (1.4.5) 的线性流，即 Φ_H 可表示为

$$\theta_i = \omega_i t + \text{const.}, \quad J_i = \text{const.}.$$

定理 1.3(KAM 定理)　设 H_0 为 M 上完全可积的 Hamilton 系统，其不变流形为 n 维轮胎 T^n, 则对如下的 Hamilton 函数

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta), \tag{1.4.7}$$

若 $H_1(J,\theta)$ 关于 θ 是周期的，且 H_0 是非退化的：

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j}\right) \neq 0, \quad \text{在}M\text{上},$$

则当 $\varepsilon \to 0$ 时， Hamilton(1.4.7) 在 M 中的不变轮胎集合的测度趋于 H_0 在 M 中不变轮胎集合的测度. 被保留下来的不变轮胎都是非共振的，即 H_0 的线性流 $\theta_i = \omega_i t$ 的频率比 ω_i/ω_j 为无理数.

事实上，关于太阳系 H_0 是退化的，因为摄动 Hamilton 函数应该是 $H_1 = H_1(J, \dot{r}, \theta, r)$, 这里 r 为行星到太阳距离. 但是 $\partial^2 H_0/\partial \dot{r}_i \partial \dot{r}_j = 0$.

§1.4.3　结构稳定性

在自然界中比较典型的结构稳定性例子就是海洋中偶极子流及双环流 (double gyre) 现象.

所谓海洋的偶极子流及双环流现象是指在一些海湾域中发现有如图 1.9 所示的环流结构. 偶极子的海流结构如图 1.10 所示. 偶极子流及双环流现象一般是在一个较大尺度范围内发生，而偶极子流可以是在较小尺度的海流中出现.

从海洋学的观察中我们知道，这些流的结构是稳定的. 也就是说，在任何小的外在影响下，如风力和船只行驶等，其流的拓扑结构不发生变化而只是形状有些变化. 从这些自然现象转化为数学问题就是向量场的结构稳定性.

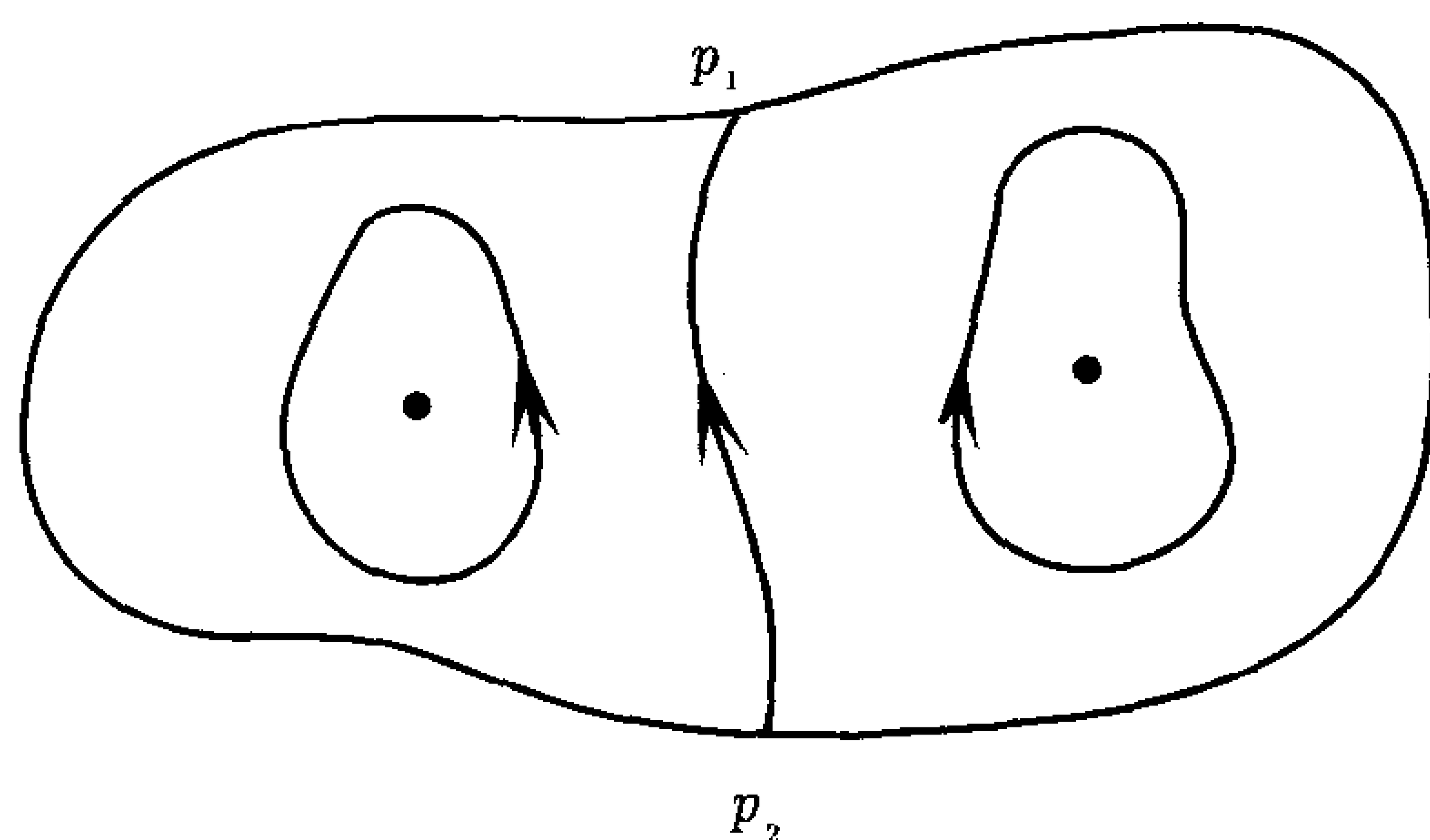


图 1.9 偶极子流及双环流现象，P_1, P_2 是两个海岸边界鞍点

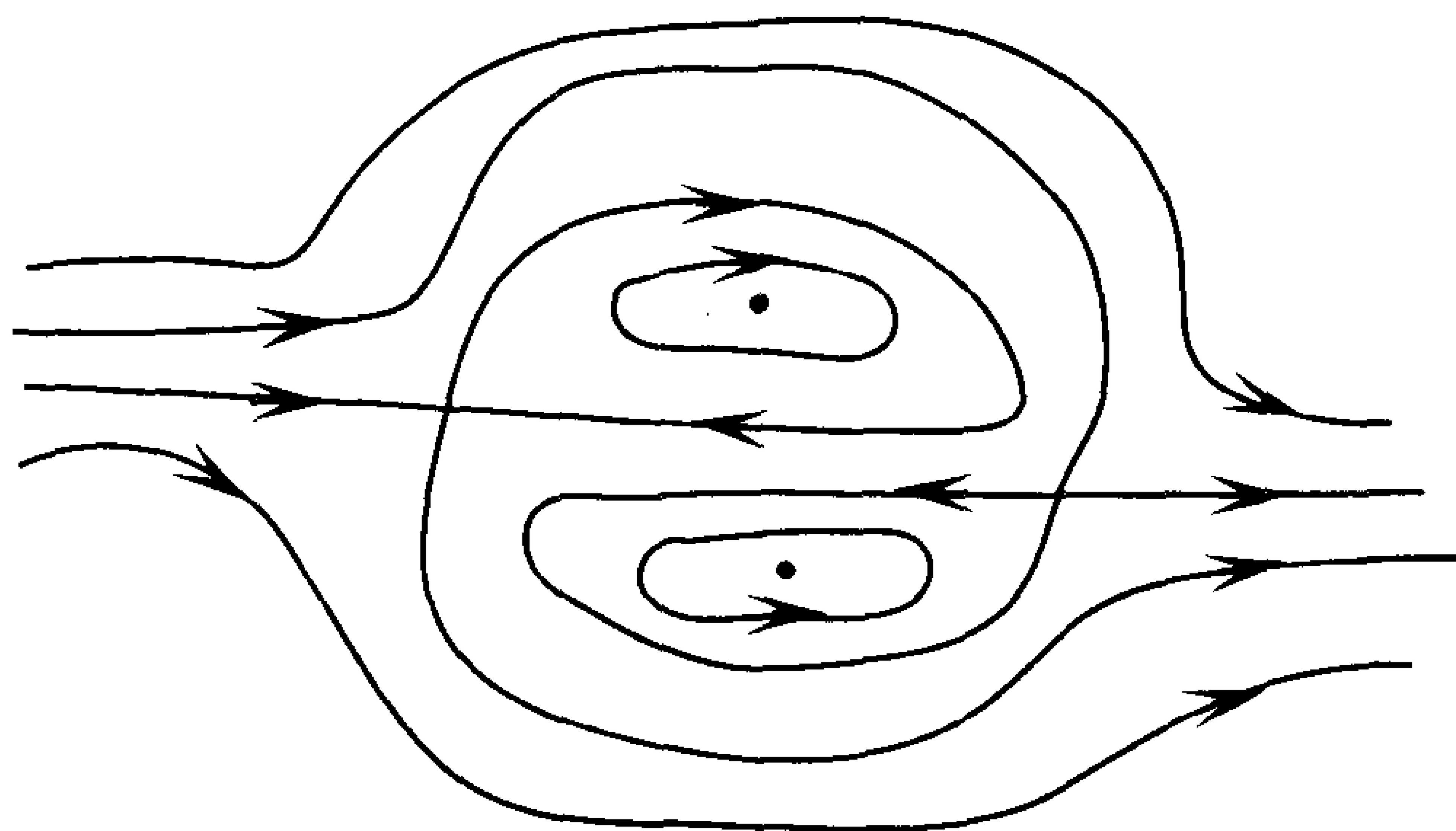


图 1.10 一个偶极子流的结构

在 §1.3.1 中，我们介绍了向量场流的概念，即向量场全体轨道构成的集合. 因而向量场与流之间有一个对应关系. 通常说向量场的拓扑结构就是指其对应流的拓扑结构. 这样所谓的向量场结构稳定性是指向量场 u 在任一个小摄动 $v = u + \varepsilon u_0$ 下， u 和 v 的流都有相同的拓扑结构.

为了更好地理解结构稳定性问题，下面从数学上给出向量场结构稳定性的严格定义.

令 M 是一个 n 维光滑流形， $C^r(TM)$ 是定义在 M 上所有 r 次连续可微的向量场并配以 C^r 范数 $(r \geqslant 1)$.

定义 1.2 两个向量场 $u, v \in C^r(TM)$ 称为是拓扑等价的，如果存在一个同胚 $\varphi : M \to M$, 使得 φ 映 u 的轨道到 v 的轨道并且保定向.

定义 1.3 一个向量场 $u \in C^r(TM)$ 被称为是结构稳定的，如果存在一个 u 的邻域 $O \subset C^r(TM)$, 使得对任何 $v \in O, u$ 和 v 是拓扑等价的.

关于一般向量场的结构稳定性定理最完备的就是二维流形上的 Peixoto 定理. 在高维流形上 Palis 和 Smale 只给出结构稳定性的充分条件，更主要的是稳定向量场的集合在 $C^r(TM)$ 空间中不稠密. 下面介绍 Peixoto 定理.

定理 1.4[82] 一个向量场 $u \in C^1(TM)$ 是结构稳定的充分必要条件是 $(\dim M = 2)$:

(1) u 仅仅有有限个奇点和闭轨道并且是双曲的;

(2) 没有连接鞍点的轨道;

(3) 非游荡集仅仅由奇点和闭轨道构成.

进一步, 所有结构稳定向量场的集合在 $C^1(TM)$ 中是一个开稠集.

所谓游荡集 $\Omega \subset M$ 是指对任一点 $x_0 \in \Omega$, 存在一个邻域 $N \subset M(x_0 \in N)$, 使得 u 过 x_0 点的轨道 $x(t, x_0) \notin N$, $\forall t > T$ 对 T 充分大.

应用 Peixoto 定理不能够描述海洋偶极子流及双环流环流及偶极子流的结构稳定性. 因为海洋流的漩涡中心是非双曲奇点且周围闭轨道是无穷多.

因为流体的速度场是不可压缩的, 因此考虑流体流的结构稳定性必须是在不可压缩场的摄动下. 在文献 [62] 中, 具有各种边界条件的二维不可压缩向量场及 Hamilton 场的结构稳定性定理都被证明. 在本书第八章将对 Dirichlet 边界和自由边界条件下的结构稳定性定理给予介绍.

§1.5 分 歧 现 象

分歧是自然运动中的普遍现象, 它所描述的是一个稳定的定态运动状态当某种参数超过一个临界值时就会跃迁到另一种运动状态. 在下面给出的几个例子中, 我们能够从自然现象来理解分歧的概念.

§1.5.1 对称磁场中的摆

考虑一个在对称磁场中的平面单摆运动. 令单摆的杆长 $l = 1$, 杆的一端系了一个质量 $m = 1$ 的小铁球. 小铁球以杆的另一端为中心在半径为 1 的圆周上运动, 有摩擦阻力. 另外在单摆两侧对称地有两个具有相同磁场的磁板. 这两块磁板到摆的垂直线距离 r 是相等的, 而且 r 远大于 1, 即 $r \gg 1$, 如图 1.11 所示.

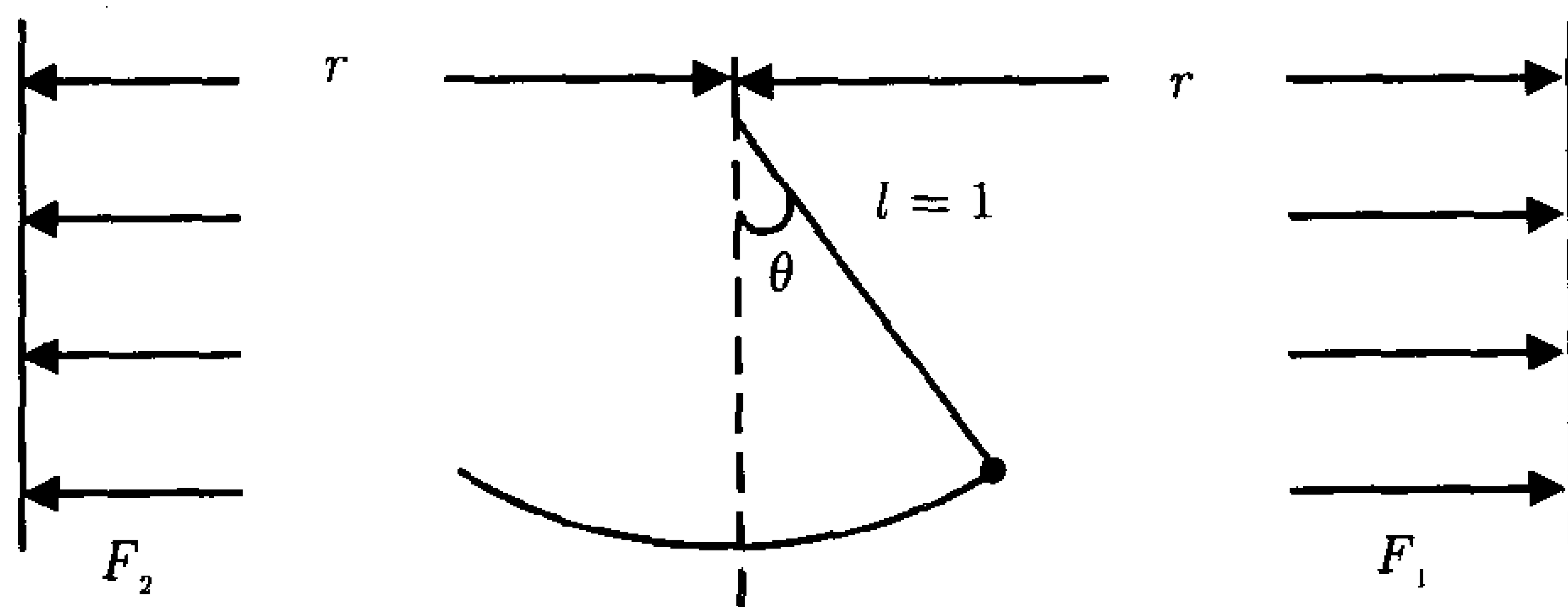


图 1.11 在一个对称磁场的摆

从直观上看, 当两侧磁场强度 λ 小于某个临界值 λ_0, 即 $\lambda < \lambda_0$, 在引力和摩

擦力的作用下，这个摆将逐渐在 $\theta=0$ 的位置停止下来，这里 θ 是摆的杆与垂线之间的夹角．但是，当 λ 超过 $\lambda_0(\lambda>\lambda_0)$ 时，在中心位置的两侧将对称地出现两个平衡位置 $\pm\theta_\lambda\neq 0(\lambda>\lambda_0)$，使得小球在磁场、引力和阻尼的作用下将在 $\pm\theta_\lambda$ 中任一个位置静止下来．小球在 $\pm\theta_\lambda$ 中哪一个位置停下来取决于它的初始状态．另外，$\theta_\lambda\to 0$ 当 $\lambda\to\lambda_0$.

这是一个典型的动态分歧例子，现在我们来看如果从数学上反映这一分歧现象，这个单摆运动满足下面初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-k\dfrac{d\theta}{dt}-g\sin\theta+f\cos\theta,\\ \theta(0)=\alpha_1,\\ \theta'(0)=\alpha_2,\end{cases}$$

这里 $k>0$ 是阻尼系数， g 是引力常数， f 是磁力.

由库仑定律及 $r\gg 1, f$ 能够被表达为

$$\begin{aligned}f&=F_2-F_1\\ &=\frac{\Lambda}{(r-\sin\theta)^2}-\frac{\Lambda}{(r+\sin\theta)^2}\\ &=\frac{4r\Lambda\sin\theta}{(r^2-\sin^2\theta)^2}\\ &\simeq\lambda\sin\theta,\quad \lambda=4\Lambda r^{-3},\end{aligned}$$

这里 Λ 是磁场强度．这样，运动方程能够被表示为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-k\frac{d\theta}{dt}-g\sin\theta+\lambda\sin\theta\cos\theta.$$

令 $x_1=\theta, x_2=\theta'$. 那么运动方程化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-kx_2-g\sin x_1+\lambda\sin x_1\cos x_1.\end{cases}\tag{1.5.1}$$

其初始条件为

$$x_1(0)=\alpha_1,\quad x_2(0)=\alpha_2.\tag{1.5.2}$$

由 Taylor 展开

$$\lambda\sin x_1\cos x_1-g\sin x_1=(\lambda-g)x_1-\frac{1}{6}(4\lambda-g)x_1^3+o(|x_1|^3).$$

在 $x=0$ 的附近系统 (1.5.1) 可表达为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=(\lambda-g)x_1-kx_2-\dfrac{1}{6}(4\lambda-g)x_1^3+o(|x_1|^3).\end{cases}\tag{1.5.3}$$

当 $\lambda < g$ 时，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - g & -k \end{pmatrix}$$

有两个特征值

$$\lambda_{\pm} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4(g-\lambda)}}{2},$$

它们具有负实部. 在这种情况下，平衡点 $x = 0$ 是方程 (1.5.3) 的渐近稳定奇点.

当 $\lambda = g$ 时，方程 (1.5.3) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -kx_2 - \dfrac{1}{2}gx_1^3 + o(|x_1|^3), \end{cases} \tag{1.5.4}$$

此时 (1.5.4) 的特征值为

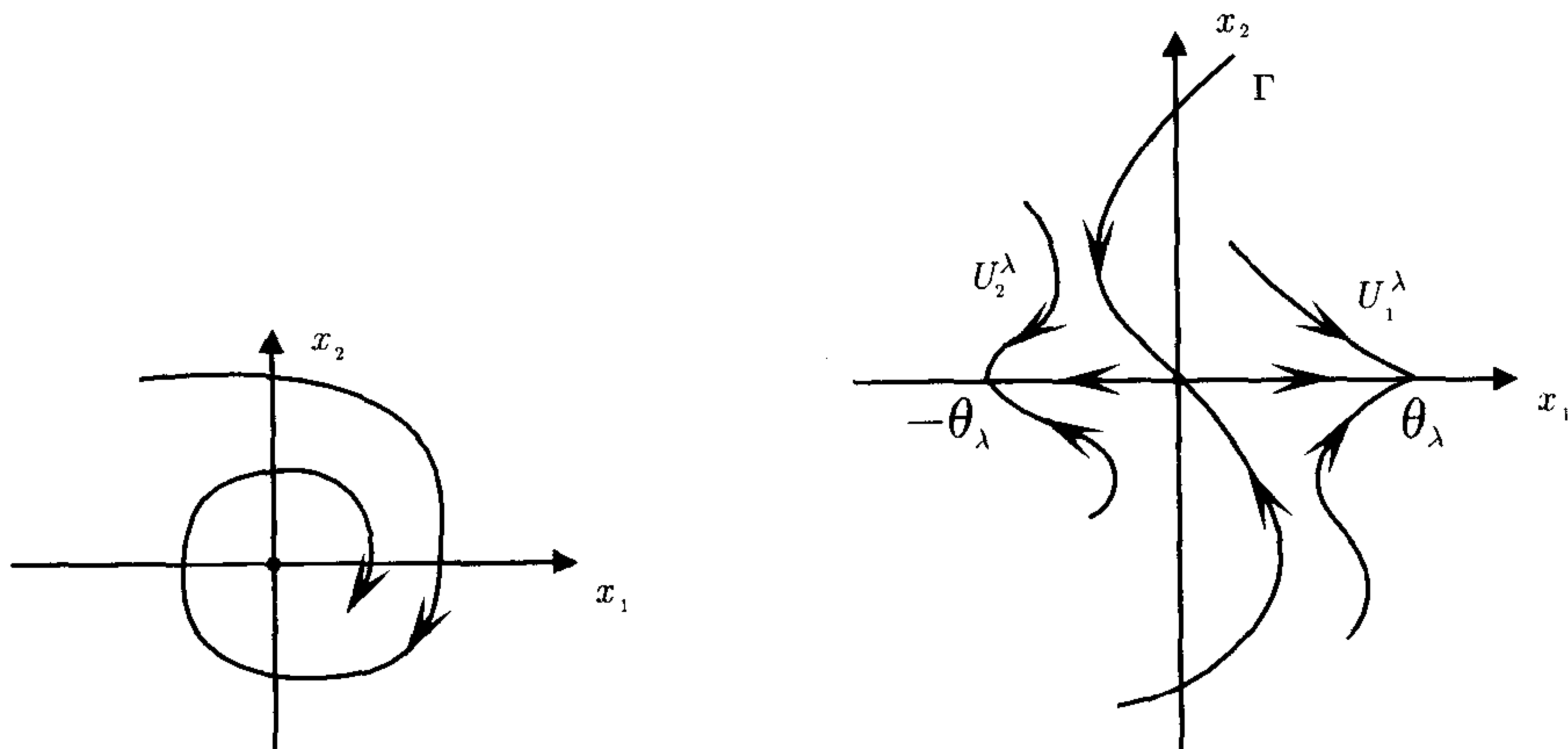
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -k,$$

平衡点为临界状态. 在 3.4.2 节中我们将验证，$x = 0$ 是一个 (1.5.4) 的局部渐近稳定的平衡点，由吸引子分歧定理 (见 §5.3), 关于对称磁场中单摆运动控制方程可以得到如下动态分歧定理.

定理 1.5 存在 $x = 0$ 的一个邻域 $U \subset R^2$, 使得下面结论成立.

(1) 当 $\lambda \leqslant g$ 时，$x = 0$ 是 (1.5.1) 在 U 中渐近稳定的奇点，如图 1.12(a) 所示;

(2) 当 $\lambda > g$ 时，方程 (1.5.1) 从 $(x, \lambda) = (0, g)$ 处分歧出两个平衡点 $(\pm\theta_\lambda, 0)$, 它们是局部渐近稳定的.



(a) 当 $\lambda \leqslant g$ 时，$x = 0$ 是一个吸引子　　(b) 当 $\lambda > g$ 时，系统分歧出两个吸引子 $(\pm\theta_\lambda, 0)$

图 1.12

进一步，这个开集 U 能够被分解为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ, 就如图 1.12(b) 所示,

$$\bar{U}=\bar{U}_1^\lambda+\bar{U}_2^\lambda,\quad U_1^\lambda\cap U_2^\lambda=\varnothing,\quad 0\in\Gamma=\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda,$$

$$(\theta_\lambda,0)\in U_1^\lambda,\quad(-\theta_\lambda,0)\in U_2^\lambda,$$

使得对于初值 (1.5.2), 我们有

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t,\alpha),x_2(t,\alpha))=(\theta_\lambda,0),\quad 当(\alpha_1,\alpha_2)\in U_1^\lambda,$$

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t,\alpha),x_2(t,\alpha))=(-\theta_\lambda,0),\quad 当(\alpha_1,\alpha_2)\in U_2^\lambda,$$

这里 $(x_1(t,\alpha),x_2(t,\alpha))$ 是问题 (1.5.1) 和 (1.5.2) 的解.

事实上，当 $\lambda>g$ 时， $x=0$ 有两个特征值 $\lambda_1<0$ 和 $\lambda_2>0$, 因而 $x=0$ 有一个一维稳定流形，它就是定理中的 $\Gamma=\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda$. Γ 将 U 分为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ, 分别为分歧平衡点 $(\theta_\lambda,0)$ 和 $(-\theta_\lambda,0)$ 的吸引域.

再从传统定态分歧理论来考察对称磁场中单摆运动的分歧现象，以便对比动态分歧与定态分岐的差别. 考虑 (1.5.1) 的稳态方程

$$\begin{cases}x_2=0,\\ -kx_2-g\sin x_1+\lambda\sin x_1\cos x_1=0.\end{cases}\tag{1.5.5}$$

显然 $x=(x_1,x_2)=(k\pi,0),k=0,\pm1,\cdots$ 是方程 (1.5.5) 的平凡解，而且 (1.5.5) 的非平凡解满足

$$\cos x_1=\frac{g}{\lambda},\quad x_2=0.\tag{1.5.6}$$

这样，从 (1.5.6) 我们看到，当 $\lambda\leqslant g$ 时， (1.5.5) 仅仅有平凡解，即方程 (1.5.1) 没有定态分歧. 而当 $\lambda>g$ 时， (1.5.5) 从 $(x,\lambda)=(0,g)$ 处分歧出两个非平凡解

$$x_\pm(\lambda)=(x_1^\pm,x_2)=\left(\pm\sqrt{\frac{2(\lambda-g)}{\lambda}}+o(|\lambda-g|^{\frac{1}{2}}),0\right).$$

容易验证，在这两个非平凡解， (1.5.5) 的 Jacobi 矩阵的特征值实部都是负的. 因而 $x_\pm(\lambda)$ 是方程 (1.5.1) 两个局部渐近稳定的平衡点. 这样，我们便得到定态分歧定理.

定理 1.6 方程 (1.5.5) 从 $(x,\lambda)=(0,g)$ 处分歧出严格的两个解 $x_\pm(\lambda)=\left(\pm\arccos\dfrac{g}{\lambda},0\right)$ 对 $\lambda>g$, 并且 $x_\pm(\lambda)$ 是方程 (1.5.1) 的局部渐近稳定平衡点.

很清楚，定理 1.4 比定理 1.5 更精细，从定理 1.4 我们不仅知道分歧出两个平衡解，而且知道这两个平衡解的吸引域. 同时，一般说来，分歧解的稳定性的验证也常常是一个非常困难的问题.

§1.5.2　Kaldor 模型的经济周期

我们现在再从 Kaldor 模型来观察经济周期现象. §1.1 中介绍了 Kaldor 模型，它有如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = I(x,y,\lambda) - S(x,y,\lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = I(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{1.5.7}$$

这里 x 为社会总收入， y 为社会总资本， λ 为生产技术参数， I 为投资函数，S 为储蓄函数.

我们首先需要根据经济规则给出投资函数 I 和储蓄函数 S 的具体数学表达. 对每一种技术参数 λ, 社会经济都存在一个平衡状态 $(x_0, y_0), x_0 > 0, y_0 > 0$, 这个状态连续地依赖于 λ. 由经济规律，在平衡态 (x_0, y_0) 的邻域， I 和 S 满足

$$\frac{\partial I}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial y} \leqslant 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} > 0.$$

再根据投资边际递减律及储蓄边际规律

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial I}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \propto (x - x_0), \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \propto (y - y_0).$$

由这些条件，在 (x_0, y_0) 的邻域内， I 和 S 取如下形式

$$\begin{cases} I = a_\lambda(x - x_0) - \alpha x(y - y_0)^3, \\ S = b_\lambda(x - x_0) + c_\lambda(y - y_0) + \beta y(x - x_0)^3 + \gamma x(y - y_0)^3, \end{cases}$$

这里 $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda > 0$ 连续地依赖于 $\lambda, \alpha, \beta, \gamma > 0$ 是常数， a_λ 代表投资意愿， b_λ 代表储蓄意愿.

这样， Kaldor 模型 (1.5.7) 化为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_\lambda(x - x_0) - c_\lambda(y - y_0) - \delta x(y - y_0)^3 - \beta y(x - x_0)^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_\lambda(x - x_0) - \alpha x(y - y_0)^3, \end{cases} \tag{1.5.8}$$

这里 $k_\lambda = a_\lambda - b_\lambda, \delta = \alpha + \gamma$.

从数学的观点，如果 (1.5.8) 线性部分的矩阵 A_λ 其特征值 $\beta_1(\lambda), \beta_2(\lambda)$ 满足

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \quad i = 1, 2, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

对某个 $\lambda_0 \in R$, (1.5.8) 就可能在 $((x,y),\lambda) = ((x_0,y_0),\lambda_0)$ 处发生分歧. 特别地, 如果 $\beta_i(\lambda_0)(i=1,2)$ 是一对虚数, 则 (1.5.8) 在 $((x_0,y_0),\lambda_0)$ 处一定分歧出一个周期轨道, 称为 Hopf 分歧.

对应于 (1.5.8) 线性部分的矩阵为

$$A_\lambda \begin{pmatrix} k_\lambda & -c_\lambda \\ a_\lambda & 0 \end{pmatrix},$$

其特征值由下式给出

$$\beta_\pm(\lambda) = \frac{k_\lambda \pm \sqrt{k_\lambda^2 - 4a_\lambda c_\lambda}}{2}.$$

令 $\lambda_0 \in R$ 是一个临界技术参数, 满足

$$k_\lambda = a_\lambda - b_\lambda \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ > 0, & \lambda > 0. \end{cases} \tag{1.5.9}$$

那么我们能够看到 $\mathrm{Re}\beta_\pm(\lambda) < 0$, 当 $\lambda < \lambda_0$, 此时方程 (1.5.8) 的平衡点 (x_0,y_0) 是局部渐近稳定的. 当 $\lambda = \lambda_0$ 时, $\beta_\pm(\lambda_0) = \pm i\sqrt{a_{\lambda_0}c_{\lambda_0}}$ 是一对虚数, 因而 (1.5.8) 在 $((x_0,y_0),\lambda_0)$ 处一定发生 Hopf 分歧. 为了证明在 $((x_0,y_0),\lambda_0)$ 分歧出的周期轨道是一个吸引子, 即是 Lyapunov 渐近稳定的, 需要验证在 $\lambda = \lambda_0$ 处 (x_0,y_0) 是 (1.5.8) 渐近稳定平衡点. 这等价于下面事实: 方程 (1.5.8) 非线性项的散度在 (x_0,y_0) 的一个邻域内是非正的. 这一点能够很清楚地看到, 对任何 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon, (x,y) \neq 0$, 这里 $\varepsilon > 0$ 充分小, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[-\delta x(y-y_0)^3 - \beta y(x-x_0)^3\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[-\alpha x(y-y_0)^3\right] \\ &= -\left[3\beta y(x-x_0)^2 + 3\alpha x(y-y_0)^2\right] - \delta t(y-y_0)^3 < 0. \end{aligned}$$

这样, 可以将 (1.5.8) 的分歧总结成下面定理.

定理 1.7 令 $\lambda_0 \in R$ 是一个临界参数满足 (1.5.9), 那么有下面的结论:

(1) 当 $\lambda \leqslant \lambda_0$ 时, 方程 (1.5.8) 的平衡点 (x_0,y_0) 是局部渐近稳定的;

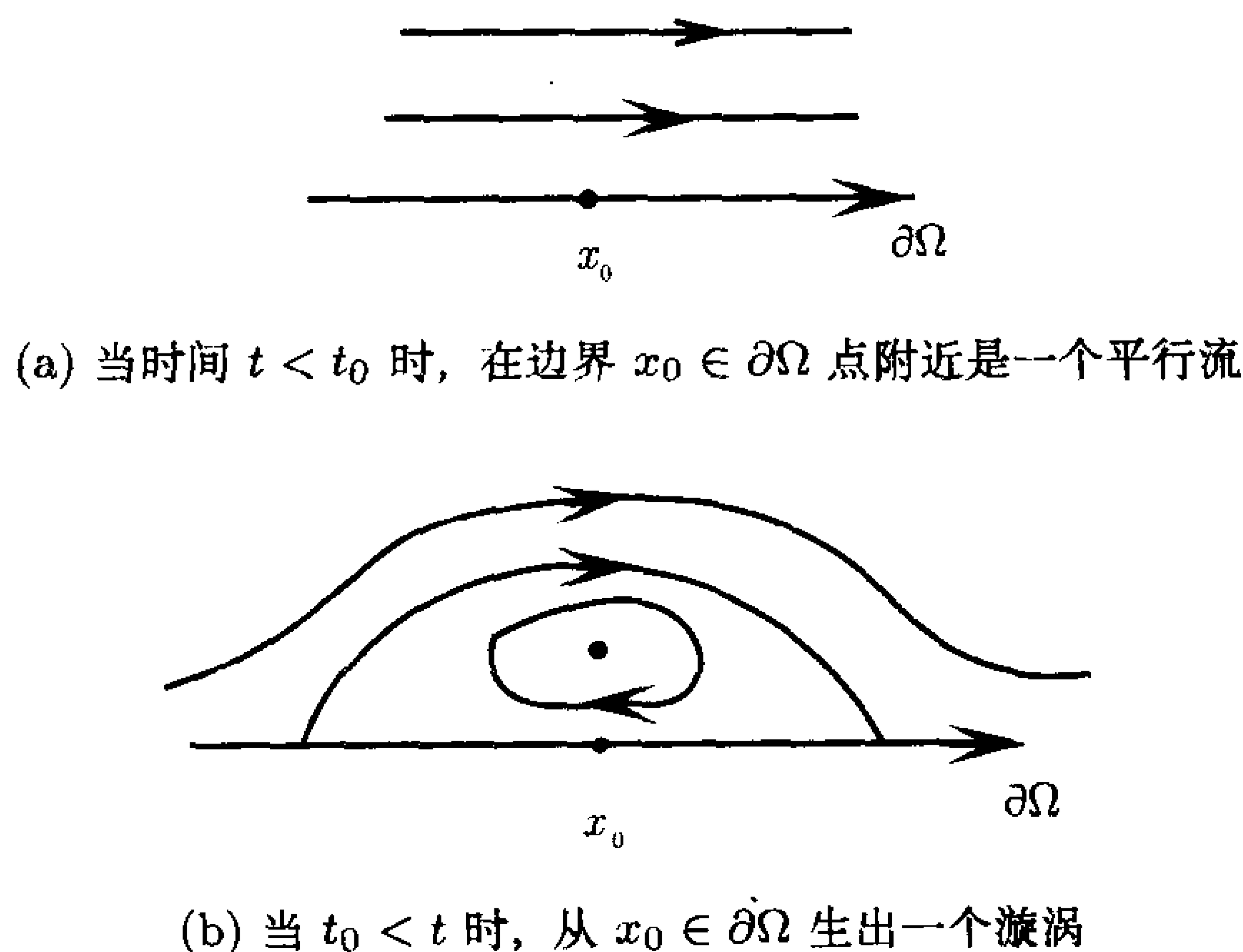
(2) 当 $\lambda_0 < \lambda$ 时, 方程 (1.5.8) 从 $((x,y),\lambda) = ((x_0,y_0),\lambda_0)$ 分歧出一个稳定的周期轨道.

现在, 我们能够从定理 1.6 来解释社会经济的动态行为. 从经济学的观点, 一个稳定的周期轨道代表了社会经济体系的周期波动行为. 当工业技术水平参数 $\lambda < \lambda_0$ 时, 社会生产力水平低下, 投资利率及社会收入都较低. 因而投资意愿比储蓄倾向要弱, 即 $a_\lambda < b_\lambda$. 这样, $k_\lambda = a_\lambda - b_\lambda < 0$, 在这种情况下就像定理 1.6 所陈述的那样, 社会经济是在平衡点周围波动发展, 即是一种自给自足稳定平衡的状态.

当技术参数 $\lambda > \lambda_0$ 时，新的技术给投资带来高额利润，使得社会投资意愿超过储蓄的倾向，即 $k_\lambda = a_\lambda - b_\lambda > 0$, 此时社会经济发展方式发生了根本变化，从过去自给自足的稳定平衡发展跃变为周期波动的发展模式. 这就是我们今天看到的情况.

§1.5.3　流体的边界层分离与内部分离

边界层分离与内部分离是人们非常熟悉的一种自然现象. 我们经常可以观察到，在一个河流中有时从河边上或者河的内部会突然产生一个漩涡. 如果这个漩涡从边界上产生，如图 1.13(a) 和 (b) 所示，就是所谓的边界层分离 (boundary layer separation). 如果这个漩涡是从内部发生，如图 1.14(a) 和 (b) 所示，就是所谓的内部分离 (spin off).



(a) 当时间 $t < t_0$ 时，在边界 $x_0 \in \partial\Omega$ 点附近是一个平行流

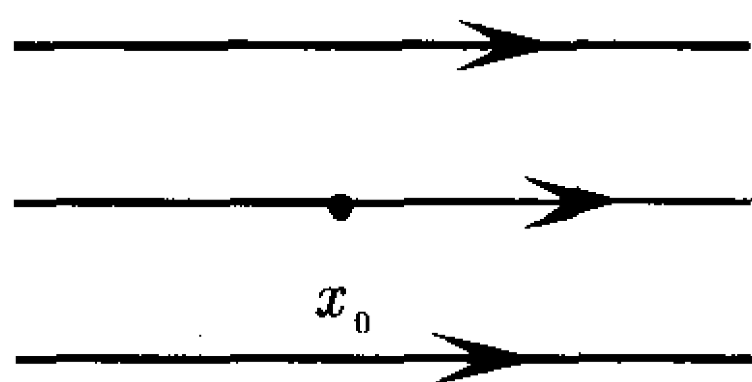
(b) 当 $t_0 < t$ 时，从 $x_0 \in \partial\Omega$ 生出一个漩涡

图 1.13

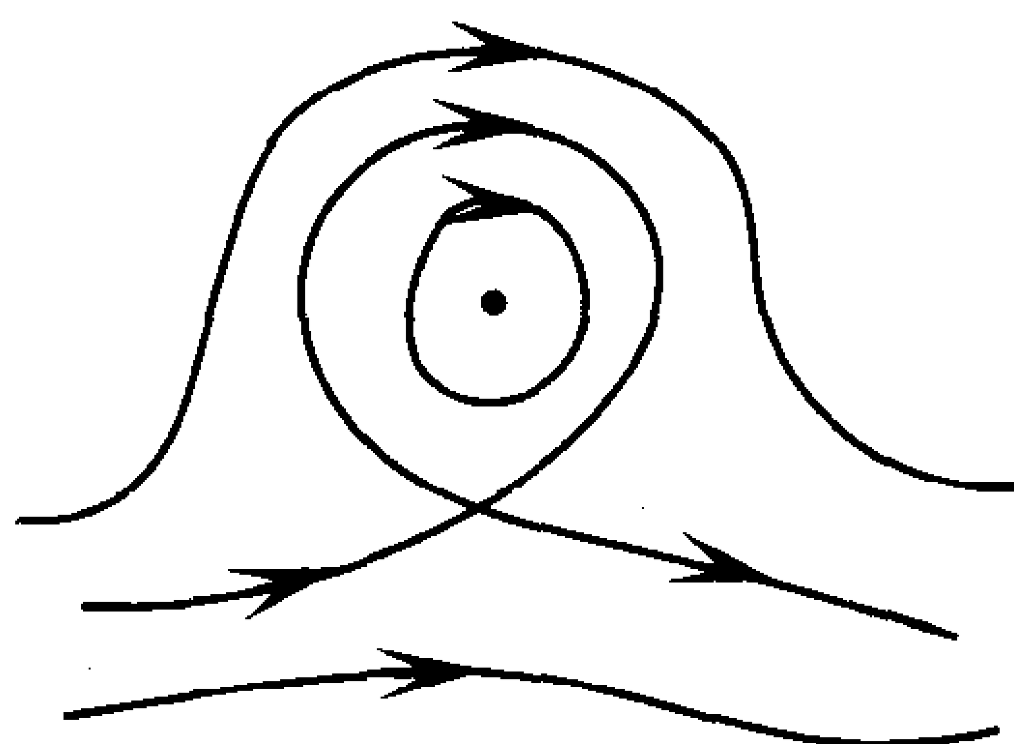
边界层分离与内部分离在地球物理流体动力学中是一个非常普遍和重要的现象，如海湾流的边界层分离、高山边的大气环流分离以及龙卷风形成等. 这些行为经常对大气和海洋环流产生重大影响，从而影响地球的气候与环境的变化.

按数学的观点，边界层分离与内部分离现象实质上对应于两种不同类型分歧的发生. 我们知道，流体动力学分为两个不同分支：Euler 动力学与 Lagrange 动力学. Euler 动力学主要研究控制速度场的流体动力方程及其数学与物理性质，在数学上属于偏微分方程领域. 而 Lagrange 动力学主要关心流体速度场的轨道及其拓扑结构，属于有限维动力系统范围. 当流体发生边界层或内部分离时，首先是流体动力方程由于某种外参变量 λ 的变化而发生分歧，方程的解从一种稳定状态跃迁到另一种稳定状态. 这就是前面介绍的那些传统类型的分歧. 原来稳定状态的解 u_0 的拓扑结构是如图 1.13(a) 或图 1.14(a) 所示的平行流. 当跃迁到另一状态 $u_0 + v_\lambda$ 时，从 u_0 到 $u_0 + v_\lambda$ 这中间速度场的拓扑结构发生了变化，从边界或内部分歧出一个漩涡. 这第二种分歧称为结构分歧. 因此，要完

全理解边界层分离和内部分离问题，就必须走 Euler-Lagrange 动力学相结合的道路.



(a) $t < t_0$ 时，x_0 附近是一个管形流



(b) $t_0 < t$ 时，从 x_0 生出一个漩涡

图 1.14

边界层分离是流体动力学中一个著名的问题. 物理学家 L. Prandtl 在 1904 年最早注意和研究这一现象. 而内部分离也是流体动力学中引人关注的一个重大问题. 然而近一百年来在这两个问题上一直没有建立合适的数学理论去研究它们.

最近，在文献 [24,25,62,64,67] 中，关于边界层和内部分离问题从 Lagrange 动力学方面给出了一套完整的数学理论. 下面将分别对这两个问题的结构分歧理论给予简单的介绍. 最后，我们也将从 Euler-Lagrange 动力学耦合理论的角度去分析和讨论这两个问题.

1. 边界上的结构分歧

令 $C^r(TM)$ 是所有定义在 $M \subset R^2$ 上的 r 次连续可微微量场空间，$r \geqslant 1, M$ 是一个开集. 记

$$B_0^r(TM) = \{u \in C^r(TM) | \ \mathrm{div} u = 0, \ \ u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

令 $u(\cdot, t) \in B_0^r(TM)$ 是一个单参数族向量场，并且在 $t = t_0$ 的一个邻域有如下 Taylor 展开

$$\begin{cases} u(x,t) = u^0(x) + (t - t_0)u^1(x) + 0((t - t_0)^2), \\ u^0(x) = u(x, t_0), \\ u^1(x) = \dfrac{\partial u(x, t_0)}{\partial t}. \end{cases} \tag{1.5.10}$$

假设 $x_0 \in \partial M$ 是一个边界上的点,

$$\frac{\partial u^0(x_0)}{\partial n} = 0 \quad (x_0\text{是孤立零点}), \tag{1.5.11}$$

$$\operatorname{ind}\left(\frac{\partial u^0}{\partial n}, x_0\right) = 0, \tag{1.5.12}$$

$$\frac{\partial u^1(x_0)}{\partial n} \neq 0, \tag{1.5.13}$$

另外对 $u^0 = (u_1^0, u_2^0)$, 又假设

$$\frac{\partial^3 u_1^0(x_0)}{\partial^2 \tau \partial n} \neq 0, \tag{1.5.14}$$

这里 n, τ 分别是 ∂M 的单位法向量和切向量, ind 表示 $\partial u^0/\partial n$ 在 x_0 的指标.

对于条件 (1.5.11)~(1.5.14) 解释如下.

注 1.2 条件 (1.5.11) 称为 Prandtl 条件, 是边界层分离的必要条件. 条件 (1.5.12) 是等价于没有 $u^0(x)$ 在 M 内的轨道连接到 x_0. 条件 (1.5.13) 表明靠近边界流的加速度比较大.

注 1.3 条件 (1.5.14) 是一个技术性假设, 它能保证从边界上分歧出的漩涡是唯一的. 另外条件 (1.5.11) 和 (1.5.12) 意味着 $\partial^2 u_1^0(x_0)/\partial\tau\partial n = 0$. 同时 (1.5.14) 能以类似的高阶导数条件替代. 因此 (1.5.14) 实质上是 u_1^0 的局部解析性, 它是能被流体速度场所满足的.

下面定理给出不可压缩流的边界层分离基本特征.

定理 1.8 令 $u(\cdot,t) \in B_0^r(TM)(r \geqslant 1)$ 满足条件 (1.5.11)~(1.5.13), 那么有如下结论:

(1) 当 $t < t_0$(或 $t_0 < t$) 时, 由 $u(x,t)$ 所描述的流在 $x_0 \in \partial M$ 附近是一个平行流, 如图 1.13(a) 所示.

(2) 当 $t_0 < t$(或 $t < t_0$) 时, $u(x,t)$ 有一些漩涡从 $(x,t) = (x_0,t_0)$ 处分歧出来.

(3) 如果条件 (1.5.14) 成立, 则从 (x_0,t_0) 处分歧出的漩涡是唯一的, 如图 1.13(b) 所示.

我们需要强调的是在边界层分离中, 条件 (1.5.14) 具有一般性的性质, 即在所有在 x_0 点具有边界层分离的向量场集合中, 满足 (1.5.10)~(1.5.14) 条件的向量场是开稠集. 因而在自然界观察不到两个以上漩涡从边界上分歧出的现象.

2. *内部结构分歧*

令 $u(\cdot,t) \in B_0^r(TM)(r \geqslant 1)$ 在 $t = t_0$ 有 Taylor 展开 (1.5.10). 假设 $x_0 \in M$ 是 $u^0(x)$ 孤立内部奇点, 即 $u^0(x_0) = 0$, 并且

$$\operatorname{ind}(u^0, x_0) = 0, \tag{1.5.15}$$

$$Du^0(x_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1^0(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1^0(x_0)}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial u_2^0(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2^0(x_0)}{\partial x_2}\end{pmatrix}\neq 0, \tag{1.5.16}$$

即 u^0 在 x_0 的 Jacobi 不是零矩阵，及

$$u^1(x_0)\cdot e_2\neq 0, \tag{1.5.17}$$

这里 e_2 是满足下面关系的单位向量

$$\begin{cases}Du^0(x_0)e_2=\alpha e_1\ (\alpha\neq 0),\\ Du^0(x_0)e_1=0.\end{cases} \tag{1.5.18}$$

另外，又假设存在某个偶数 $m\geqslant 2$, 使得

$$\frac{\partial^k(u^0(x_0)\cdot e_2)}{\partial e_1^k}=\begin{cases}0, & 1\leqslant k<m,\\ \neq 0, & k=m.\end{cases} \tag{1.5.19}$$

我们将对条件 (1.5.15)~(1.5.18) 给出解释.

注 1.4 条件 (1.5.15) 和 (1.5.16) 意味着向量场 $u^0(x)$ 在 x_0 点的邻域有如图 1.15 所示的拓扑结构，即连结 x_0 点的两个轨道 Γ_1 和 Γ_2 是在 x_0 点相切. 满足 (1.5.18) 的单位向量 $e_1(Du^0(x_0)$ 的特征向量) 是 Γ_1 和 Γ_2 的公共切向量， e_2 与 e_1 正交. 条件 (1.5.17) 表明流体在 x_0 点的加速度与 e_1 不平行.

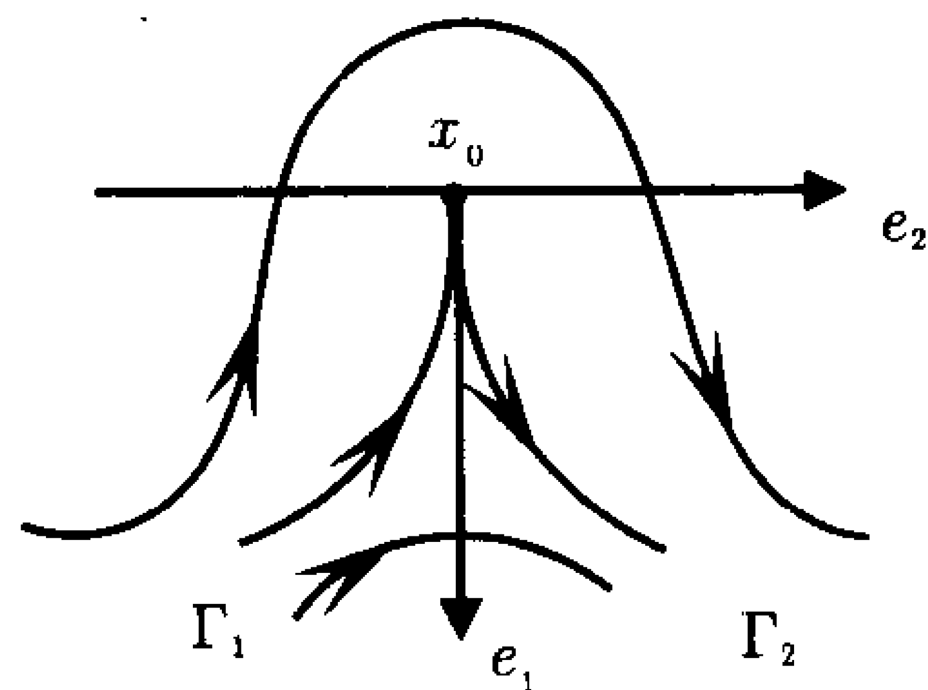


图 1.15

我们有如下内部结构分歧定理.

定理 1.9 令 $u(\cdot,t)\in B_0^r(TM)(r\geqslant 1)$, 如 (1.5.10) 所给，并满足条件 (1.5.15)~(1.5.17). 那么下面结论成立：

(1) 当 $t<t_0$(或 $t>t_0$) 时，由 $u(x,t)$ 在 $x_0\in M$ 的附近所描述的流是一个管形流，如图 1.14(a) 所示.

(2) 当 $t>t_0$(或 $t<t_0$) 时， $u(x,t)$ 有一些中心 (也就是漩涡) 从 $(x,t)=(x_0,t_0)$ 处分歧出来.

(3) 这些中心被一个闭的延拓轨道 $\gamma(t)$ 所围，并且 $\gamma(t)$ 当 $t\to t_0$ 时收缩到 x_0.

(4) 如果条件 (1.5.19) 也被满足，那么从 x_0 分歧出来的中心是唯一的，如图 1.14(b) 所示.

正如条件 (1.5.14) 在定理 1.7 中具有一般性 (genericity) 性质，这里条件 (1.5.19) 在定理 1.8 中也具有一般性性质，其证明可参见文献 [62].

3. Euler-Lagrange 动力学耦合理论

上面两小节介绍了流体的边界层与内部分离 Lagrange 动力学理论. 正如前面提到，要完整地理解边界层与内部分离这两个典型流体力学问题，就必须对它们建立一个 Euler-Lagrange 动力学耦合理论. 这一小节将以黏性剪切流为基本稳态流提出一个研究方案.

考虑下面 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u = \mu\Delta u - \nabla p, \quad x\in\Omega\subset R^2, \\ \mathrm{div} u = 0, \end{cases} \tag{1.5.20}$$

这里 $\Omega = \{(x_1, x_2)\in R^2 | 0 < x_2 < L\}$ 是一个带形区域. 方程 (1.5.20) 描述了 Ω 中一个如图 1.16 所示的平行剪切流.

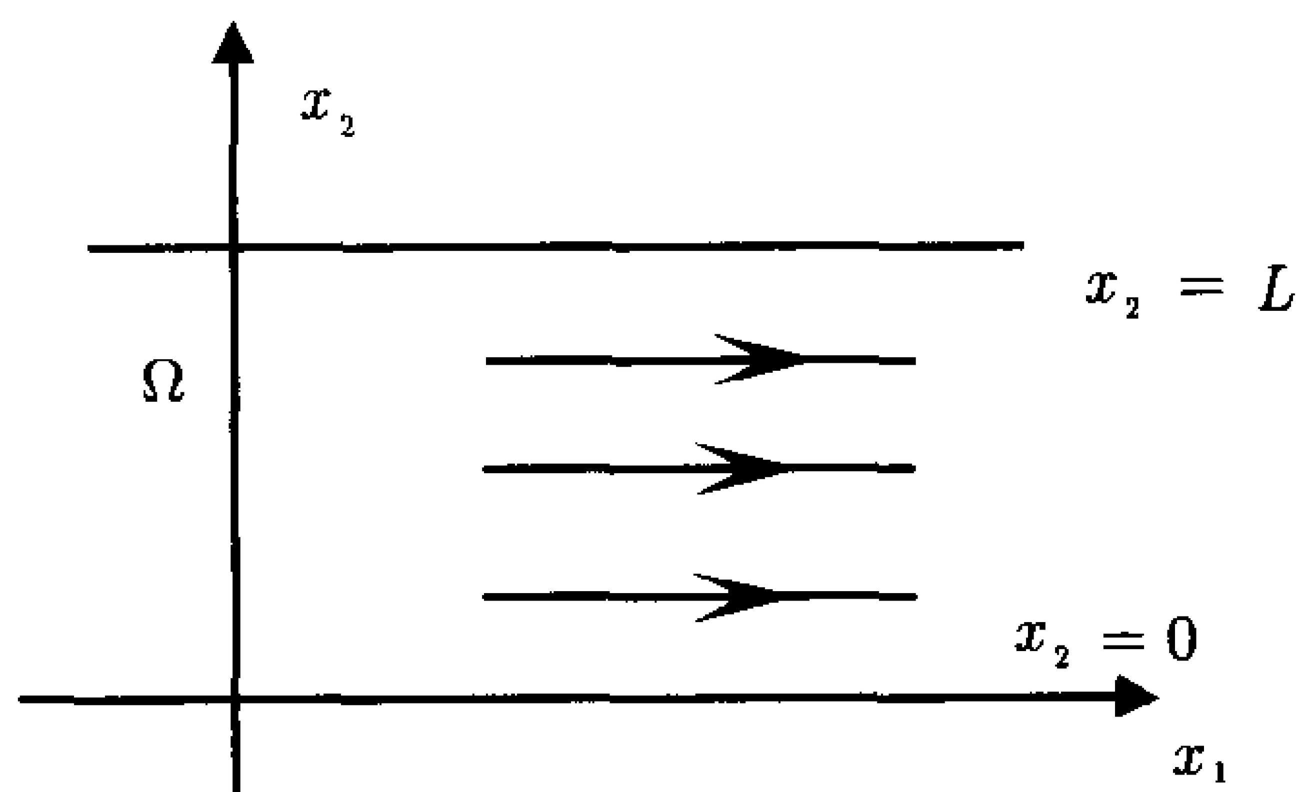


图 1.16

在带形区域 Ω 中的一个平行剪切流能被表达为

$$u_0 = \{a(x_2), 0\}.$$

令 u_0 是 (1.5.20) 的一个定态解, 则容易验证 $u_0 = \{a(x_2), 0\}$ 中的函数满足 $\dfrac{d^2a}{dx_2^2} =$ 常数，即 a 是一个函数

$$a(x_2) = \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3.$$

将 $\lambda_i (1\leqslant i\leqslant 3)$ 视为参变量 λ 的函数，这样 $a = a(x_2,\lambda)$. 作平移变换

$$u = v + u_0,$$

将 u 代入 (1.5.20) 可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \mu\Delta v_1 - \dfrac{\partial a}{\partial x_2}v_2 - a\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} - (v\cdot\nabla)v_1 - \dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \mu\Delta v_2 - a(x_2,\lambda)\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - (v\cdot\nabla)v_2 - \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \\ \mathrm{div} v = 0. \end{cases} \tag{1.5.21}$$

方程 (1.5.21) 配以下面边界条件

$$\begin{cases} v = 0 \text{ 在 } x_2 = 0, L, \\ v \text{ 在 } x_1 \text{ 方向是周期的}. \end{cases} \tag{1.5.22}$$

平行剪切流的稳定性研究就是考虑当 λ 变化时方程 (1.5.21) 和 (1.5.22) 的分歧问题，其关键就是考虑下面特征值问题

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_1 + \dfrac{\partial a(x_2,\lambda)}{\partial x_2}u_2 + a\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = \beta(\lambda)u_1, \\ -\mu\Delta u_2 + a(x_2,\lambda)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = \beta(\lambda)u_2, \\ \mathrm{div} u = 0. \text{ 配以边界条件 (1.5.22)}. \end{cases} \tag{1.5.23}$$

如果 (1.5.23) 存在特征值 $\beta_j(\lambda)$ 满足条件：

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\beta_j(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \\ \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) < 0, \quad m+1 \leqslant j, \end{cases} \tag{1.5.24}$$

那么问题 (1.5.21) 和 (1.5.22) 就有可能在 $\lambda = \lambda_0$ 处发生分歧.

所谓关于边界层与内部分离的 Euler-Lagrange 动力学耦合理论就是考虑，如果问题 (1.5.21) 和 (1.5.22) 在 $\lambda = \lambda_0$ 处发生分歧，其分歧解可能是定态解或周期解等等. 令 $v_\lambda(x,t)$ 是分歧解而且是稳定的，则有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} v_\lambda(x) = 0.$$

v_λ 连续依赖于 λ, 并且主要是由 β_i 的特征向量所控制. 因而 v_λ 的拓扑结构一定含有漩涡，如图 1.17 所示.

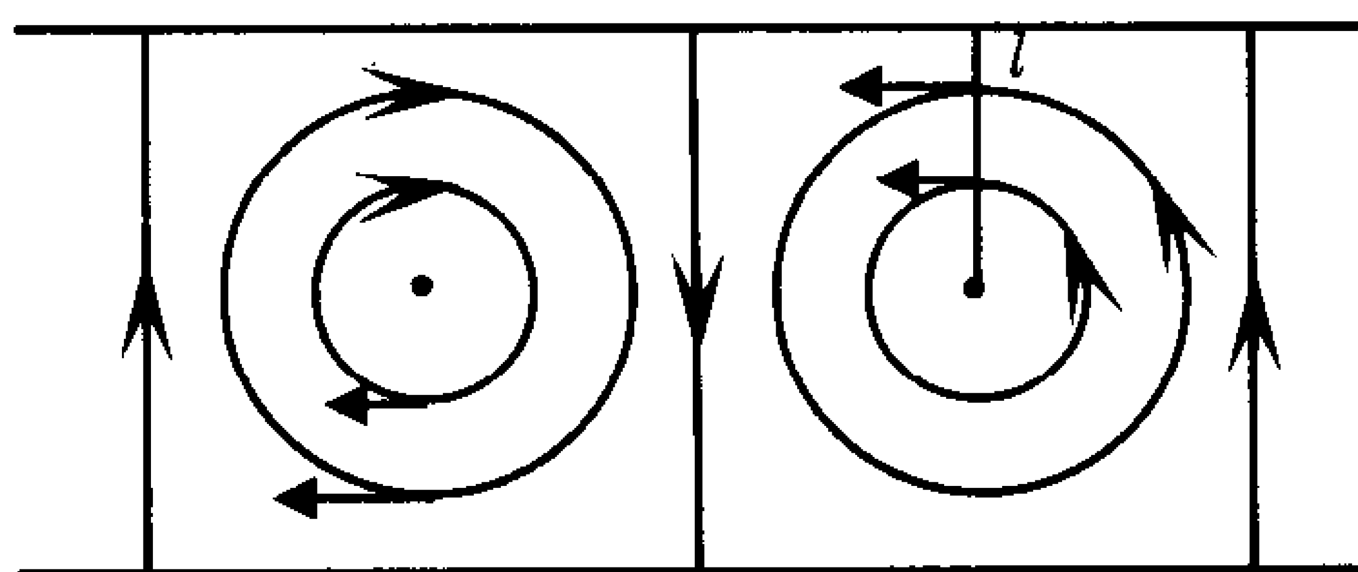


图 1.17

这样，当 $\lambda_0 < \lambda$ 时，方程 (1.5.20) 就有一个新的稳定状态

$$u(x,\lambda) = v_\lambda + u_0. \tag{1.5.25}$$

我们能够注意到，v_λ 的任一个漩涡上都存在一条曲线 l, 如图 1.17 所示，使得 v_λ 在 l 上的 x_2 方向分量为零，即在 l 上 v_λ 与 u_0 平行但方向相反. 因而存在 $\lambda_1 > \lambda_0$, 及 $\mu_0 > 0$, 使当 $\lambda > \lambda_1, 0 < \mu < \mu_0$ 时，解 (1.5.25) 一定分歧出一个漩涡. 这是由结构分歧定理 (定理 1.8) 所保证的. 用同样的原理也可讨论边界层分离问题.

需要说明, 平行剪切流的稳定性问题是流体动力学中一个非常重要课题. 在这方面已有丰富的理论，它们都是主要集中在 (1.5.23) 的特征值问题上.

§1.6　混 沌 现 象

在大气物理中，人们都知道气象的中短期预报相对而言较为准确，然而长期预报是无法做到. 这个事实所对应的就是混沌现象. 20 世纪 60 年代初，由气象学家 Lorenz 发现的奇异吸引子便能解释这种情况. 从 Lorenz 奇异吸引子人们可以看到大气物理流体的动力学行为对初值具有高度敏感性. 也就是说，气象的观测值与实际情况不管有多么相近，经过较长的时间后，预报的气象状况与真实的状态有着很大的差别. 再加上许多外在因素对气象初始状态的影响，使得人类对气候的长期预报成为不可能的事.

为了更好地理解这种解释，我们在下面介绍 Lorenz 方程及其奇异吸引子.

在一个高度为 $0 < x_2 < H$ 的大气层内，由于地面 $x_2 = 0$ 的温度 T_0 大于上界面 $x_2 = H$ 的温度 T_1, 热流上升，寒流下降，造成大气中上下对流的运动，如图 1.18 所示.

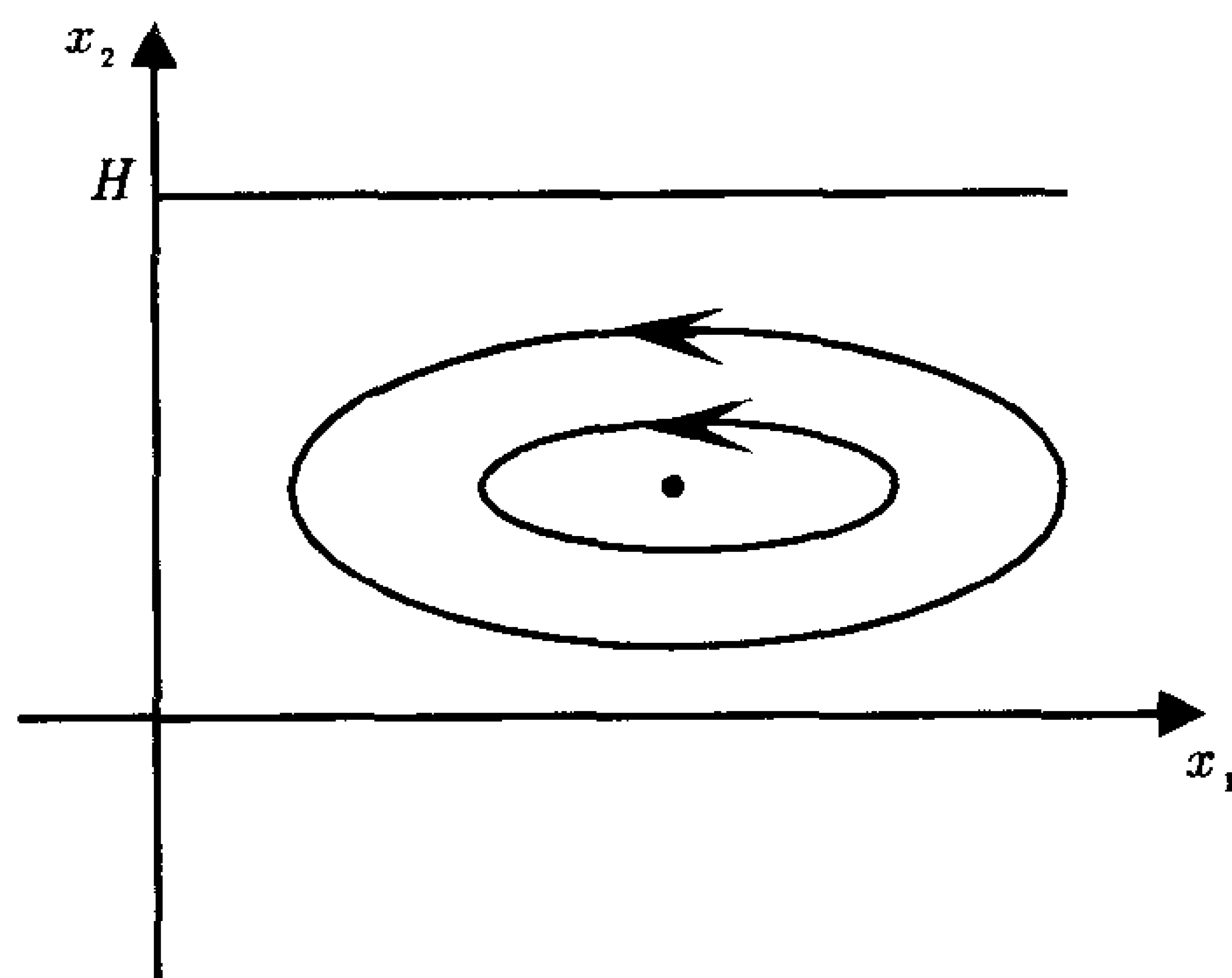


图 1.18　大气层的对流运动

事实上，这种大气的热对流运动就是我们后面将要系统介绍的 Rayleigh-Benard 对流的一种形式.

我们从数学上考察这一问题. 因为这种对流在 (x_1, x_2) 的垂直截面上都具有相似性，因而可以近似地用平面运动进行描述，其控制方程就是 Navier-Stokes

方程与热传导方程的耦合，称为 Boussinesq 方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_1=\nu\Delta u_1-\dfrac{\partial p}{\partial x_1},\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_2=\nu\Delta u_2-\dfrac{\partial p}{\partial x_2}+\alpha gT,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T=\kappa\Delta T,\end{cases}\tag{1.6.1}$$

其中，T 为温度函数，$u=(u_1,u_2)$ 为速度场，g 为重力加速度，ν 为动力黏性系数，α 为热膨胀系数，κ 为热传导系数.

对于大气对流运动，在边界 $x_2=0$ 和 $x_2=H$ 上取自由边界条件

$$\begin{cases}u\cdot n|_{\partial\Omega}=u_2|_{x_2=0,H}=0,\\ \dfrac{\partial u_\tau}{\partial n}|_{\partial\Omega}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}|_{x_2=0,H}=0,\\ T|_{x_2=0}=T_0,\quad T|_{x_2=H}=T_1.\end{cases}\tag{1.6.2}$$

问题 (1.6.1) 和 (1.6.2) 是大气对流的原始方程. 气象学家们通常采用等价的流函数形式的方程. 在平面区域内，无散度场可表示为一个 Hamilton 场

$$(u_1,u_2)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2},-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right),$$

这里 $\psi=\psi(x,t)$ 称为流函数. 再令

$$T=\frac{x_2T_1+(H-x_2)T_0}{H}+\theta(x,t).$$

经无量纲化后，问题 (1.6.1) 和 (1.6.2) 可等价地化为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+[\psi,\Delta\psi]=-\sigma\dfrac{\partial\theta}{\partial x_1}+\sigma\Delta^2\psi,\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}+[\psi,\theta]=-R_\alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}+\Delta\theta,\end{cases}\tag{1.6.3}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\nabla\psi\times n|_{x_2=0,H=0}=0,\\ \Delta\psi|_{x_2=0,H}=0,\\ \theta|_{x_2=0,H}=0,\end{cases}\tag{1.6.4}$$

其中 $[\cdot,\cdot]$ 为 Poisson 括号定义为

$$[f_1,f_2]=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

常数 $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$ 称为 Prandtl 数， $R_a = \alpha g H^3(T_0 - T_1)/\nu\kappa$ 称为 Rayleigh 数.

大气对流运动关于空间 x_1 坐标可以视为近似周期的. 再由边界条件 (1.6.4), 将 ψ 和 θ 进行 Fourier 展开. 为了方便, 令高度 $H = 1$, 水平对流尺度为 $0 < x_1 < l$.

将 ψ 和 θ 的 Fourier 级数作近似截断取如下形式

$$\begin{cases} \psi = x(t) \sin \frac{\pi x_1}{l} \sin \pi x_2, \\ \theta = y(t) \cos \frac{\pi x_1}{l} \sin \pi x_2 - z(t) \sin 2\pi x_2. \end{cases} \tag{1.6.5}$$

将 (1.6.5) 代入 (1.6.3) 作适当整理，比较系数可以得到如下的 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy, \end{cases}$$

其中 $\beta = \frac{4l^2}{1+l^2}, \mu = k(T_0 - T), k > 0$ 为常数.

在上面 Lorenz 方程中， Lorenz 取 $\sigma = 10, l = \sqrt{2}, \beta = \frac{8}{3}, \mu = 28$. 下面我们分析 Lorenz 方程随温差参变量 $\mu = k(T_0 - T_1)$ 的变化而发生的分歧与混沌现象.

考虑 Lorenz 方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -10x + 10y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy. \end{cases} \tag{1.6.6}$$

首先，Lorenz 方程在全局上是稳定的, 即存在有界区域 $\Omega \subset R^3$, 使得 (1.6.6) 解的轨道都从 Ω 外部吸收到 Ω 内. 事实上 Ω 就是由球面

$$x^2 + y^2 + (z - (10 + \mu))^2 = r^2$$

所围区域，这里 r 半径取得充分大，取 Lyapunov 函数

$$V = x^2 + y^2 + (z - (10 + \mu))^2,$$

则 $\frac{dV}{dt} < 0, \forall (x, y, z) \in R^3/\Omega$.

但是当 μ 大到一定程度时， Lorenz 方程就会出现怪吸引子，即发生混沌现象. 下面我们介绍这种情况.

当 $\mu<1$ 时, (1.6.6) 只有一个平衡点 $(x,y,z)=0$, 0 点的 Jacobi 矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 100 \\ \mu & -10 \\ 0 & 0-\dfrac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

该平衡点的特征值为

$$\lambda_{\pm}=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-40(1-\mu)}}{2},\quad \lambda_3=-\frac{8}{3}.$$

因此 $\mu<1$ 时, $(x,y,z)=0$ 是一个稳定的平衡点.

当 $\mu\geqslant 1$ 时, A 的特征值满足

$$\lambda_{+}\begin{cases} <0, & \text{当}\ \mu<1, \\ =0, & \text{当}\ \mu=1, \\ >0, & \text{当}\ \mu>1, \end{cases}$$

$$\lambda_{-},\lambda_3<0,\ \text{在}\ \mu=1\ \text{附近}.$$

这样, 方程 (1.6.6) 从 $((x,y,z),\mu)=(0,1)$ 处在 $\mu>1$ 的一侧分歧出两个新的平衡点

$$P_1=(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}(\mu-1)},\sqrt{\frac{8}{3}(\mu-1)},\mu-1\right),$$

$$P_2=(x,y,z)=\left(-\sqrt{\frac{8}{3}(\mu-1)},-\sqrt{\frac{8}{3}(\mu-1)},\mu-1\right).$$

不难验证, P_1 和 P_2 是两个稳定的平衡点, 而 0 点是不稳定平衡点. 此时大气运动有两种对流状态对应着平衡点 $P_1=(x_0,y_0,z_0),P_2=(-x_0,-y_0,z_0)$:

$$\begin{cases} \psi_1=x_0\sin\dfrac{\pi x_1}{l}\sin\pi x_2, \\ \theta_1=y_0\cos\dfrac{\pi x_1}{l}\sin\pi x_2-z_0\sin 2\pi x_2, \end{cases}$$

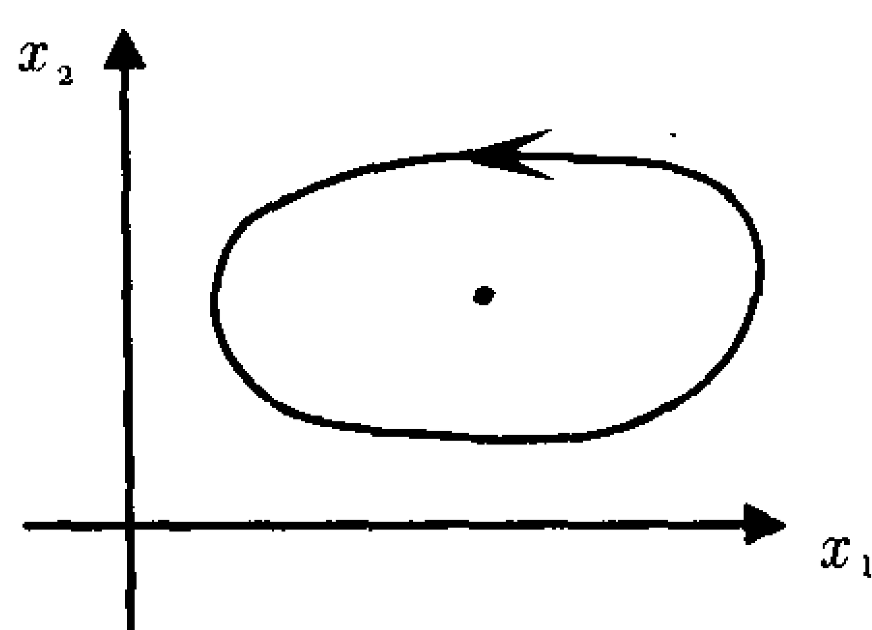
$$\begin{cases} \psi_2=-x_0\sin\dfrac{\pi x_1}{l}\sin\pi x_2, \\ \theta_2=-y_0\cos\dfrac{\pi x_1}{l}\sin\pi x_2-z_0\sin 2\pi x_2. \end{cases}$$

ψ_1 和 ψ_2 对应的大气环流如图 1.19(a) 和 (b) 所示, 这就是 Rayleigh-Benard 对流.

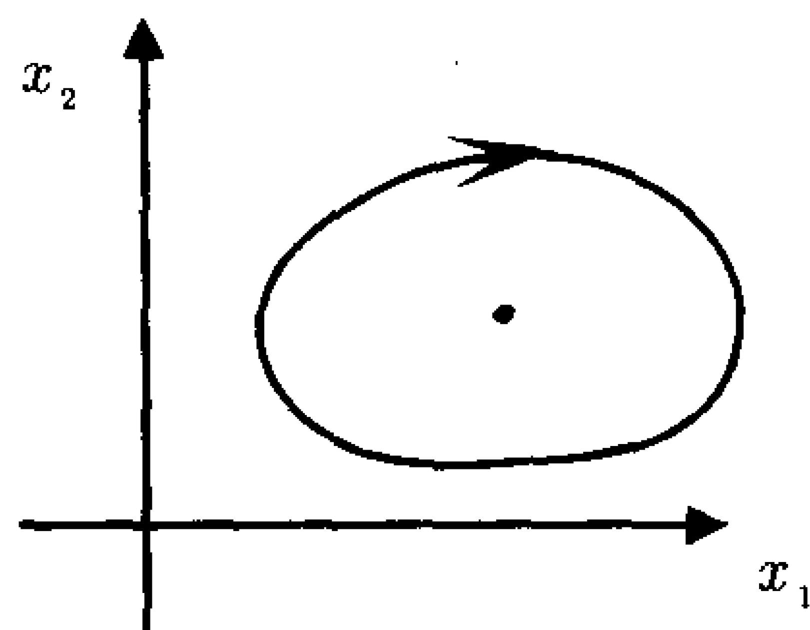
进一步, 当 μ 增大到 $\mu_0=\dfrac{470}{19}\simeq 24.7$ 时, 可以计算出平衡点 P_1,P_2 处的 Jacobi 矩阵出现一对特征值 λ 和 $\bar{\lambda}$, 并且 $\mathrm{Re}\lambda$ 在 μ_0 处从负值变到正值.

$$\mathrm{Re}\lambda\begin{cases}<0, & \mu<\mu_0,\\ =0, & \mu=\mu_0,\\ >0, & \mu>\mu_0.\end{cases}$$

因而在 $\mu_0=\dfrac{470}{19}$ 处发生 Hopf 分歧，而且分歧出的周期轨道是稳定的.



(a) ψ_1 的对流图



(b) ψ_2 的对流图

图 1.19

由数值计算表明，当 $\mu>25$ 时，稳定的周期轨道消失，整个系统出现奇异吸引子. 其吸引子特征为:

(1) 解的轨道绕着每个平衡点周围进行盘旋，盘旋的半径由小到大，然后再一次地接近该平衡点进行新一轮的盘旋.

(2) 解的盘旋环绕数完全是随机的，每一次的环绕数与前后的环绕数没有任何关系，且每次盘旋的曲面也不一样.

(3) 解的渐近行为对初值具有高度敏感性. 不管两个初值多么靠近，经过一段时间后，两个解之间产生很大的差异.

毫无疑问， Lorenz 奇异吸引子的发现对数学和气象学都产生了很大的影响. 但是，我们必须注意如下几个事实:

(1) Lorenz 方程是由从大气环流的 Boussinesq 方程作截断后产生出来. 我们必须注意到这种截断与实际误差太大，因而不能真实地反映大气环流运动.

(2) 在大气环流中，温差 (即 Rayleigh 数) 要发生变化. 当环流进行到一定时间后 Rayleigh 数就会下降到临界值之下，使环流终止. 因而如果有混沌发生，其时间不会长久.

(3) 在 Lorenz 方程中，不管 μ 有多大，总是存在零点的一个二维全局稳定流形 Γ(整修 z 轴在 Γ 内)，Γ 将 R^3 分为两个开集 U_1 和 U_2，使得两个分歧出的平衡点 $P_1\in U_1, P_2\in U_2$. 因而 U_1 和 U_2 是两个不变集，环绕 P_1 盘旋的轨道不能够跑到 U_2 区域. 同理在 U_2 的轨道也不能进入 U_1 区域. 这个理论结论与数值计算的结果是不一致的.

(4) 虽然数值计算表明 Lorenz 吸引子是非常没有规则. 然而理论分析才是真正可靠的. 现在仅仅能够从理论上严格地证明 Lorenz 吸引子的分形维数小于

2.7, 然而我们并不知道它是否大于 2. 只有证明它是大于 2 时, 才能完全肯定 Lorenz 吸引子是奇异的.

然而我们还是有理由相信, 一般耗散结构经过若干次分歧后, 就会有混沌发生. 也就是说其吸引子的拓扑结构变得非常复杂而无法用数学描述.

§1.7 评　注

§1.1 关于经济周期的 Kaldor 模型取自 G. Gabisch 和 H. Lorenz[23], 但是 Kaldor 在给出该模型时, 并没有给出投资和储蓄函数的具体形式. Kaldor 模型的具体形式 (1.5.8) 由 T. Ma 和 S. Wang 给出 [52].

§1.2 具有耗散结构的方程概念已被许多作者引用过. 如 R. Temam[98], 关于 Navier-Stoks 方程及其泛函框架可参阅 R. Temam 的经典著作 [99].

§1.3 首先在非线性抛物方程中发现爆破现象的是 H. Fujita[22], S. Kaplan[35] 对有界区域的初边值问题的爆破现象进行了讨论. 在非线性双曲方程中首先发现爆破现象的是 J. B. Keller[41].

关于弱解是不同自然定律的选择这一观点是来自陈文嫄教授在 1985 年的一个学术报告. 本书将这一观点更明确化.

拟线性波方程 (1.3.10) 的例子可参见文献 [12]. 关于双曲守恒律的进一步研究可参见文献 [33, 43, 44, 77, 78].

§1.4 Lyapunov 稳定性是一个非常古典的概念, 在许多常微分方程的标准教科书中都能够看到, 对无穷维动力系统的吸引子理论可参见文献 [45, 98].

关于 Kolmogorov 稳定性的 KAM 理论可见 V. Arnold 的经典著作 [4].

Peixoto 结构稳定性定理在 1962 年被巴西数学家 M. Peixoto 所证明 [82]. 在一般高维流形上结构稳定性定理是由 J. Palis 证明 [80]. 对于二维不可压维流的结构稳定性定理可参阅文献 [62, 63, 66].

§1.5 对称磁场中摆的例子和经济周期的 Kaldor 模型的分歧讨论由 Ma 和 Wang 给出 [52]. 关于流体的边界层分离和内部分离可参见文献 [24, 25, 62, 64, 67].

§1.6 关于 Lorenz 奇异吸引子及其分析可参见文献 [46, 98].

第二章　稳定性与分岐的数学基础

§2.1　反函数与隐函数定理

反函数与隐函数定理在非线性演化方程稳定性及分歧理论中起到非常基本的作用. 这里介绍两个定理，并给出直观的解释.

§2.1.1　反函数定理

令 X_1, X_2 为 Banach 空间， $\Omega \subset X_1$ 为一开集， $F : \Omega \to X_2$ 是一个连续可微的映射. 下面给出的就是古典的反函数定理.

定理 2.1　令 $x_0 \in \Omega$, 如果 F 在 x_0 点的导算子 $DF(x_0) : X_1 \to X_2$ 是一个线性同构，则存在 x_0 的一个邻域 $U \subset \Omega$ 及 $y_0 = F(x_0)$ 的一个邻域 $V \subset X_2$, 使得 $F : U \to V$ 是一个同胚.

反函数定理的实在意义　对于过 x_0 点的任一条曲线 l, F 映 l 为过 $y_0 = F(x_0)$ 点的一条曲线 $l' = F(l)$. 导算子 $DF(x_0)$ 将曲线 l 在 x_0 点的切向量 $\tau \in X_1$ 映到 $l' = F(l)$ 在 y_0 点的切向量 $\tau' \in X_2$, 如图 2.1 所示.

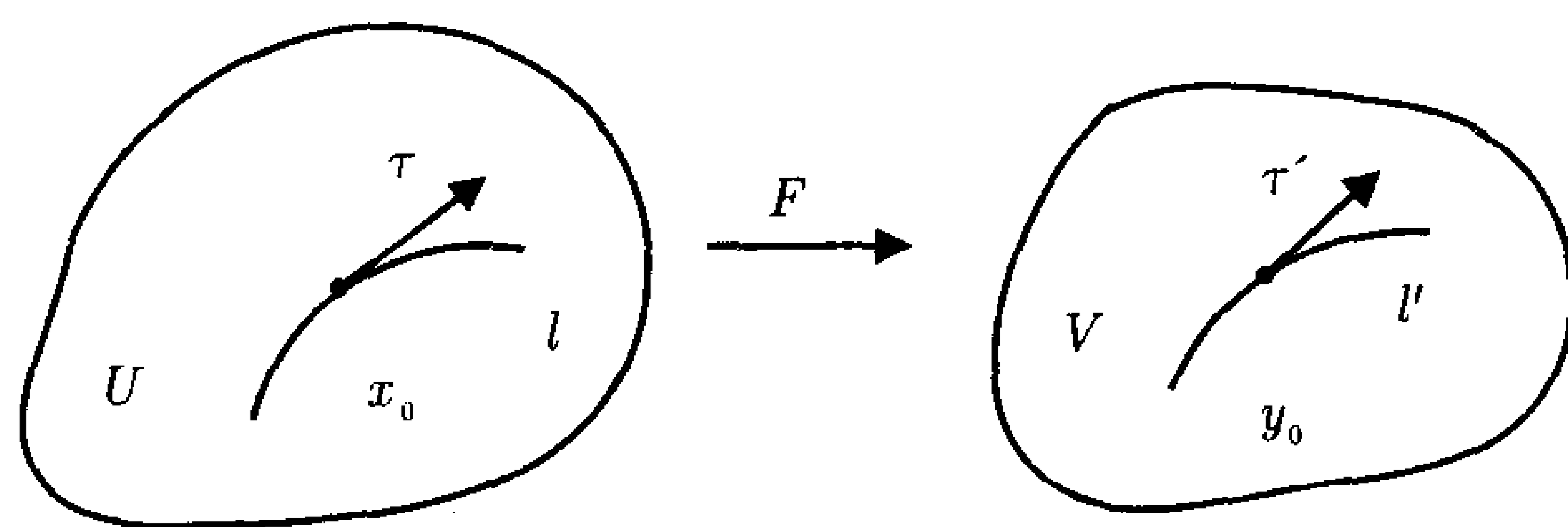


图 2.1

一个布满 x_0 点某个邻域 U 的过 x_0 点曲线族的全体切向量将布满整个切空间 X_1. $DF(x_0) : X_1 \to X_2$ 是同构的，这意味着 F 将一个布满 x_0 点邻域 U 的过 x_0 点曲线族映到一个布满 y_0 一个邻域 V 的过 y_0 点曲线族，而且映射是一一的. 因此 $F : U \to V$ 是一个同胚，如图 2.2 所示.

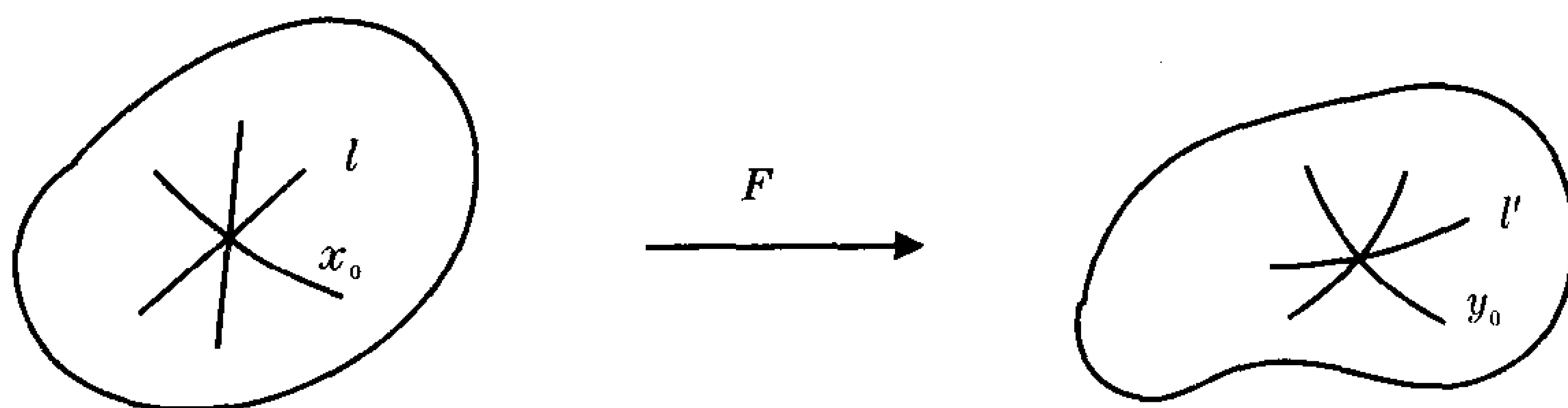


图 2.2

定理 2.1 的证明 不失一般性，假设 $x_0 = 0$ 及 $y_0 = 0$, 即

$$F(0) = 0.$$

这样，在 $x_0 = 0$ 附近 F 有如下 Taylor 展开

$$F(x) = DF(0) \cdot x + G(x), \tag{2.1.1}$$

$$G(x) = o(\| x \|). \tag{2.1.2}$$

定理 2.1 的成立等价于下面方程对任何 $y \in X_2$ 及 $\| y \|$ 充分小，下面方程在 $x = 0$ 邻域内有解

$$F(x) = y. \tag{2.1.3}$$

由 (2.1.1), 方程 (2.1.3) 等价于

$$\begin{cases} x = Ax, \\ Ax = DF^{-1}(0)y - DF^{-1}(0)G(x). \end{cases} \tag{2.1.4}$$

由 (2.1.2) 得

$$\begin{aligned} \| Ax_1 - Ax_2 \| &= \| DF^{-1}(0)G(x_1) - DF^{-1}(0)G(x_2) \| \\ &\leqslant \| DF^{-1}(0) \| \cdot \| DG(x_2) \| \cdot \| x_1 - x_2 \| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \| x_1 - x_2 \|, \end{aligned}$$

对 $\| x_1 \|$ 和 $\| x_2 \|$ 充分小.

这样，由压缩不动点定理，能够推得对每个给定 $y \in X_2$ 及 $\| y \|$ 充分小，方程 (2.1.4) 有唯一不动点. 因而方程 (2.1.3) 有解. 定理证毕.

§2.1.2 隐函数定理

观察一个自然现象. 取空间 R^3 中一个柱体 $D = B \times I, B \subset R^2$ 为一开集，$I = (a, b) \subset R^1$, 如图 2.3 所示.

想象着将体 D 压缩到水平面 R^2 中一个开集 $\widetilde{B}$ 上，使得该柱体的每一高度为 $y = y_0$ 截面无折叠地覆盖 $\widetilde{B}$. 从直觉上我们知道，对每一点 $P \in \widetilde{B}$, 在柱体中唯一地有一条曲线 γ 被压缩到 P 点上.

这一自然现象用数学语言来描述如下：

D 被压缩到区域 $\widetilde{B}$ 上，用数学语言表达就是存在一个连续映射：

$$F : B \times I \to \widetilde{B}. \tag{2.1.5}$$

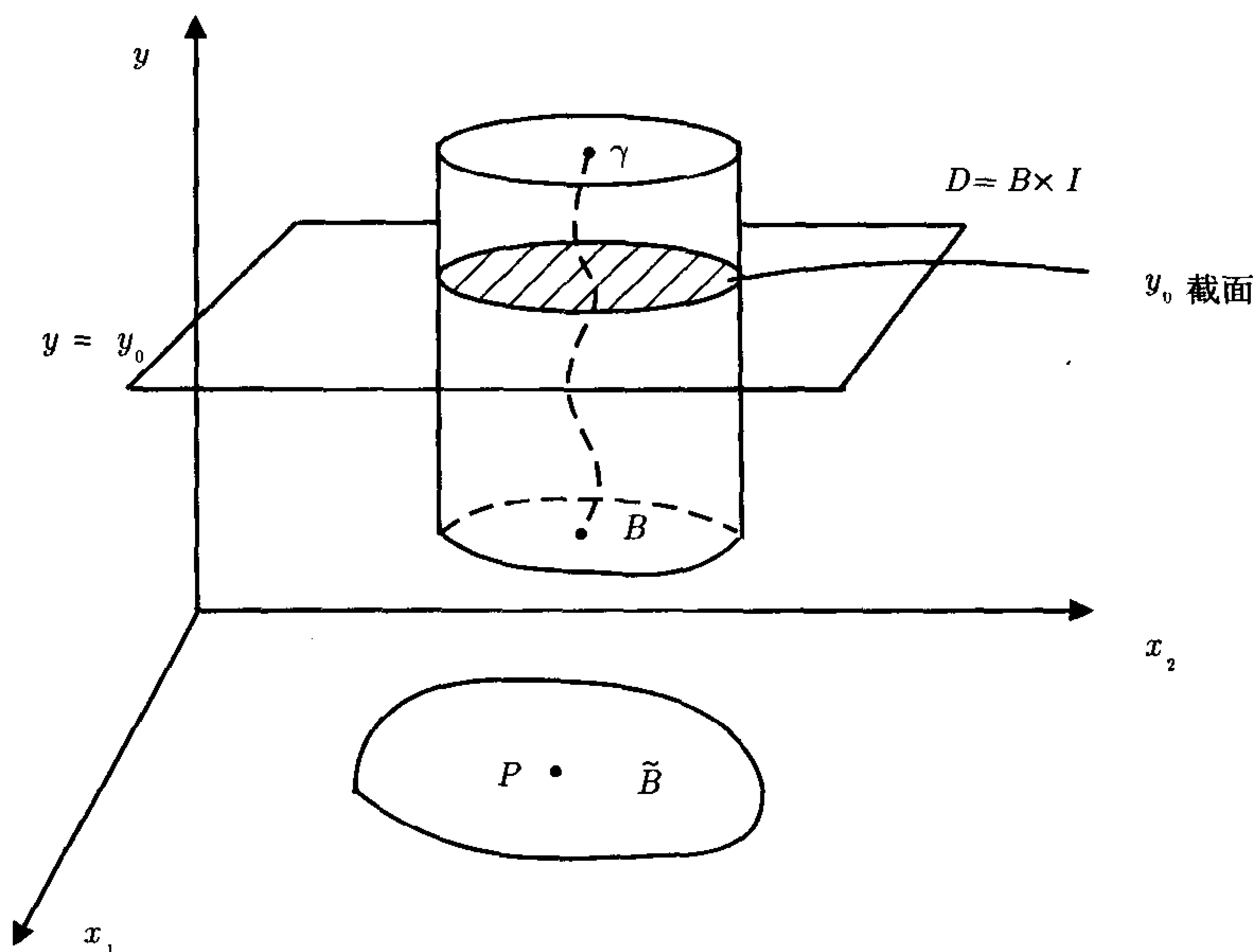


图 2.3

每一个 y_0 截面在压缩过程中无折叠地覆盖 $\widetilde{B}$ 意味着下面映射是一个同胚

$$F(\cdot, y_0) : B \times \{y_0\} \to \widetilde{B}. \tag{2.1.6}$$

曲线 γ 与每个 y 截面 $B \times \{y\}$ 只交于一点 (x, y). 这一现象表明 γ 能够用函数关系表达

$$\gamma : x = f(y), \quad a < y < b. \tag{2.1.7}$$

曲线 γ 被压缩到 P 点的数学含义为：函数 $x = f(y)$ 满足下面方程

$$F(x, y) = P. \tag{2.1.8}$$

由反函数定理，条件 (2.1.6) 能够被下面条件取代

$$D_xF(x, y_0) : R^2 \to R^2 \text{是同胚}, \quad \forall x \in B.$$

这样，上述过程就被总结成下面的结论.

结论　对一个映射 (2.1.5), 若对每一个 $y \in (a, b), F$ 关于 $x \in B$ 的导算子 $D_xF(x, y) : R^2 \to R^2$ 是一个同胚，那么对任一给定的 $P \in \widetilde{B}$, 方程 (2.1.8) 有唯一解 (2.1.7), 并且 $f(y)$ 是连续的.

这个结论被推广就是下面古典的隐函数定理.

令 X, Y, Z 是 Banach 空间，$U \subset X \times Y$ 是一个开集，并且 $F : U \to Z$ 是一个映射. 假设 $(x_0, y_0) \in U$ 满足

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{2.1.9}$$

考虑方程

$$F(x,y)=0. \tag{2.1.10}$$

在 (x_0,y_0) 附近的可解性.

定理 2.2(隐函数定理) 令 $F\in C^k(U,z)$ 是 k 次连续可微映射 $(k\geqslant 1)$, 并且满足 (2.1.9). 假设 F 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的导算子 $D_xF(x_0,y_0):X\to Z$ 是一个线性同构, 那么有如下结论:

(1) 存在 x_0 和 y_0 的一个邻域 $V\subset X$ 和 $W\subset Y$, 使得对 $\forall y\in W$, 方程 (2.1.10) 有一个唯一解

$$x=\Phi(y)\in V.$$

(2) 映射 $\Phi:W\to V$ 是 k 次连续可微的, 特别地, 如果 F 是解析的, 则 Φ 也是解析的.

(3) 如果 F 关于 y 的 m 阶导数在 (x_0,y_0) 处为零, 即

$$D_y^mF(x_0,y_0)=0,$$

那么这个隐函数 Φ 满足

$$\frac{d^j\Phi(y_0)}{dy^j}=0,\quad \forall 0\leqslant j\leqslant m,$$

即 $\Phi(y)=o(\| y-y_0\|^m)$.

隐函数定理的几何意义 考虑这种情况, $X=R^n,Y=R^k,Z=R^n$. 令 $\Sigma_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 R^{n+k} 中过点 $Z_0=(x_0,y_0)\in R^{n+k}$ 的 n 个 $n+k-1$ 维超曲面. 容易看到, 这 n 个超曲面在 $Z_0\in R^{n+k}$ 的某个邻域内的交集是一个 k 维曲面的充分条件是这 n 个超曲面在 Z_0 点的法向量线性无关, 如图 2.4 所示.

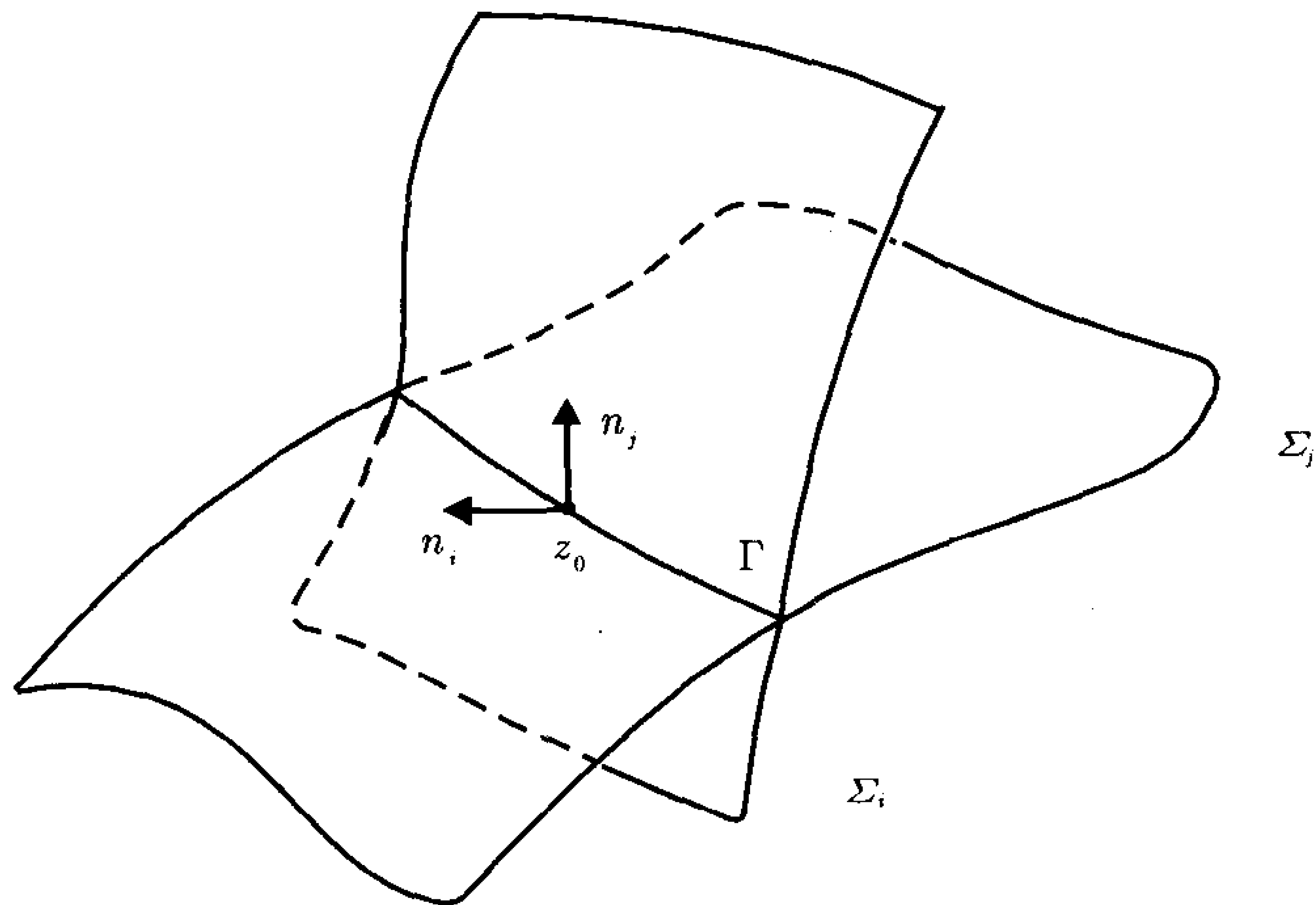


图 2.4 $\Gamma=\Sigma_i\cap\Sigma_j$

另一方面，从直观上我们知道，一个过 $Z_0=(x_0,y_0)$ 点在 R^{n+k} 空间中的 k 维光滑曲面 Σ 在 $y_0\in R^k$ 的某个邻域 $W\subset R^k$ 内能用 $y\in W$ 作为参变量的函数形式 $x=\Phi(y)\in R^n$ 表达出来，其充分条件为 Σ 在 Z_0 的切空间 π 与 R^k 不正交，即任何 Σ 的法向量与 R^n 不正交，如图 2.5 所示.

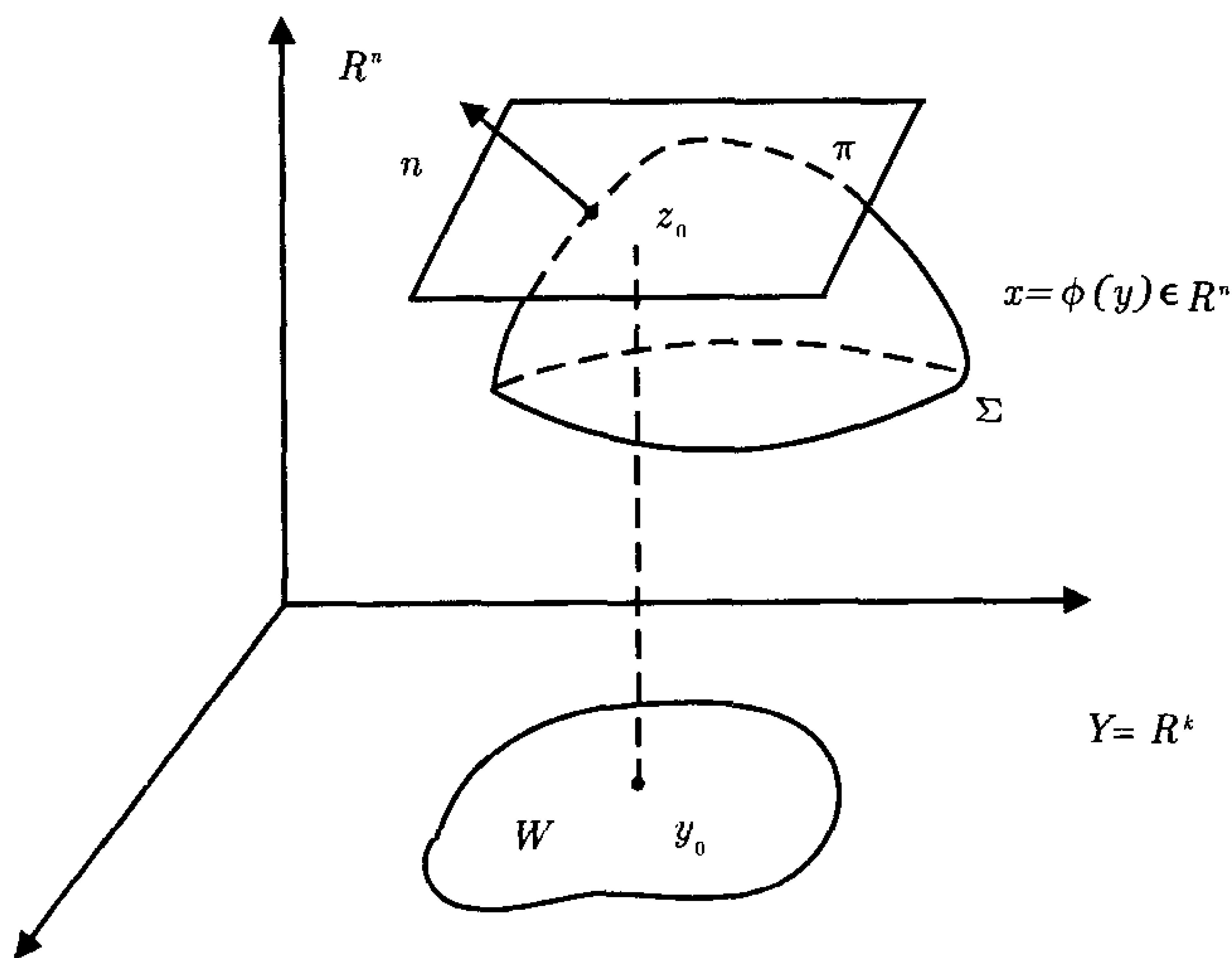


图 2.5

现在回过来看隐函数定理. 首先方程 (2.1.9) 和 (2.1.10) 决定了 R^{n+k} 中 n 个过点 $Z_0=(x_0,y_0)$ 的 $n+k-1$ 维超曲面. 即 (2.1.10) 的分量表示

$$F_i(x,y)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

确定了 n 个过 (x_0,y_0) 的等值面 $\Sigma_i\, D_xF(x_0,y_0):R^n\to R^n$ 是同构这一条件意味着

(1) n 个梯度向量 $\nabla F_i(x_0,y_0)$ 线性无关;

(2) 每个向量 $\nabla F_i(x_0,y_0)$ 到 $X=R^n$ 投影不为零.

因为 $\nabla F_i(x_0,y_0)$ 为 Σ_i 在点 (x_0,y_0) 的法向量，因而由性质 (1) 推出，交集

$$\Sigma=\cap_{1\leqslant i\leqslant n}\Sigma_i$$

在 (x_0,y_0) 的某个邻域内为一 k 维曲面. 从性质 (2) 可推得，这个曲面 Σ 可用函数形式表达

$$\Sigma:x=\Phi(y)\in R^n,\quad y\in W\subset R^k.$$

这就是隐函数定理的实在意义.

§2.2 拓扑度理论基础

拓扑度方法主要应用于数学中各类方程解的存在性判定问题上. 它在分析中已成为有力的工具. 当映射是定义在 R^n 空间中时, 其拓扑度称为 Brouwer 度; 当映射是定义在无穷维 Banach 空间上的全连续场时, 称为 Leray-Schauder 度.

Brouwer 度有许多种定义方式, 但总的来说分为拓扑和分析两类方法. 拓扑方法的优点在于使人们容易理解拓扑度的实在本质, 而且不需要 Sard 定理. 分析方法的优点在于避免使用拓扑学中的概念.

在这里, 我们将先用分析方法定义 Brouwer 度, 然后再用拓扑方法解释其实在意义. 为此我们先对 Sard 定理作一介绍.

§2.2.1 Sard 定理

Sard 定理是用分析方法定义拓扑度的基本工具. 它在数学其他领域有许多变形定理. 例如, 在微分拓扑中有 Thom 横截性定理, 在微分动力系统中有 Kupka-Smale 定理, 而对无穷维空间上的 Fredholm 算子有 Sard-Smale 定理. 更重要的是从 Sard 定理的基本思想中演化出许多普遍性 (genericity) 理论.

定义 2.1 令 $\Omega\subset R^n$ 是一个开集, $f\in C^1(\Omega,R^n)$. $p\in R^n$ 称为 f 的一个正则值, 若下面条件之一成立:

(1) $f^{-1}(p)=\phi$, 即 $f(x)=p$ 在 Ω 内无解;

(2) 或者对 $\forall x\in f^{-1}(p)$, 其 Jacobi 矩阵 $Df(x)$ 可逆.

否则, p 称为 f 的临界值.

下面给出 Sard 定理.

定理 2.3 令 $\Omega\subset R^n$ 为一开集, $f\in C^1(\Omega,R^n)$, 则所有 f 正则值内点的集合是 R^n 中开稠集, 因而 f 的临界值集合在 R^n 中有零测度.

Sard 定理的直观解释: 一个映射 $f:\Omega\to R^n$ 能够直观地理解成空间 Ω 到 R^n 中一个集 Ω' 上的覆盖, 如图 2.6 所示. 图中 Ω 被折叠地覆盖到 Ω' 上, f 将 Ω 中的 Ω_1 映到 Ω' 中的 $\Omega_1'+\Omega_2'$, 将 Ω_2 映到 Ω_2' 上, 将 Ω_3 映到 $\Omega_2'+\Omega_3'$, 将其折叠线 l_1 和 l_2 映到 l_1' 和 l_2' 上. 在数学上, $f:\Omega\to R^n$ 的临界值集合就是由所有像 l_1' 和 l_2' 这样的折叠点集合构成. 从直观上可以看出, 折叠点集合的维数小于 n, 因而 f 的临界值在 R^n 中具有零测度.

Sard 定理的证明 只需证明 f 正则值的集合在 R^n 中是稠密的即可. 如果定理不成立, 则一定存在一个开集 $D\subset f(\Omega)$, 使得 D 是由 f 的临界值组成. 记 $D_0=f^{-1}(D)$, 则 D_0 是一个开集, 且

$$f:D_0\to D \text{ 满射}, \tag{2.2.1}$$

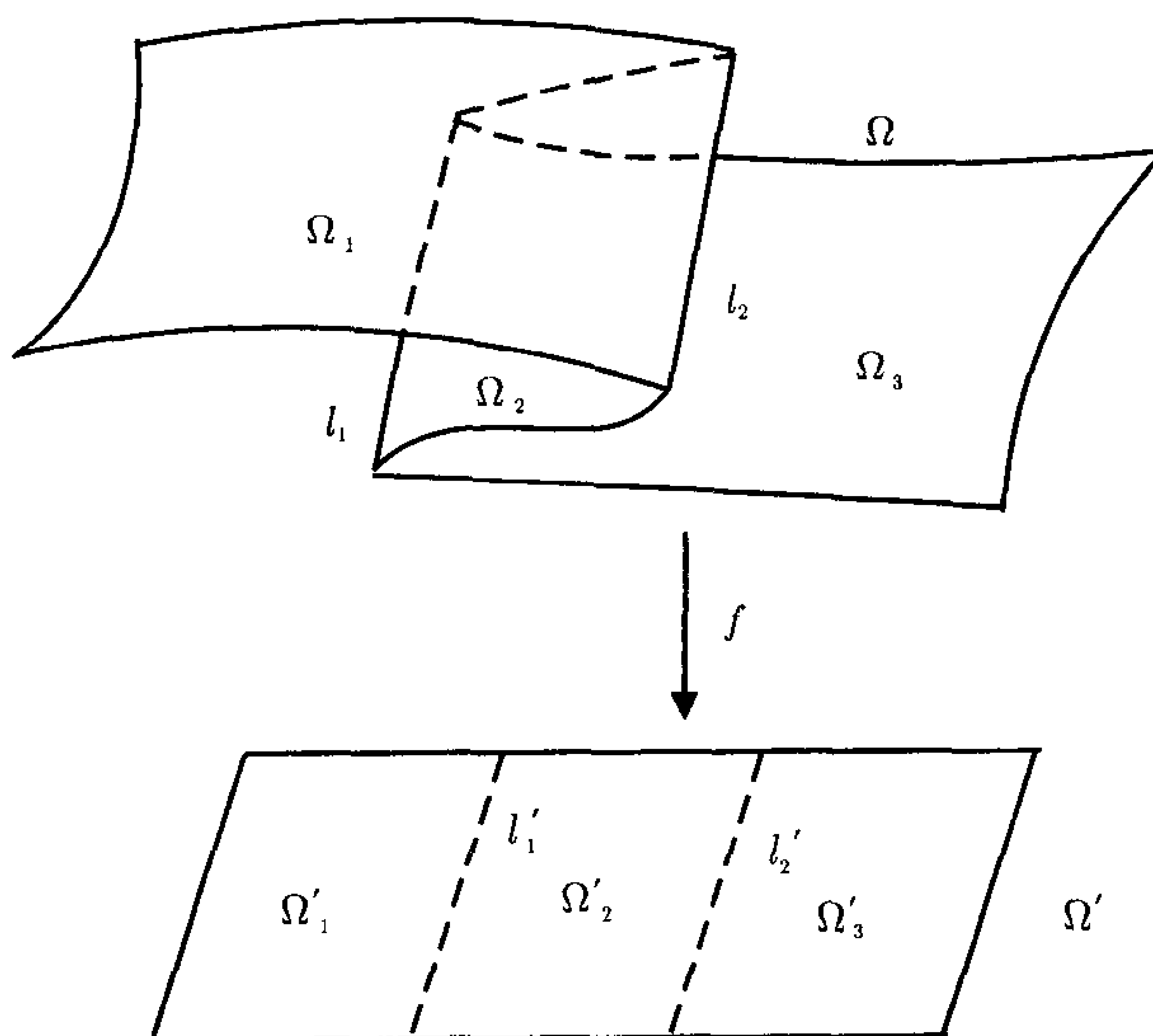


图 2.6　在映射 f 下，Ω 被覆盖到 Ω' 上

$$\det Df(x)=0,\quad \forall x\in D_0, \tag{2.2.2}$$

这里 det A 表示矩阵 A 的行列式.

我们对空间维数 n 用归纳法证明. 显然当 $n=1$ 时定理成立，否则由 (2.2.2) 可推出 $f'(x)=0$ 在开区 D_0, 这意味着 f 在 D_0 是常值，与 (2.2.1) 矛盾.

假设定理对 $n-1\geqslant 1$ 成立，我们将证明对 n 也成立. 用反证法，假设定理在 R^n 中不真，则 (2.2.1) 和 (2.2.2) 成立，我们将推出矛盾.

不失一般性，假设 $x=0\in D_0$, 使得

$$f(0)=0. \tag{2.2.3}$$

对于映射 $Df(0):X\to Y$, $X=R^n$ 和 $Y=R^n$ 能够被分解两个线性子空间之和

$$X=X_1\oplus X_2,\quad Y=Y_1\oplus Y_2,$$

$$\dim X_1=\dim Y_1=m,\quad \dim X_2=\dim Y_2=n-m.$$

并且矩阵 $Df(0)$ 能够被表达为

$$Df(0)=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

使得

$$A_i : X_i \to Y_i, \quad i = 1, 2,$$

而且 A_2 是一个 $(n-m)\times(n-m)$ 阶非奇异矩阵.

这样映射 f 在 $X = 0$ 附近可表达为 $f = (F, G)$:

$$F(x, y) = A_1 x + h_1(x, y), \tag{2.2.4}$$

$$G(x, y) = A_2 y + h_2(x, y), \tag{2.2.5}$$

这里 $x \in X_1, y \in X_2, h_i(x, y) = o(|x| + |y|), i = 1, 2.$

不妨假设 $m < n$, 否则 $Df(x) = 0, \forall x \in D_0$, 这意味着 f 在 D_0 是常值映射, 与 (2.2.1) 矛盾. 由隐函数定理, 从 (2.2.3) 和 (2.2.5) 推出, 存在一个函数

$$y = \Phi(x), \quad x \in X_1, \quad |x| < \delta, \quad 对某个\ \delta > 0,$$

这里 $\Phi(x) = o(|x|)$, 使得

$$G(x, \Phi(x)) = 0, \quad \forall |x| < \delta, \quad x \in X_1. \tag{2.2.6}$$

记 $B = \{(x, \Phi(x)) | x \in X_1, |x| < \delta\}$, 则 $B \subset D_0$ 是同胚于 $X_1 = R^m$ 的一个 m 维开曲面, 并且在 $x = 0$ 处与 X_1 相切. 在 X 中作局部坐标变换 $\varphi : X \to X$ 为

$$x' = x, \quad y' = y - \Phi(x),$$

则 φ 将曲面 B 映到 x' 平面上. 为了简便, 对新坐标省去上一撇. 这样, 在新坐标下

$$B = \{(x, 0) \in X| \ \ x \in X_1, \quad |x| < \delta\} \subset D_0,$$

方程 (2.2.6) 为

$$G(x, 0) = 0, \quad x \in X_1, \quad |x| < \delta. \tag{2.2.7}$$

这样, 由 (2.2.4) 和 (2.2.7), 有

$$f|_B = A_1 + h_1(\cdot, 0) : B \cap X_1 \to Y.$$

由归纳假设, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $x \in X_1, |x| < \varepsilon$, 使得 x 是 $f|_B$ 的正则点, 即

$$A_1 + D_x h_1(x, 0) : X_1 \to Y$$

是可逆的. 因而由 (2.2.4) 、 (2.2.5) 和 (2.2.7), 有

$$Df(x, 0) = \begin{pmatrix} A_1 + D_x h_1(x, 0) & * \\ 0 & A_2 + D_y h_2(x, 0) \end{pmatrix}.$$

当 $x \to 0$ 时, $D_y h_2(x,0) \to 0$, 而且 A_2 是可逆矩阵, 因而当 $|x|$ 充分小时, $Df(x,0)$ 是一个可逆矩阵, 这与 (2.2.2) 矛盾. 因而定理得证.

需要强调指出, 这里使用的 Sard 定理证明方法对无穷维 Banach 空间上的 Fredholm 算子也是有效的. 也就是说, 该方法可以用来证明如下面所述的 Sard-Smale 定理.

令 X, Y 是可分 Banach 空间, $F: X \to Y$ 是一个 C^1 映射, 我们说 F 是一个 Fredholm 算子, 若对每一点 $x \in X$, 其导算子 $DF(x): X \to Y$ 都是 Fredholm 算子. $p \in Y$ 称为 F 的正则值, 若 $F^{-1}(p) = \varnothing$, 或都对 $\forall x \in F^{-1}(p), DF(x): X \to Y$ 是满射.

下面给出的是关于 Fredholm 算子的 Sard-Smale 定理.

定理 2.4(Sard-Smale 定理)　令 $F: X \to Y$ 是一个 C^1 零指标 Fredholm 算子, 则 F 的正则值在 Y 中稠密. 进一步, 若 $y \in Y$ 是 F 正则值, 则 $F^{-1}(y)$ 是离散的.

Sard-Smale 定理在微分方程领域有许多应用 [21,65]. 其证明的关键是导算子可作分解: $DF(x_0) = A_1 \oplus A_2$ 及

$$
\begin{aligned}
&X = X_1 \oplus X_2, \quad Y = Y_1 \oplus Y_2, \quad \dim X_1 = \dim Y_1 < \infty, \\
&A_1 : X_1 \to Y_1, \\
&A_2 : X_2 \to Y_2 \text{是可逆的}.
\end{aligned}
$$

于是定理 2.3 的证明方法是有效的.

§2.2.2　Brouwer 度定义 —— 分析方法

令 $\Omega \subset R^n$ 是一个有界开集, $F: \bar{\Omega} \to R^n$ 一个连续映射, $p \in R^n$ 且 $p \notin F(\partial\Omega)$. 拓扑度理论是基于下面方程解的个数估计而引入的.

$$
F(x) = p, \quad x \in \Omega,\ p \in R^n \text{ 为给定点}. \tag{2.2.8}
$$

在方程 (2.2.8) 中涉及三个对象: 映射 f, 定义域 Ω 和给定点 $p \in R^n$. 下面引入的拓扑度将每组三元素 (f, Ω, p) 与一个整数相对应, 称其为映射 f 在区域 Ω 内关于 p 点的 Brouwer 度. 其严格定义如下.

定义 2.2　对每组三元素 $(F, \Omega, p), p \notin F(\partial\Omega)$, 定义 Brouwer 度如下:

(1) 如果 $F \in C^1(\bar{\Omega}, R^n)$, 并且 $p \in R^n$ 为 F 的正则值, 则

$$
\deg(F, \Omega, p) = \sum_{x \in F^{-1}(p)} \text{sign} \det DF(x),
$$

这里 $\det DF(x)$ 是矩阵 $DF(x)$ 的行列式;

(2) 如果 $F \in C^1(\bar{\Omega}, R^n)$, 并且 $p \in R^n$ 是 F 的一个临界值，那么由 Sard 定理，我们能够取 F 的一个正则值 $p_1 \in R^n$, 使得 $|p_1 - p| < \text{dist}(p, F(\partial\Omega))$, 然后定义

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(F, \Omega, p_1).$$

(3) 如果 $F \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ 是一个连续函数，取一个 C^1 函数 $F_1 \in C^1(\bar{\Omega}, R^n)$, 使得

$$\sup_{x\in\bar{\Omega}} |F(x) - F_1(x)| < \text{dist}(p, F(\partial\Omega)),$$

然后定义 Brouwer 度为

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(F_1, \Omega, p).$$

在上述定义中，要保证 Brouwer 度的合理性，还需要证明，在定义 (2) 和 (3) 中， Brouwer 度与正则点 p_1 和 C^1 函数 F_1 的选择无关. 其证明较为繁杂，我们将在下面应用拓扑方法来表明这一点.

§2.2.3 流形上 Brouwer 映射度

首先介绍球面上映射度的概念，然后再延伸到一般闭紧流形上 Brouwer 映射度. 流形上映射度的概念对于直观理解有界开区域上 Brouwer 度起到直接作用. 在后面我们将始终采用拓扑观点.

记 S^n 为 n 维球面， $f: S^n \to S^n$ 是连续映射. 下面从直观的角度分析球面映射的特征.

先从欧氏空间 R^n 的定向开始. 经验表明，当 $R^n \subset R^{n+1}$ 时， R^n 将 R^{n+1} 分为两部分： R^n 的上方 $(x_{n+1} > 0)$ 和 R^n 的下方 $(x_{n+1} < 0)$. 这样，当从 R^{n+1} 中来考察 R^n 时，就可以赋予一个定向，其 R^n 的上表面定义为正定向，下表面定义为负定向，如图 2.7 所示.

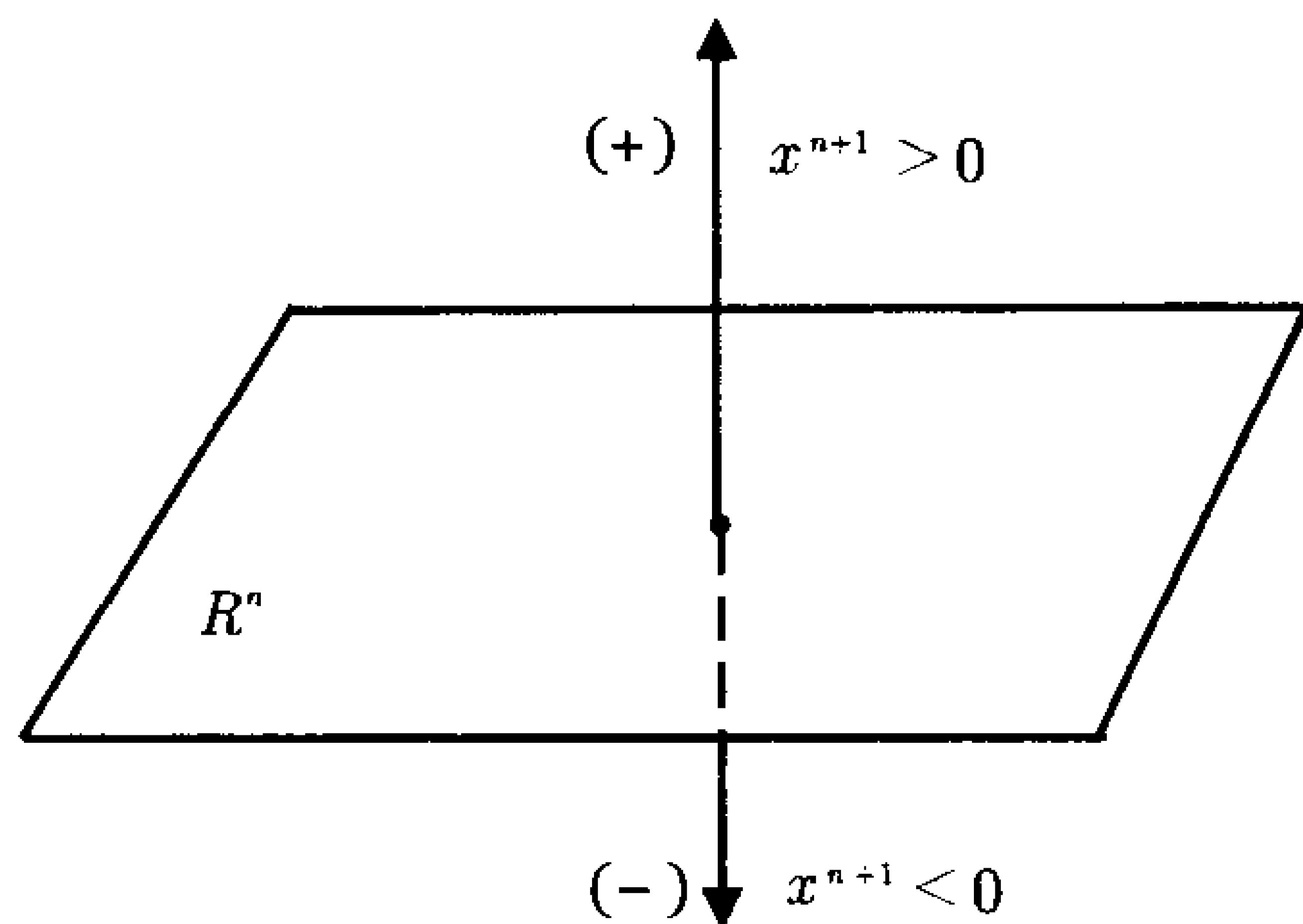


图 2.7 R^n上表面为正定向(+),下表面为负正向(−)

然而，数学的严格定义必须从 R^n 自身特征考虑，就是由 R^n 坐标系来确定. 给定 R^n 一个坐标系 $X = (x_1, \cdots, x_n)$, 并令其代表 R^n 的正定向，则任一坐

标系 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 与 X 之间有如下关系

$$Y=AX,\quad A\text{为一个 } n\times n \text{ 阶可逆矩阵}.$$

若 $\det A>0$, 则 Y 代表 R^n 正定向，当 $\det A<0$, 则 Y 代表负定向. 也就是说，在 R^n 上，将所有坐标系分为两类：一类定义在 R^n 正定向，另一类为负定向.

一个 n 维球面 S^n 同胚于 $R^n+\{\infty\}$, 这里 $\{\infty\}$ 为无穷远点. 将 R^n 的定向视为 $S^n=R^n+\{\infty\}$ 的定向时，就赋予了 S^n 的一个定向. 直观上就是 $S^n\subset R^{n+1}$ 将R^{n+1} 分为两个部分： S^n 所围的球体内部和球体外部. S^n 的外面为正定向，内面为负定向.

现在回过来看 S^n 上的映射 $f:R^n+\{\infty\}\to R^n+\{\infty\}$, 且 $f(\infty)=\infty$. 由反函数定理，对 $x_0\in R^n$, 若 $\det Df(x_0)>0$, 则 f 将 x_0 的某个邻域 U 映到 $f(x_0)$ 在 S^n 的一个邻域 V 上，并保持定向不变，若 $\det Df(x_0)<0$, 则 f 将 U 反定向地映到 V 上.

图2.6 很好地反映了一个映射 f 保定向与反定向的几何特征. 在图 2.6 中，映射 f 将 Ω_1 和 Ω_3 的上表面分别映到 $\Omega_1'+\Omega_2'$ 和 $\Omega_2'+\Omega_3'$ 的上表面上，而将 Ω_2 的下表面映到 Ω_2' 的上表面上. 因而 f 在 Ω_1 和 Ω_2 上是保定向的，在 Ω_2 上是反定向的.

用数学语言表达图 2.6 所示现象就是

$$\det Df(x)\begin{cases}>0, & x\in\Omega_1+\Omega_3,\\ =0, & x\in l_1+l_2,\\ <0, & x\in\Omega_2.\end{cases}$$

再来考察图 2.6 所示映射 f 的形变. 在 f 映射下区域 Ω_2' 被折叠地覆盖三次，其中两次是正向覆盖，一次是反向覆盖. 如果视正向覆盖与反向覆盖相抵消，那么 Ω_2' 本质上被正向地覆盖一次. 这一事实可用映射的形变来说明. 图 2.8 表明，区域 Ω 能够被连续地拉平而无折叠地正向覆盖 Ω' 一次，也就是说，可以从 f 连续地形变到映射 g, g 将 Ω 保定向地映射到 Ω'.

这种连续地从一个有折叠的覆盖拉平为无折叠的覆盖过程在数学上称为从 f 到 g 的同伦. 更严格地，同伦有下面的数学定义.

定义 2.3　令 X,Y 是两个拓扑空间， f 和 $g:X\to Y$ 是两个连续映射. 一个连续映射

$$H:X\times[0,1]\to Y$$

称为是从 f 到 g 的一个同伦，如果

$$H(x,0)=f(x),\quad H(x,1)=g(x),\quad \forall x\in X.$$

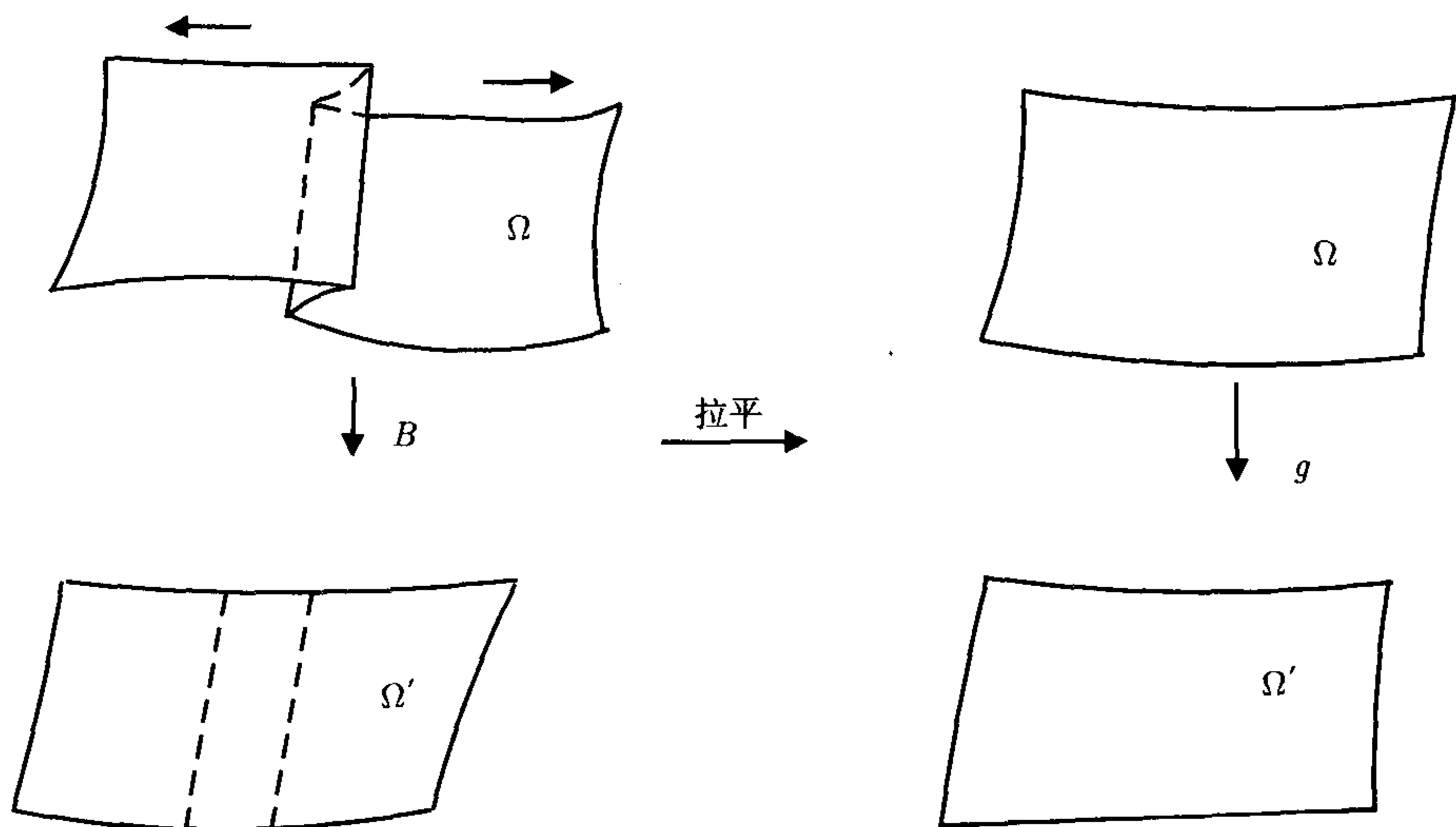


图 2.8

再观察映射 $f: S^n \to S^n$ 的同伦特征. 在图 2.9 中, 映射 f_1 将每一个包围 x_0 点的 $n-1$ 维闭曲面保定向地映到一个包围 $y_0 = f_1(x_0)$ 点的 $n-1$ 维闭曲面上, 即 f_1 是一个保向地将 S^n 覆盖到 S^n 上一次的映射. 而在图 2.10 中, f_2 将每个包围 x_0 点的闭曲面保向地映到两个包围 $y_0 = f_2(x_0)$ 点的闭曲面上, 即 f_2 是一个保向覆盖 S^n 两次的映射. 从直观上我们能够观察到, 图 2.10 中的两次保向覆盖映射 f_2 无法在 S^n 上通过连续形变到一次覆盖映射 f_1, 这就是说, f_2 与 f_1 是不同伦的.

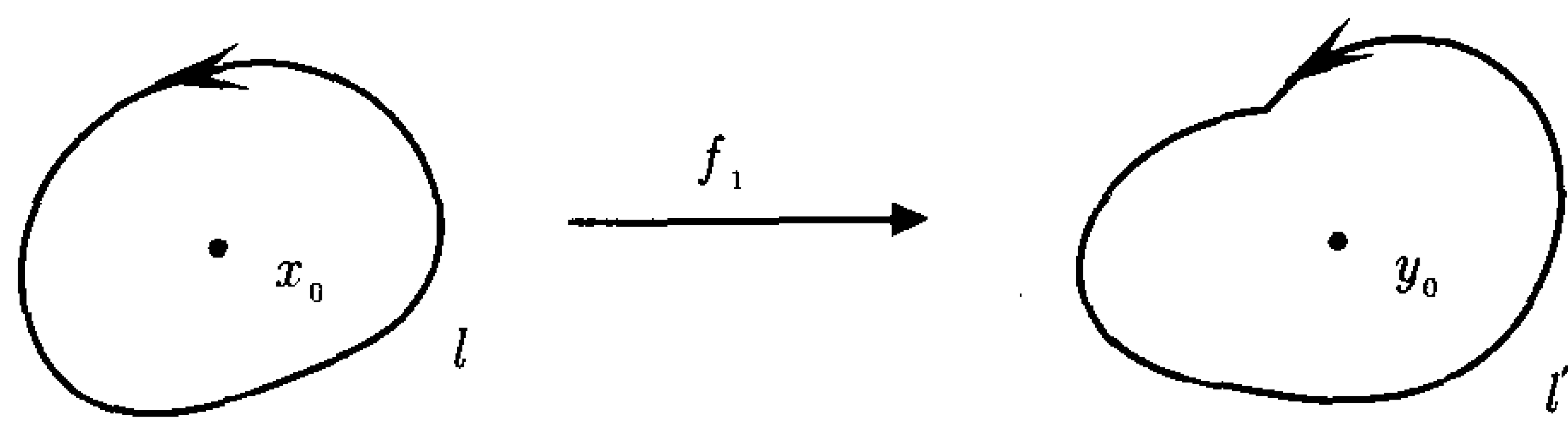


图 2.9 $f(l) = l'$

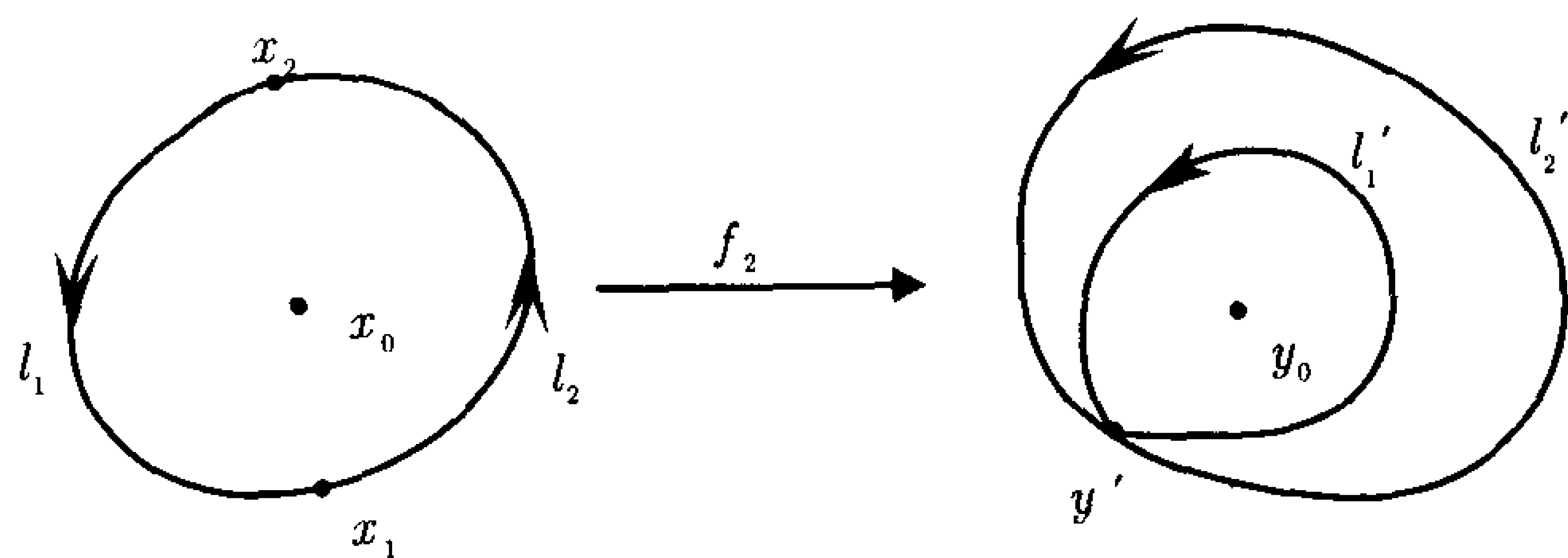


图 2.10 $f(l_1) = l_1', f(l_2) = l_2', f(x_1) = f(x_2) = y'$

可见，球面上一个映射 f 的覆盖数表征了该映射的同伦类，即如果 $f,g: S^n \to S^n$ 是同伦的 $f \sim g$, 则 f 将 S^n 覆盖到 S^n 数目与 g 相同，这里，如果 f 是保定向的，则覆盖数为正，若是反定向的则为负. 如果 $f(S^n)$ 在 S^n 上可缩到一点上，则覆盖数为零.

这样，对于一个球面映射 $f: S^n \to S^n$, 我们从几何直观上介绍了覆盖数的概念，这个概念在数学上就称为 Brouwer 映射度，记为

$$\deg(f) = k,$$

k 是一个整数代表 f 的覆盖数. 覆盖数的概念可以推广到一般映射 $f: M \to N$, 这里 M 和 N 是两个 n 维可定向闭紧流形，或可定向无边紧流形.

上面对 Brouwer 映射度的介绍不符合数学的严格性要求，它只是帮助我们理解映射度的概念. 一般闭紧流形上映射度概念最早由 L. E. J. Brouwer 在 1912 年提出，其严格的定义需要用到同调群的概念. 下面给出严格的数学定义.

定义 2.4 令 M, N 为两个可定向 n 维闭紧流形，$f: M \to N$ 为连续映射. $\alpha \in H_n(M)$ 和 $\beta \in H_n(N)$ 分别为 M 和 N 的 n 维同调群生成元. 则有 $f_*(\alpha) = k\beta$, 其中 k 为整数，定义为 f 的映射度，记为

$$k = \deg(f),$$

这里 $f_*: H_n(M) \to H_n(N)$ 为 f 的诱导同态.

对于流形上映射度有如下定理.

定理 2.5 令 M, N 为两个 n 维可定向闭紧流形， $f, g: M \to N$ 为连续映射，若 f 与 g 是同伦的，则

$$\deg(f) = \deg(g).$$

§2.2.4 Brouwer 度 —— 拓扑方法

给出流形上映射度的概念后，就可以用拓扑方法讨论 Brouwer 度理论.

令 $\Omega \subset R^n$ 为有界开集， $F: \Omega \to R^n$ 为连续映射. 不失一般性，考虑 $p = 0 \in R^n$ 的情况. 下面对 $(f, \Omega, 0)$ 用拓扑方法引入 Brouwer 度概念.

令 $\partial\Omega = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{m} \Gamma_i$, 这里每个 $\Gamma_i (0 \leqslant j \leqslant m)$ 为 $\partial\Omega$ 的连通分支，而且 $\Gamma_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 在 Γ_0 的内部，如图 2.11 所示.

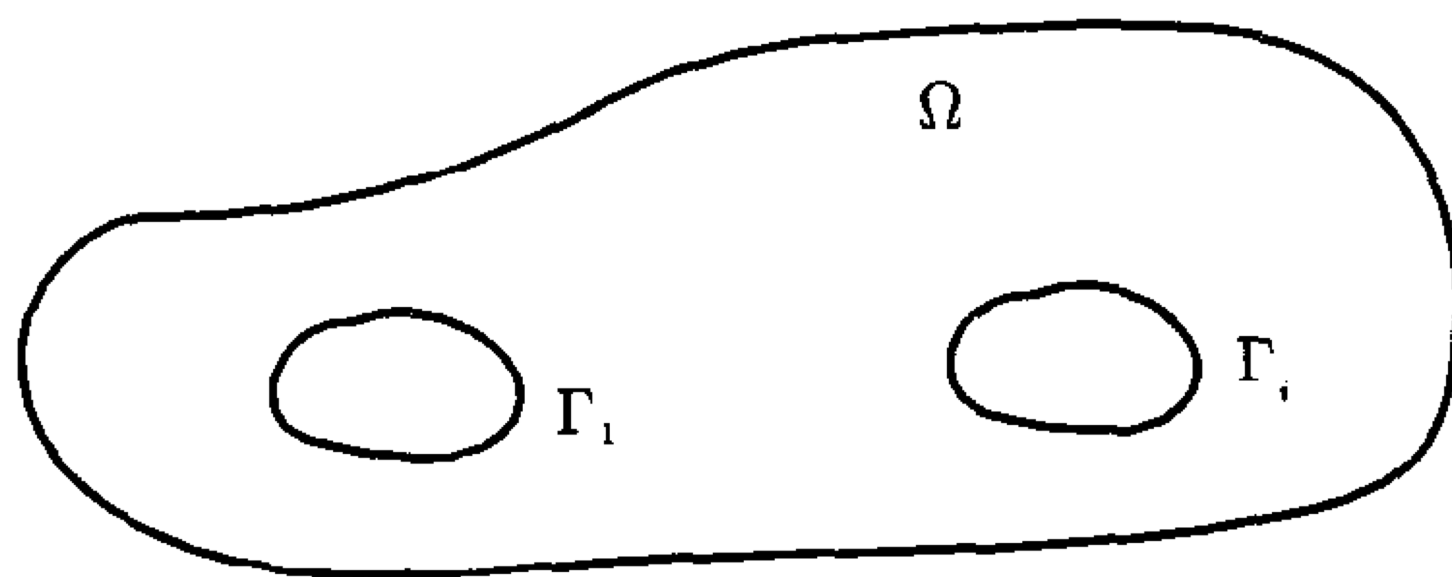


图 2.11

假设 $0 \notin F(\partial\Omega)$, 则由映射 F 可诱导出从 $\partial\Omega$ 到以 $p=0$ 为中心的单位球面 S^{n-1} 上映射 $f:\partial\Omega\to S^{n-1}$ 如下:

$$\begin{cases} f_i:\Gamma_i\to S^{n-1}, & 0\leqslant i\leqslant m, \\ f_i=\dfrac{F(x)}{\| F(x)\|}, & x\in\Gamma_i. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

定义 2.5 令 $0\notin F(\partial\Omega)$, 则对 $(F,\Omega,0)$ 定义 Brouwer 度为

$$\deg(F,\Omega,0)=\deg(f_0)-\sum_{i=1}^{m}\deg(f_i),$$

这里 f_i 由 (2.2.9) 定义, $\deg(f_i)$ 如定义 2.4.

这里必须说明一下，有限开集 $\Omega\subset R^n$ 的边界 $\partial\Omega$ 不一定是流形，但是 $\partial\Omega$ 是可定向的有限闭单复形，因而映射度概念在 $\partial\Omega$ 上仍有效.

下面分几种情况讨论 Brouwer 度的实在意义.

情况 1. 当 Ω 同胚于一个 n 维球体时，不失一般性，考察 $\Omega=B_R(x_0)$ 是一个以 x_0 为中心 R 为半径球体. 设 $F(x_0)=0$, 且 F 在 $B_R(x_0)$ 中只有唯一零点 x_0.

在这种情况下， F 可诱导出一族球面映射:

$$f_r:S^{n-1}\to S^{n-1},\quad 0<r\leqslant R, \tag{2.2.10}$$

这里

$$f_r(\theta)=\frac{F(r,\theta)}{\| F(r,\theta)\|},\quad \theta\in S^{n-1},$$

其中 $(r,\theta)\in B_R(x_0)$ 为球坐标. 换句话说， $\bar{B}_R(x_0)$ 是由 x_0 点及一族半径为 $r(0<r\leqslant R)$ 的同心球面 S_r^{n-1} 构成. 式 (2.2.10) 表明 f_R 与 $f_r(0<r\leqslant R)$ 是同伦的，因而由定理 2.5 得

$$\deg(F,\Omega,0)=\deg(f_r)=k,\quad \forall 0<r\leqslant R.$$

我们知道 $k=\deg(f_r)$ 的意义就是 f 将每个同心球面 $S_r^{n-1}\subset\bar{B}_R(x_0)$ k 次覆盖到一个包围 $p=0$ 点的曲面 Σ_r 上 ($\Sigma_r\to 0$, 当 $r\to 0$). 因此， $(F,\Omega,0)$ 的拓扑度实质上就是 F 将 $B_R(x_0)$ k 次覆盖地映到 $p=0$ 的一个邻域上.

当 $p=0$ 是 $F:B_R(x_0)\to R^n$ 的正则值时, 从上一节的分析可知 $f_r:S^{n-1}\to S^{n-1}(0<r\leqslant R)$ 的覆盖数为 1 或者 -1 等价于 $\det DF(x_0)>0$ 或者 <0, 即

$$\deg(F,B_R,0)=\deg(f_r)=\begin{cases} 1, & \det DF(x_0)>0, \\ -1, & \det DF(x_0)<0. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

情况 2.　$\Omega = B_r(x_0)$ 及 $p = 0 \notin F(\Omega)$. 在这种情况下, 由图 2.12 可以看出, 由 (2.2.9) 定义的 F 的归一化映射 f 的像 $f(\Omega)$ 在 S^n 上可缩为一点. 因而有

$$\deg(F, \Omega, 0) = \deg(f) = 0.$$

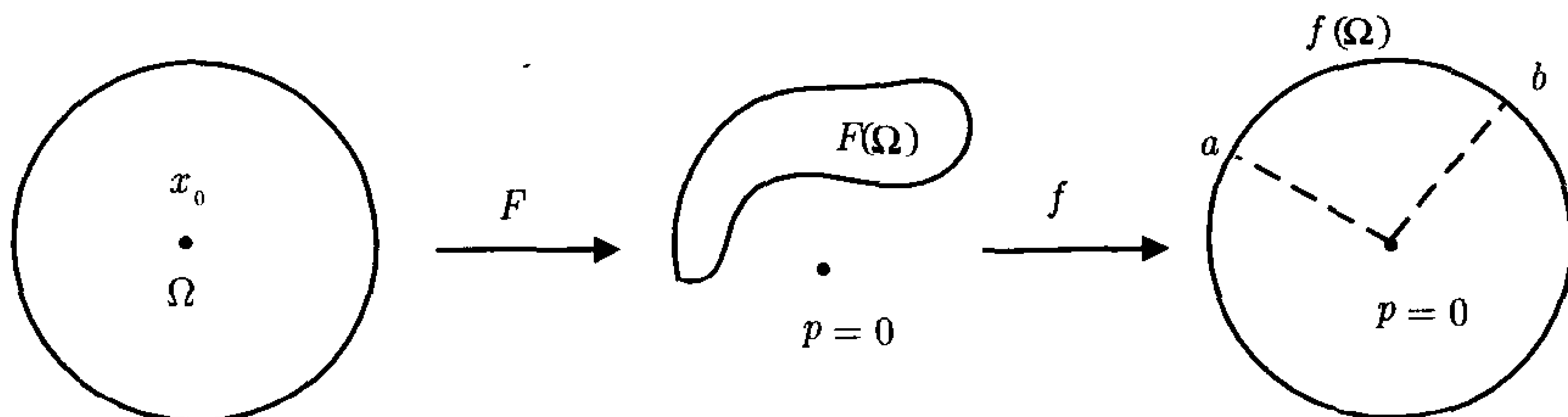


图 2.12　$\widehat{ab} = f(\Omega)$

情况 3.　Ω 的边界 $\partial\Omega$ 只有一个连通分支,并且 Ω 可分解为 $\Omega = \cup_{k=1}^m \bar{B}_k, B_i \cap B_j = \varnothing$, 每个 B_k 同胚于一个开球体.

对于这种情况, 当 $B_i \cap B_j = \Gamma \neq \varnothing$ 时 ,Γ 在 ∂B_i 的定向与它在 ∂B_j 上的定向相反, 如图 2.13 所示. 若 $p = 0 \notin F(\partial\Omega)$ 时, 则 F 的诱导映射 $f : \partial\Omega \to S^{n-1}$ 的覆盖数为

$$\deg(f) = \sum_{k=1}^m \deg(f_k).$$

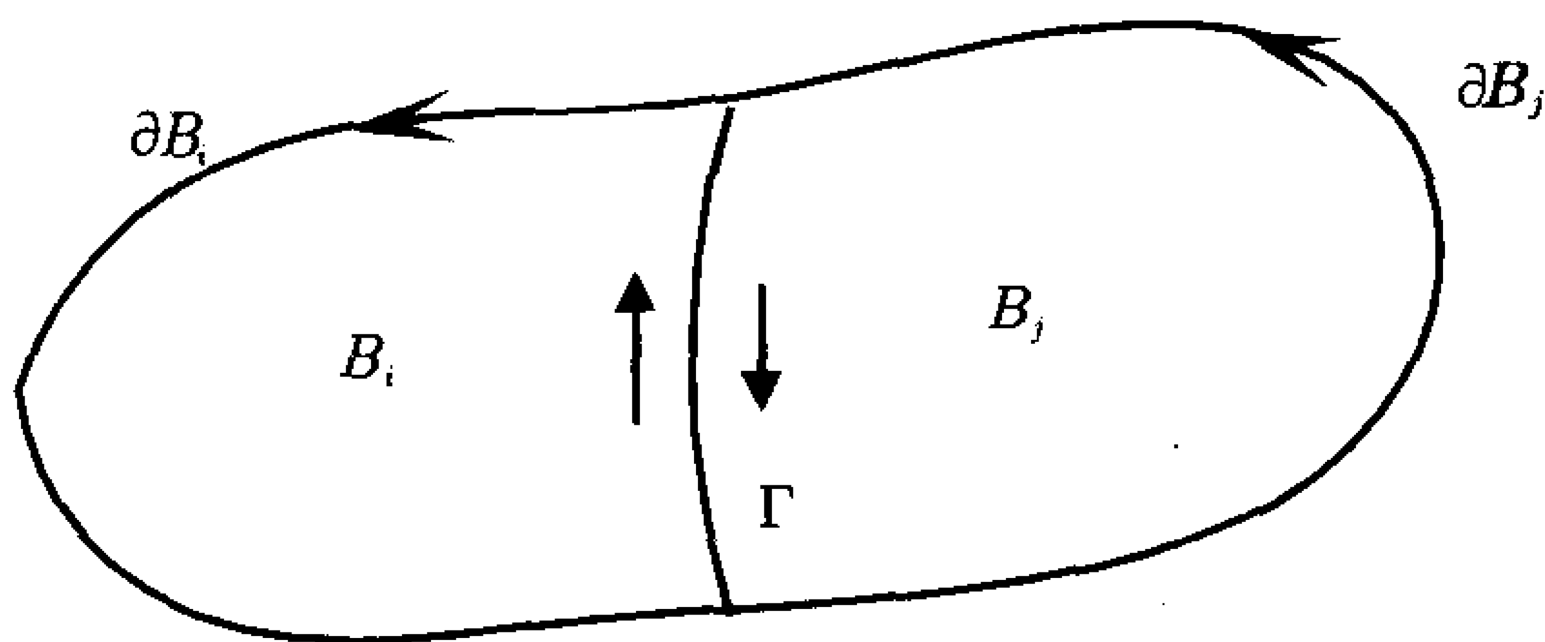


图 2.13

由定义 2.5, 这个等式意味着

$$\deg(F, \Omega, 0) = \sum_{k=1}^m \deg(f_k) = \sum_{k=1}^m \deg(F, B_k, 0), \tag{2.2.12}$$

这里 $f_k : \partial B_k \to S^{n-1}$ 定义为

$$f_k(x) = \frac{F(x)}{\| F(x) \|}, \qquad x \in \partial B_k.$$

情况 4.　$\Omega \subset R^n$ 为任一有界开集. 令 $\partial\Omega = \Gamma_0 + \sum_{j=1}^m \Gamma_j$, 其中 $\Gamma_j (1 \leqslant j \leqslant m)$ 在 Γ_0 的内部,　$\Omega = \cup_{k=1}^N \bar{B}_k, B_i \cap B_j = \varnothing$, 每个 B_k 同胚于一个开球体.

记 $D=\Omega+\sum_{j=1}^{m}\Omega_j$，其中 Ω_j 是由 Γ_j 所围区域. 令 $\widetilde{F}$ 是 F 从 $\bar{\Omega}$ 到 $\bar{D}$ 的连续延拓，则 D 如情况 3, 其边界 $\partial D=\Gamma_0$. 由 (2.2.12) 式有

$$\deg(\widetilde{F},D,0)=\sum_{j=1}^{N}\deg(F,B_j,0)+\sum_{i=1}^{m}\deg(\widetilde{F},\Omega_i,0).$$

因而得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\deg(F,B_j,0)&=\deg(\widetilde{F},D,0)-\sum_{i=1}^{m}\deg(\widetilde{F},\Omega_i,0)\\&=\deg(\widetilde{f})-\sum_{i=1}^{m}\deg(\widetilde{f}_i)\ (\text{由定义 } 2.5).\end{aligned}$$

由于 $F=\widetilde{F}$ 在 $\Gamma_0=\partial D$ 和 $\Gamma_i=\partial\Omega_i$ 上，因而

$$\deg(\widetilde{f})=\deg(f_0),\quad \deg(\widetilde{f}_i)=\deg(f_i).$$

于是得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\deg(F,B_j,0)&=\deg(f_0)-\sum_{i=1}^{m}\deg(f_i)\\&=\deg(F,\Omega,0)\ \ (\text{由定义 } 2.5),\end{aligned}$$

即

$$\deg(F,\Omega,0)=\sum_{j=1}^{N}\deg(F,B_j,0). \tag{2.2.13}$$

当 $p=0$ 是 F 的正则值时，取 F 的零点在这些开球 $B_j(1\leqslant j\leqslant N)$ 中，则由 (2.2.11) 和情况 2 及 (2.2.13) 得到

$$\deg(F,\Omega,0)=\sum_{x\in F^{-1}(0)}\text{sign}\ \det DF(x). \tag{2.2.14}$$

从上述各种情况可以看出，映射 $f:\Omega\to R^n$ 在点 $p\in R^n$ 的拓扑度实在本质就是 f 将 Ω 映到 p 邻域上的覆盖数. 特别地，从公式 (2.2.13) 可以看到 f 在 Ω 上的覆盖数等于 f 在 Ω 上所有球体 $B_j(1\leqslant j\leqslant N)$ 上覆盖数的代数和. 从公式 (2.2.14) 可知关于拓扑度的定义，分析方法与拓扑方法是等价的.

§2.2.5 Brouwer 度的基本性质

从 Brouwer 度的定义、定理 2.5 及公式 (2.2.13) 直接得到下面拓扑度的三条基本性质. Brouwer 度的其他所有重要性质都可以从这三条基本性质推出.

定理 2.6 令 $\Omega \subset R^n$ 为一有界开集, $F: \bar{\Omega} \to R^n$ 连续, $p \notin F(\partial\Omega)$. 则 Brouwer 度 $\deg(F, \Omega, p)$ 有如下三个基本性质:

(1) 规范性.

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & p \in \Omega, \\ 0, & p \notin \Omega. \end{cases}$$

(2) 区域可加性. 若 Ω_1, Ω_2 为 Ω 中两个不相交的开子集, 且 $p \notin F(\bar{\Omega}/(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, 则

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(F, \Omega_1, p) + \deg(F, \Omega_2, p).$$

(3) 同伦不变性. 设 $H: \bar{\Omega} \times [0,1] \to R^n$ 连续, 又设 $p: [0,1] \to R^n$ 连续, 且 $p(t) \notin H(\partial\Omega, t), \forall 0 \leqslant t \leqslant 1$. 若 $H(x,0) = F(x), H(x,1) = G(x), x \in \bar{\Omega}$, 则有

$$\deg(F, \Omega, p_0) = \deg(G, \Omega, p_1),$$

这里 $p_0 = p(0), p_1 = p(1)$.

应用定理 2.6 直接推出如下结果.

定理 2.7 Brouwer 度具有如下重要性质:

(1) Kronecker 存在性定理. 如果 $\deg(F, \Omega, p) \neq 0$, 则方程 $F(x) = p$ 在 Ω 内一定有解;

(2) 切除性质. 如果 $D \in \bar{\Omega}$ 是一个闭集, 且 $p \notin F(D)$, 则

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(F, \Omega/D, p);$$

(3) 连通区域性质. 令 $p: R^1 \to R^n$ 连续, 对所有 $t \in R^1, p(t) \notin F(\partial\Omega)$, 有

$$\deg(F, \Omega, p(t)) = 常数;$$

(4) 边界性质. 若 $F, G \in C(\bar{\Omega}, R^n)$ 及 $F|_{\partial\Omega} = G|_{\partial\Omega}$, 则

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(G, \Omega, p);$$

(5) Poincare-Bohl 定理. 令 $F, G \in C(\bar{\Omega}, R^n)$. 若

$$tF(x) + (1-t)G(x) \neq p, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

则有

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(G, \Omega, p);$$

(6) 锐角原理. 令 $0 \in \Omega$, 并且内积

$$\langle F(x), x \rangle > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

则有

$$\deg(F, \Omega, 0) = 1.$$

§2.2.6 Brouwer 度的主要定理

在这里介绍 Brouwer 度的四个基本定理，它们在后面的讨论中将是有用的. 这四个定理是约化定理、乘积定理、 Borsuk 定理和偶映射定理.

定理 2.8(约化定理) 令 $R^m \subset R^n(n > m), \Omega \subset R^n$ 是一个有界开集, $g \in C(\bar{\Omega}, R^m)$. 如果 $p \bar{\in} F(\partial\Omega)$, 这里 $F = id - g$, 那么有

$$\deg(F, \Omega, p) = \deg(G, \Omega \cap R^m, p), \tag{2.2.15}$$

其中 $G = F|_{\Omega \cap R^m}$.

证明 为了简单，只考虑 p 是 $G : \Omega \cap R^m \to R^m$ 的正则值情况，否则取 C^1 正则函数逼迫 G 即可. 由

$$F(x) = (G_1(x), \cdots, G_m(x), x_{m+1}, \cdots, x_n)$$

我们知道

$$DF(x) = \begin{pmatrix} DG(x) & * \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

其中 I 为 $(n-m) \times (n-m)$ 阶恒等矩阵. 因而有

$$\det DF(x) = \det DG(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

这样，由拓扑度定义得到 (2.2.15). 定理得证.

约化定理在直观上比较清楚： G 映 $\widetilde{\Omega} \subset R^m$ 到 p 的一个邻域 $V \subset R^m$ 上，覆盖数等于 $G \oplus id = F$ 将柱体 $\Omega = \widetilde{\Omega} \times (-1, 1)$ 映到 $V \times (-1, 1)$ 上的覆盖数.

定理 2.9(乘积定理) 令 $\Omega, D \subset R^n$ 是有界开集, $F \in C(\bar{\Omega}, R^n), G \in C(\bar{D}, R^n)$, 且 $F(\Omega) \subset D$. 令 D_k 是 $D/F(\partial\Omega_1)$ 的连通区域, 如果 $\phi \notin G \circ F(\partial\Omega) \cup G(\partial D)$, 那么

$$\deg(G \circ F, \Omega, p) = \sum_k \deg(G, D_k, p)\deg(F, \Omega, p_k),$$

其中 $p_k \in D_k$. 由连通区域性质 $\deg(F, \Omega, p_k)$ 与 p_k 无关.

证明 令 $G^{-1}(p) \subset \cup_{k=1}^N D_k, \Omega_k = F^{-1}(D_k)$, 这里 D_k 为连通开集. 由区域可加性得

$$\deg(G \circ F, \Omega, p) = \sum_{k=1}^N \deg(G \circ F, \Omega_k, p).$$

只需证明

$$\deg(G \circ F, \Omega_k, p) = \deg(G, D_k, p)\deg(F, \Omega_k, p_k). \tag{2.2.16}$$

令 $f:\partial\Omega_k \to \partial B_r(p_k), g:\partial B_r(p_k) \to \partial B_r(p)$ 分别为 F 和 G 类似 (2.2.9) 的诱导映射，其中 $B_r(x)$ 是以 x 为中心 r 为半径球体．由定义 2.5 得

$$\deg(G\circ F, \Omega_k, p) = \deg(f\circ g),$$

$$\deg(F, \Omega_k, p_k) = \deg(f),$$

$$\deg(G, D_k, p) = \deg(g).$$

由同调映射的乘积法，则

$$(G\circ F)_* = G_*\circ F_* : H_n(\partial\Omega_k) \to H_n(\partial B_r),$$

得到

$$\deg(g\circ f) = \deg(g)\cdot\deg(f),$$

即 $f\circ g$ 将 $\partial\Omega_k$ 映到 $\partial B_r(p)$ 的覆盖数等于 g 映 $\partial\Omega_k$ 到 $\partial B_r(p_k)$ 覆盖数与 f 映 $\partial B_r(p_k)$ 到 $\partial B_r(p)$ 覆盖数的乘积．这样就证得 (2.2.16) 式.

定理 2.10(Borsuk 定理) 令 $\Omega\subset R^n$ 是一个有界开集，$0\in\Omega, F\in C(\bar{\Omega}, R^m)$. 如果 Ω 关于 $x=0$ 是对称的，即 $x\in\Omega\Rightarrow -x\in\Omega$, 并且

$$F(-x) = -F(x) \neq 0, \quad \forall x\in\partial\Omega,$$

则 $\deg(F,\Omega,0) =$ 奇数.

证明 由拓扑度的边界性质，不妨设 $F:\Omega\to R^n$ 为奇映射．为了简单，设 F 为 C^1 映射，而且 $P=0$ 是 F 的正则值．此时有

$$\deg(F,\Omega,0) = \text{sign}\ \det DF(0) + \sum_{x\in F^{-1}(0),\ x\neq 0} \text{sign}\ \det DF(\pm x).$$

由于 F 是奇函数，故 $DF(x)$ 关于 x 是偶函数，即

$$DF(x) = DF(-x).$$

因而

$$\deg(F,\Omega,0) = \text{sign}\ \det DF(0) + 2\sum_{\pm x\in F^{-1}(0),\ x\neq 0} \text{sign}\ \det DF(x)$$

是一个奇数．定理证毕.

定理 2.11(偶映射定理) 令 $\Omega\subset R^n$, 如定理 2.10, $F\in C(\bar{\Omega}, R^n)$ 是偶映射： $F(x) = F(-x)\neq 0, \forall x\in\partial\Omega$. 则有

$$\deg(F,\Omega,0) = \text{偶数}.$$

证明 为了简单，取 $F:\Omega\to R^n$ 是 C^1 偶映射. 令 $p\in R^n$ 及 $|p|>0$ 充分小，使得 p 是 F 正则值，则

$$\deg(F,\Omega,0)=\deg(F,\Omega,p)=\sum_{x\in F^{-1}(p)}\text{sign }\det DF(\pm x).$$

因为 F 为偶函数， $DF(-x)=-DF(x)$, 并且

$$\det DF(-x)=\begin{cases}-\det DF(x), & n=\text{奇数},\\ \det DF(x), & n=\text{偶数},\end{cases}$$

故有

$$\deg(F,\Omega,0)=\begin{cases}0, & \text{当 } n=\text{奇数},\\ 2\displaystyle\sum_{\pm x\in F^{-1}(p)}\det DF(x), & \text{当 } n=\text{偶数}.\end{cases}$$

定理得证.

§2.2.7 Leray-Schauder 度

Leray-Schauder 度是 Brouwer 度到无穷维 Banach 空间上全连续场的推广. 令 X 是一个 Banach 空间， $\Omega\subset X$ 是一个有界开集. 一个映射 $F:\Omega\to X$ 称为紧映射或者全连续映射，若 F 是连续的，并且映 Ω 的任何子集到 X 中的一个相对紧集上.

当 $F:\Omega\to X$ 是一个紧映射时，定义下面映射为一个全连续场

$$f=id-F:\Omega\to X.$$

我们知道，对于一个全连续映射 F, 存在有限维空间 $X_n\subset X$ 及连续映射 $F_n:\Omega\to X_n$, 使得

$$\sup_{x\in\Omega}\|F(x)-F_n(x)\|\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty. \tag{2.2.17}$$

定义 2.6 令 $X_n\subset X$ 是有限维空间， $p\in X_n$, 且 $F_n:\bar\Omega\to X_n$ 满足

$$\sup_{x\in\bar\Omega}\|F(x)-F_n(x)\|<\text{dist}(p,f(\partial\Omega)),$$

那么对全连续场 $f=id-F$, 在 Ω 上关于 $p\in X$ 定义 Leray-Schauder 度

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f_n,\Omega_n,p),$$

这里 $f_n=id-F_n,\Omega_n=\Omega\cap X_n$.

由 Brouwer 度的同伦不变性和 (2.2.17), 可以不困难地证明，存在 $N > 0$ 充分大，使得对一切 $n > N$, Brouwer 度 $\deg(f_n, \Omega_n, p)$ 是一个常值，而且与 X_n 和 F_n 的选择无关. 因而 Leray-Schauder 度被很好地定义.

对于 Leray-Schauder 度同样有下面三个基本性质.

定理 2.12　对于一个全连续场 $f = id - F$, Leray-Schauder 度有如下三个基本性质:

(1) 规范性.

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & p \in \Omega, \\ 0, & p \notin \Omega. \end{cases}$$

(2) 区域可加性. 如果 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi, p \notin f(\bar{\Omega}/(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, 那么

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p).$$

(3) 同伦不变性. 令 $H : \bar{\Omega} \times [0,1] \to X$ 是一个紧映射,

$$h(x,t) = x - H(x,t), \qquad 且\ p \notin h(\partial\Omega, t), \qquad \forall t \in [0,1].$$

则有

$$\deg(h_0, \Omega, p) = \deg(h_1, \Omega, p),$$

这里 $h_0 = id - H(\cdot, 0), h_1 = id - H(\cdot, 1)$.

同样地，对于全连续场的 Leray-Schauder 度定理 2.7, 乘积定理及 Borsuk 定理也成立. 这里不再赘述.

§2.2.8　孤立奇点的指标

考虑下面方程

$$f(x) = x - F(x) = 0, \tag{2.2.18}$$

其中 $F : \Omega \to X$ 是一个紧算子. 方程 (2.2.18) 的解被称为算子 f 的奇点.

令 $x_0 \in \Omega$ 是 (2.2.18) 的一个孤立解. 定义 $f = id - F$ 在奇点 x_0 的指标为

$$\mathrm{ind}(f, x_0) = \deg(f, U, 0),$$

这里 U 是 x_0 的一个小邻域.

若 $F : \Omega \to X$ 是一个可微紧算子，则 F 在 $x_0 \in \Omega$ 的导算子

$$DF(x_0) : X \to X$$

是一个线性紧算子. 由 Riesz-Schauder 理论，下面特征方程的谱是由特征值构成的，即

$$x = \lambda DF(x_0)x, \tag{2.2.19}$$

并且 (2.2.19) 的每个特征值都是孤立的. 其代数重数, 即下面空间的维数, 是有限的.

$$E_\lambda = \cup_{n=1}^{\infty}\{y \in X|(id - \lambda DF(x_0))^n y = 0\}.$$

下面指标定理在分歧理论中是非常重要的.

定理 2.13 令 $x_0 \in \Omega$ 是全连续场 $f = id - F$ 的一个奇点, 并且 F 在 x_0 点是可微的. 如果 $\lambda = 1$ 不是 $DF(x_0)$ 的特征值, 则 x_0 是 f 的一个孤立奇点, 并且

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{ind}(id - DF(x_0), 0) = (-1)^k,$$

这里 k 是 $DF(x_0)$ 在 (0,1) 内所有实特征值代数重数之和.

定理 2.13 实在意义分析: 因为 F 能被有限维映射 $F_n : \Omega_n \to X_n$ 逼近. 因而 $DF(x_0)$ 也被 $DF_n(x_0)$ 逼近. 这样, $DF_n(x_0)$ 的 n 个特征值 (计入重数) 逼近 $DF(x_0)$ 特征值中的 n 个, 记 $DF(x_0)$ 的所有特征值 (计入重数) 为

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m, \cdots, \quad |\lambda_m| \to \infty, \quad m \to \infty.$$

令 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in (0,1)$ 是 $DF(x_0)$ 所有在区域 (0,1) 中的实特征值, 则当 n 充分大时, $DF_n(x_0)$ 的所有特征值

$$\lambda_1^n, \cdots, \lambda_k^n, \lambda_{k+1}^n, \cdots, \lambda_n^n$$

在区域 (0,1) 内的实特征值为

$$\lambda_1^n, \cdots, \lambda_k^n \in (0,1).$$

因而 $f_n = id - DF_n(x_0)$ 的所有负特征值为

$$1 - \frac{1}{\lambda_1^n}, \quad \cdots, \quad 1 - \frac{1}{\lambda_k^n} < 0.$$

故由拓扑度的定义得

$$\begin{aligned}
\text{ind}(f, x_0) &= \text{ind}(f_n, x_0) \\
&= \text{sign } \det Df_n(x_0) \\
&= \text{sign}\Pi_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{\lambda_i^n}\right) \\
&= (-1)^k.
\end{aligned}$$

这里用到矩阵行列式的基本性质

$$\det A = \Pi_{j=1}^n \eta_j,$$

其中 $\eta_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是矩阵 A 的所有特征值.

需要强调指出，Leray-Schauder 度理论对下面一类非线性算子也是有效的．这一类算子实质上是全连续场的一种变形，它们是微分方程中许多问题的抽象形式．

令 X 和 X_1 是两个 Banach 空间，$X_1 \subset X$ 是一个紧的稠密包含，$A: X_1 \to X$ 是一个线性同胚，$G: X_1 \to X$ 是一个紧算子．假设 A 有一个特征值序列

$$\begin{cases} Ae_k = \lambda_k e_k, \\ 0 < \mathrm{Re}\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\lambda_k \leqslant \cdots, \\ \mathrm{Re}\lambda_k \to \infty \quad ,\text{当 } k \to \infty. \end{cases}$$

对下面算子

$$A + G: \bar{\Omega} \to X, \quad \Omega \subset X_1\text{为一有界开集} \tag{2.2.20}$$

也能定义 Leray-Schauder 度，使其满足区域可加性、同伦不变性及如下规范性

$$\deg(A, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{若 } p \in A(\Omega), \\ 0, & \text{若 } p \notin A(\Omega). \end{cases}$$

仍然称算子 (2.2.20) 为全连续场．在 §1.2.2 中介绍了如何将一个微分方程转化为一个抽象算子的过程．

§2.3　线性算子半群

§2.3.1　动机

从一个简单的例子开始．考虑下面问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u - u^3 + f(x), x \in (0,1) \subset R^1, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{2.3.1}$$

这里 $u(x,t)$ 是未知函数，$a(x), f(x) \in C[0,1]$ 为给定函数．

对于 (2.3.1) 这个例子，需要做两件事．首先给出方程 (2.3.1) 的抽象形式，以便理解为什么要在抽象 Banach 空间上研究算子理论，以及这些理论中各种抽象条件在具体问题中对应着什么性质；其次给出方程 (2.3.1) 线性算子半群的具体形式，以便把握线性算子半群抽象理论的实质．令

$$H_1 = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1),$$

$$H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(0,1),$$
$$H = L^2(0,1),$$

这里 $H_0^1(0,1), H^2(0,1)$ 是通常的 Sobolev 空间， $L^2(0,1)$ 为区间 (0,1) 上所有 Lebesgue 平方可积函数空间.

$H_1 \subset H_{\frac{1}{2}} \subset H$ 是紧的稠密包含. 定义映射 $L = -A + B : H_1 \to H$ 和 $G : H_1 \to H$ 如下：

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad Bu = a(x)u, \quad Gu = -u^3 + f. \tag{2.3.2}$$

这样，方程 (2.2.20) 转化为下面抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + Gu, \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

其稳态方程为

$$Lu + Gu = 0.$$

算子 A, B 和 G 满足下面性质：

$$\begin{cases} A : H_1 \to H \text{是一个线性同构}, \\ B : H_{\frac{1}{2}} \to H \text{是线性紧算子}, \\ G : H_{\frac{1}{2}} \to H \text{是有界连续映射}. \end{cases}$$

现在再来考虑 (2.3.1) 的线性算子半群及其对方程 (2.3.1) 的解所起到的作用.

由 Sturm-Liouville 定理，下面特征方程存在一个无穷的实特征值序列 $\{\lambda_k\}, \lambda_k \to +\infty$, 当 $k \to \infty$ 及特征函数序列 $\{\phi_k\} \subset H_1$, 使得

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_k}{dx^2} + a(x)\phi_k = -\lambda_k\phi_k, \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3.4}$$

并且 $\{\phi_k\} \subset H$ 构成 H 的一个正交基.

令 $u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\phi_k$. 方程 (2.3.1) 能够被写成

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = -\lambda_k x_k + G_k(u), \quad k = 1, 2, \cdots, \\ x_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \tag{2.3.5}$$

其中

$$G_k(u) = \int_0^1 (-u^2 + f(x))\phi_k(x)dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x)\phi_k dx.$$

(2.3.5) 的解能够被表达为

$$x_k = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} G_k(u) d\tau.$$

这意味着 (2.3.1) 的解能够被表达为

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\varphi_k\phi_k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} G_k(u)\phi_k d\tau. \tag{2.3.6}$$

从 (2.3.6) 中发现，一族线性有界算子 $T(t): H \to H$ 定义为：$\forall \varphi \in H, \varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\phi_k$，

$$T(t)\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}\varphi_k\phi_k. \tag{2.3.7}$$

显然，(2.3.7) 定义的线性有界算子 $T(t): H \to H$ 满足下面半群性质：

$$T(0) = id : H \to H, \tag{2.3.8}$$

$$T(t+s) = T(t)\cdot T(s), \quad \forall t, s \geqslant 0, \tag{2.3.9}$$

$$\frac{dT(t)\varphi}{dt} = LT(t)\varphi, \tag{2.3.10}$$

这里算子 $L = -A + B$ 如 (2.3.2) 所定义. 这样，方程 (2.3.1) 的解 (2.3.6) 可以表示为

$$u = T(t)\varphi + \int_0^t T(t-\tau)G(u)d\tau. \tag{2.3.11}$$

更一般地，如果对抽象方程 (2.3.3) 中的线性算子 $L: H_1 \to H$ 存在一个单参数族线性有界算子 $T(t): H \to H$, 满足 (2.3.8)~(2.3.10), 则方程 (2.3.3) 的解 u 就能够表达成 (2.3.11) 的形式. 这个线性有界算子族 $T(t)$ 就称为线性算子半群.

需要指出，为了研究方程 (2.3.3) 的动力学性质，采用 (2.3.11) 的形式在许多情况下是必需的. 这就是研究算子半群的动机.

§2.3.2 强连续半群

先从一般的情况即强连续线性算子半群开始，然后再介绍解析半群.

定义 2.7 令 X 是一个 Banach 空间，$T(t): X \to X (0 \leqslant t < \infty)$ 是一单参数族线性有界算子. $T(t)$ 称为是一个强连续的线性算子半群，若

(1) $T(0) = id : X \to X$ 是恒等算子;

(2) $T(t+s) = T(t)T(s),\quad \forall t, s \geqslant 0$;

(3) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x,\quad \forall x \in X$.

令 X_1 是一个 Banach 空间, $X_1 \subset X$ 是一个稠密包含, 且 $L : X_1 \to X$ 是一个线性有界算子. 称 L 生成一个强连续算子半群 $T(t) : X \to X$, 如果

$$Lx = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} T(t)x|_{t=0},\quad \forall x \in X_1$$

此时, 算子 $L : X_1 \to X$ 也称为 $T(t)$ 的一个生成子.

下面给出 Hille-Yosida 定理.

定理 2.14 一个线性有界算子 $L : X_1 \to X$ 生成一个强连续半群 $T(t)(t \geqslant 0)$ 的充要条件是:

(1) L 是闭算子, 即若 $x_n \to x_0$ 和 $Lx_n \to y_0$ 在 X 中, 则 $x_n \to x_0$ 在 X_1 中, 且 $Lx_0 = y_0$.

(2) 存在 $\lambda_0 \geqslant 0$ 和 $c \geqslant 1$, 使得 $(\lambda_0, \infty) \in \rho(L)$, 并且

$$\| (\lambda id - L)^{-n} \| \leqslant C(\lambda - \lambda_0)^{-n},\quad \forall \lambda > \lambda_0,\quad n = 1, 2, \cdots,$$

其中 $\rho(L)$ 是 L 的予解集, 定义为

$$\rho(L) = \{\lambda \in C | (\lambda id - L)^{-1} : X \to X \text{有界}\}.$$

注 2.1 定理 2.14 是原始 Hille-Yosida 定理的变形. 原始的 Hille-Yosida 定理是如下形式.

Hille-Yosida 定理 令 L 是 X 上一个无界性算子, $D(L) \subset X$ 为 L 的定义域. $L : D(L) \to X$ 生成一个强连续算子半群的充要条件为

(1) L 是闭算子并且 $\overline{D(L)} = X$.

(2) 存在 $\lambda_0 \geqslant 0$ 及 $C \geqslant 1$, 使得

$$\|(\lambda id - L)^{-n}\| \leqslant C(\lambda - \lambda_0)^{-n},\quad \forall \lambda > \lambda_0,\quad n = 1, 2, \cdots.$$

这里, 我们采用稠密包含在 X 中的 Banach 空间 X_1 作为线性有界算子 $L : X_1 \to X$ 的定义空间, 而不是取传统的 L 定义域 $D(L) \subset X$ 的方式, 其优点在于

(1) $L : X_1 \to X$ 是闭算子这一条件, 本质上讲就蕴含着 L 是一个线性全连续场, 即 $L = -A + B$, 其中

$$\begin{cases} A : X_1 \to X \text{是线性同构}, \\ B : X_1 \to X \text{是线性紧算子}. \end{cases}$$

(2) L 是线性全连续场意味着 L 的谱是由特征值构成，其定义为

$$L\phi = \lambda\phi,$$

其中特征值 $\lambda = \alpha + i\beta \in C$, 特征向量 $\phi = \phi_1 + i\phi_2, \phi_1, \phi_2 \in X_1$. 关于线性全连续场的谱理论，更详细的介绍可见本书后面 3.1 节.

上述两个优点使得变形后的 Hille-Yosida 定理在微分方程的应用中变得更为方便, 并且其实在意义也显得清楚. 下面就来分析 Hille-Yosida 定理的实在意义.

条件 (2) 的实质蕴含着 $L: X_1 \to X$ 所有特征值 λ 实部不超过某个正常数 $\alpha > 0$,

$$\text{Re}\lambda < \alpha.$$

即

$$C_\alpha = \{\lambda_1 + i\lambda_2 \in C | \ \lambda_1 > \alpha, \quad \lambda_2 \in R^1\} \subset \rho(L).$$

事实上，线性算子 L 生成的算子半群 $T(t)$ 可以表达为如下形式

$$T(t) = e^{tL}. \tag{2.3.12}$$

当 $T(t)$ 作用在 L 的对应于 λ 的特征向量 $\phi \in X$ 时，它可具体表达为

$$T(t)\phi = \phi e^{\lambda t}. \tag{2.3.13}$$

因而，当 L 有无穷多个特征值 λ_k, 使得

$$\text{Re}\lambda_k \to +\infty, \quad \text{当 } k \to \infty, \tag{2.3.14}$$

则由 (2.3.12) 和 (2.3.13) 可知，一定存在有界序列 $\{\varphi_k\} \subset X$, 使得对任何 $t > 0$, 有

$$\|T(t)\varphi_k\| \to \infty, \quad k \to \infty.$$

这说明，在 (2.3.14) 情况下 L 不能生成出一个有界线性算子半群 $T(t): X \to X, t > 0$.

一个由线性算子 $L: X_1 \to X$ 生成的强连续半群 $T(t): X \to X$ 有如下基本性质.

定理 2.15　令 $T(t): X \to X (t \geqslant 0)$ 是一个由 $L: X_1 \to X$ 生成的强连续半群. 则有如下性质:

(1) 对任何 $u_0 \in X_1$, 下面初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

有一个唯一解 $u(t)=T(t)u_0\in C^1([0,\infty),X)\cap C^0([0,\infty),X_1)$.

(2) 如果方程 (2.3.11) 有一个解 $u(t)\in X_1$, 那么这个解 $u(t)$ 满足方程 (2.3.3).

(3) 对任 $x\in X$, $\int_0^t T(s)xds\in X_1$, 并且

$$L\left(\int_0^t T(s)xds\right)=T(t)x-x.$$

(4) 对 $x\in X_1$, 则 $T(t)x\in X_1$, 并且

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t LT(\tau)xd\tau=\int_s^t T(\tau)Lxd\tau.$$

§2.3.3 扇形算子和解析半群

强连续半群 $T(t):X\to X$ 有一个局限, 即当 $x\in X, T(t)x\notin X_1$ 对 $t>0$. 这个局限对许多具体问题的应用构成障碍.

一个基本的问题就是是否存在一类线性有界算子 $L:X_1\to X$, 使得 L 生成的线性算子半群 $T(t):X\to X$ 具有如下性质:

$$T(t)x\in X_1,\quad \forall x\in X,\ t>0. \tag{2.3.15}$$

另外, 若存在这样的线性算子, 它们的基本特征是什么.

对这个问题, §2.3.1 中的例子能给予较好的说明. 回忆由 (2.3.2) 定义的线性算子 $L=-A+B:X_1\to X$, 这里

$$\begin{cases} X_1=H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1), \\ X=L^2(0,1), \end{cases} \tag{2.3.16}$$

$$Lu=-Au+Bu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x)u,\qquad u\in X_1. \tag{2.3.17}$$

L 生成的线性算子半群由 (2.3.7) 给出, 即

$$T(t)u=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}x_k\phi_k,\quad u=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\phi_k\in X. \tag{2.3.18}$$

由微分方程的基本理论知, X_1 的范数等价于下面定义的范数 (见 §2.5.3):

$$\begin{aligned}\|u\|_1^2&=<Lu,Lu>_X\\ &=\int_0^1\left(\frac{d^2u}{dx^2}+a(x)u\right)^2dx\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2x_k^2,\quad (\text{由}(2.3.4))\end{aligned}$$

$\forall u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \phi_k \in X_1$. 这里为了简单，假设 $\lambda_k \neq 0$, 对任何 $k \geqslant 1$. 这样，由 (2.3.18) 知

$$\|T(t)u\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} x_k^2 < +\infty,$$

即由线性算子 (2.3.17) 生成的半群 (2.3.18) 满足性质 (2.3.15).

此外，满足性质 (2.3.15) 的关键是线性算子 L 的特征值 λ_k 具有性质

$$\mathrm{Re}\lambda_k \to -\infty, \quad 当\ k \to \infty.$$

上述问题和例子推广到一般情况就导致了扇形算子和解析半群的概念.

定义 2.8　一个强连续半群 $T(t): X \to X$ 称为是一个解析半群，如果对所有 $t \in (0, \infty)$ 和 $x \in X$, 由 $f(t) = T(t)x$ 定义的映射 $f: (0, \infty) \to X$ 是解析的. 一个线性有界算子 $L: X_1 \to X$ 称为是扇形算子，如果 L 生成一个解析半群.

下面的定理给出了扇形算子的特征，它表明一个扇形算子 L 的谱一定是在复平面中，如图 2.14 所示的阴影扇形区域内. 更具体地说，如果 L 有无穷多特征值 $\{\lambda_k\}$, 则 λ_k 一定满足下面性质

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\lambda_k \to -\infty, & 当\ k \to \infty, \\ |\mathrm{Im}\lambda_k / \mathrm{Re}\lambda_k| < C, & \forall\ k = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

这里 $C > 0$ 为某个常数.

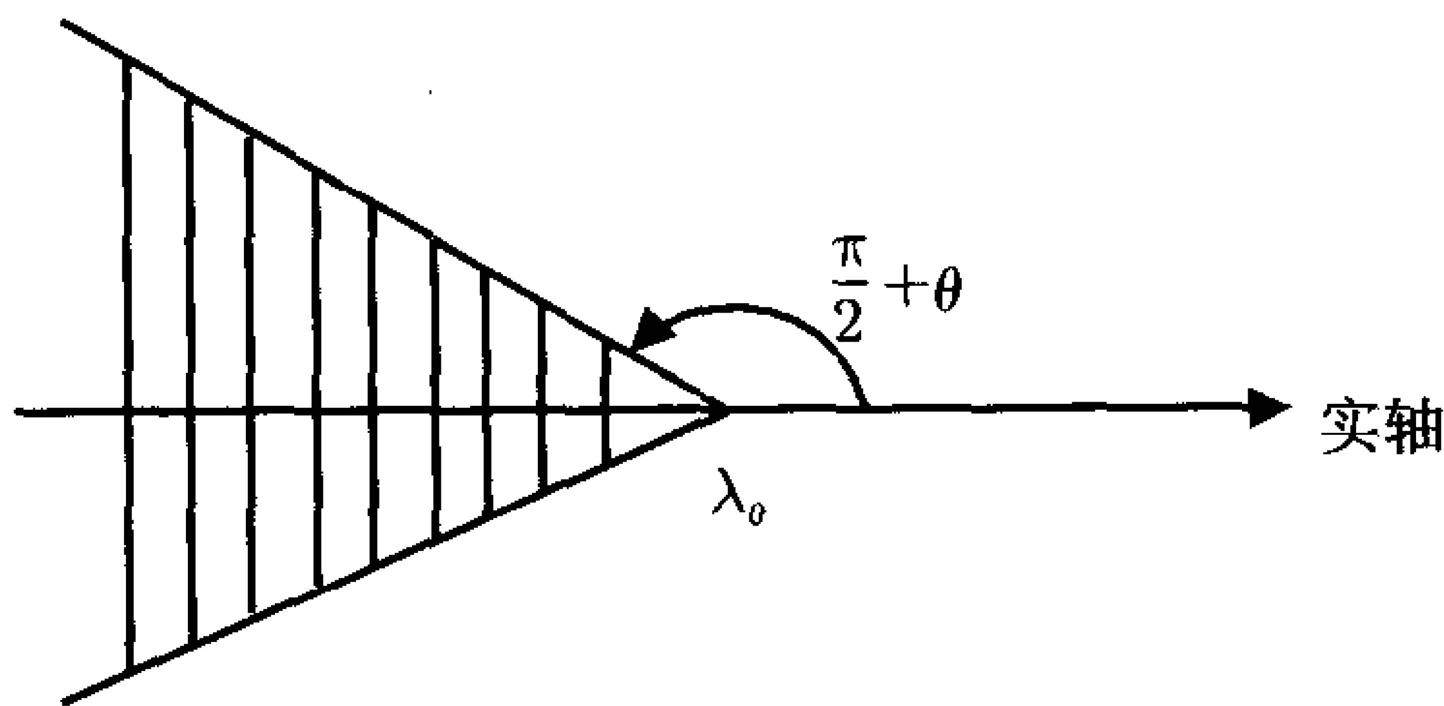


图 2.14

定理 2.16　一个线性有界映射 $L: X_1 \to X$ 是扇形算子的充要条件是

(1) L 是一个闭算子;

(2) 存在一个实数 λ_0, 一个常数 $C \geqslant 1$ 及一个数 $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$S_{\lambda_0}(\theta) = \{\lambda \in C \mid |\arg(\lambda - \lambda_0)| < \frac{\pi}{2} + \theta\} \subset \rho(L), \tag{2.3.19}$$

并且

$$\|(\lambda id - L)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{|\lambda - \lambda_0|}, \quad \forall \lambda \in S_{\lambda_0}(\theta), \quad \lambda \neq \lambda_0,$$

这里 $\rho(L)$ 是定理 2.14 中定义的予解集.

解析半群 $T(t): X \to X$ 有一个重要的性质，即性质 (2.3.15). 然而，由于扇形算子具有更重要的特点，即存在分数次空间和算子，解析半群 $T(t)$ 也具有比 (2.3.15) 更一般的性质. 我们将在下一小节专门介绍它们.

§2.3.4 分数次空间与算子

我们还是从由算子 (2.3.17) 给出的例子开始. 令 $\mathcal{L} = -L = A - B, L$ 如 (2.3.17) 给出. 假设 $\mathcal{L}$ 的所有特征值 $\lambda_k > 0$. 对于 $\mathcal{L}$ 定义分数指数算子 $\mathcal{L}^\alpha$ 和分数次空间 $X_\alpha = D(\mathcal{L}^\alpha)(\alpha \in R^1)$ 如下

$$\begin{cases} X_\alpha = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \phi_k \in X \middle| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} x_k^2 < \infty \right\}, \\ \|x\|_\alpha = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} x_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{L}^\alpha x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha x_k \phi_k, \quad \forall x \in X_\alpha. \end{cases} \tag{2.3.20}$$

显然，$X_\alpha \subset X_\beta (\alpha > \beta)$ 是稠密紧包含，并且范数 $\|\cdot\|_{\alpha=1}$ 和 $\|\cdot\|_{\alpha=0}$ 分别等价于由 (2.3.16) 给出的 X_1 和 X 的范数. 更进一步地有

$$\begin{aligned} &T(t): X \to X_\alpha \text{有界}, \quad \forall t > 0, \quad \alpha \in R^1, \\ &T(t)\mathcal{L}^\alpha x = \mathcal{L}^\alpha T(t)x, \quad \forall x \in X_\alpha, \\ &\mathcal{L}^\alpha \cdot \mathcal{L}^\beta = \mathcal{L}^\beta \cdot \mathcal{L}^\alpha = \mathcal{L}^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

另外，还可以得到一个重要性质：

$$\|\mathcal{L}^\alpha T(t)\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad \forall t > 0,$$

其中 $C_\alpha > 0$ 是依赖于 α 的常数，$\delta > 0$ 为某一常数. 该不等式可由下面计算推出

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^\alpha T(t)\| &= \sup_{\|x\|_0=1} \|\mathcal{L}^\alpha T(t)x\| \\ &= \sup_{\|x\|_0=1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} e^{-2\lambda_k t} x_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \max_k \left(\lambda_k^\alpha e^{-(\lambda_k - \lambda_1)t} \right) e^{-\lambda_1 t} \\ &\leqslant C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

现在回过来对一般的扇形算子介绍分数指数算子及分数次空间的严格数学定义.

令 $L: X_1 \to X$ 是一个扇形算子, 并且对某个 $\lambda_0 < 0$, 使得扇形区域 $S_{\lambda_0}(\theta) \subset \rho(L)$, 即 L 的特征值实部 $\text{Re}\lambda \leqslant \lambda_0 < 0$. 对于算子 $\mathcal{L} = -L$ 和 $\alpha > 0$ 定义

$$\mathcal{L}^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{tL} dt, \tag{2.3.21}$$

这里 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, e^{tL} 是由 L 生成的算子半群，它是一个解析半群.

然后有如下定理，它是对所有实数 $\alpha \in R^1$ 定义分数指数算子 $\mathcal{L}^\alpha$ 和分数次空间 X_α 的基础.

定理 2.17　由 (2.3.21) 定义的算子 $\mathcal{L}^{-\alpha}$ 是 X 上的一个线性有界算子，并且 $\mathcal{L}^{-\alpha}: X \to X$ 是单一映射，满足下面性质

$$\mathcal{L}^{-\alpha} \cdot \mathcal{L}^{-\beta} = \mathcal{L}^{-(\alpha+\beta)}, \quad \forall \alpha, \beta > 0.$$

定义 2.9　对于 $\alpha \geqslant 0$, 定义

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^0 = id: X \to X \text{为恒等映射}, \\ &\mathcal{L}^\alpha = (\mathcal{L}^{-\alpha}\text{的逆映射})(\alpha > 0), \\ &X_\alpha = D(\mathcal{L}^\alpha) = R(\mathcal{L}^{-\alpha}), \end{aligned}$$

并且 X_α 配以下面范数

$$\|x\|_\alpha = \|\mathcal{L}^\alpha x\|_X. \tag{2.3.22}$$

下面验证, 如果 $\mathcal{L} = -L: X_1 \to X$, L 如 (2.3.17) 所定义, 那么由定义 2.9 所定义的 $\mathcal{L}^\alpha$ 和 X_α 与 (2.3.20) 是一致的. 事实上, 由 (2.3.18) 对任何 $x = \sum_{k=1}^\infty x_k \phi_k \in X$, 有

$$e^{tL} x = \sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t} x_k \phi_k.$$

由 (2.3.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-\alpha} x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{tL} x dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda_k t} dt x_k \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{-\alpha} x_k \phi_k. \end{aligned}$$

因此推出

$$\mathcal{L}^\alpha x = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\alpha x_k \phi_k,$$

$$D(\mathcal{L}^\alpha) = X_\alpha = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \phi_k \in X \left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\alpha} x_k^2 < \infty \right. \right\}.$$

下面的定理给出扇形算子与分数指数算子的基本性质. 这些性质在后面应用中起到重要作用.

定理 2.18 令 $L : X_1 \to X$ 是一个扇形算子, 它生成一个解析半群 $T(t) = e^{tL}$. 如果对某个 $\lambda_0 < 0$ 和 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, 由 (2.3.19) 定义的扇形区域 $S_{\lambda_0}(\theta) \subset \rho(L)$, 那么对于 $\mathcal{L}^\alpha(\mathcal{L} = -L)$ 有

(1) $T(t) : X \to X_\alpha$ 对任何 $\alpha \in R^1$ 和 $t > 0$ 是有界的.

(2) $T(t)\mathcal{L}^\alpha x = \mathcal{L}^\alpha T(t)x, \quad \forall x \in X_\alpha$.

(3) 对每个 $t > 0$, 算子 $\mathcal{L}^\alpha T(t)$ 是在 X 上是有界的, 并且有如下估计

$$\|\mathcal{L}^\alpha T(t)\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \text{对某个} \delta > 0.$$

(4) 令 $0 < \alpha \leqslant 1$ 及 $x \in X_\alpha$. 则

$$\|T(t)x - x\| \leqslant M_\alpha t^\alpha \|\mathcal{L}^\alpha x\|.$$

下面定理对判定扇形算子是关键的.

定理 2.19 令 $L : X_1 \to X$ 是一个扇形算子, 且对某个 $\lambda_0 < 0$ 扇形区域 $S_{\lambda_0}(\theta) \subset \rho(L)$. 如果 $B : X_1 \to X$ 是一个线性有界算子, 使得对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, 算子 $B\mathcal{L}^{-\alpha} : X \to X$ 是有界的, 那么 $L + B$ 是一个扇形算子.

注 2.2 当 $X_1 \subset X$ 是一个紧包含时, $X_\alpha \subset X_\beta(\alpha > \beta)$ 也是一个紧包含. 在这种情况下定理 2.19 意味着若 $L : X_1 \to X$ 是一个扇形算子, $B : X_\alpha \to X(0 \leqslant \alpha < 1)$ 是线性有界的, 则 $L + B : X_1 \to X$ 是一个扇形算子.

§2.4 中心流形定理

§2.4.1 双曲不变流形

考虑下面 n 维系统在 $x = 0$ 的邻域内流的结构, 该问题对非线性演化方程的动态分歧具有很大意义.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(x), \quad x \in R^n, \tag{2.4.1}$$

其中 A 为 $n \times n$ 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

$G(x)$ 是一个 C^1 的 n 维高阶项，即满足

$$G(x) = o(|x|). \tag{2.4.3}$$

首先观察线性情况

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{2.4.4}$$

假设矩阵 A 的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(计入重数), 并且有

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\lambda_i < 0, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ \mathrm{Re}\lambda_j > 0, & k+1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

为了能够简单地体现本质，仅仅考虑实特征值情况，并且 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 当 $i \neq j$ 时. 此时由 Jordan 定理，在一个线性坐标变换下，方程 (2.4.4) 可以化为

$$\frac{dy_i}{dt} = -\rho_i y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad \rho_i = |\lambda_i|, \tag{2.4.6}$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{2.4.7}$$

在初始条件下，

$$y_i(0) = y_i^0, \quad z_j(0) = z_j^0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad k+1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2.4.8}$$

问题 (2.4.6)~(2.4.8) 的解为

$$\begin{cases} y_i = y_i^0 e^{-\rho_i t}, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ z_j = z_j^0 e^{\lambda_j t}, & k+1 \leqslant j \leqslant n, \lambda_j > 0. \end{cases}$$

这个解表明，方程 (2.4.4) 有两个不变子空间 $E_1, E_2 \subset R^n(\mathrm{dim}E_1 = k, \mathrm{dim}E_2 = n-k)$, 也就是说, 当初始值在 E_1 或 E_2 中时, 方程 (2.4.4) 的解 $x(t) = (y(t), z(t))$ 也在 E_1 或 E_2 中:

$$x(t, x_0) \in E_i, \quad \forall t > 0, \quad \text{当 } x_0 \in E_i, \quad i = 1, 2.$$

这里 $x(0, x_0) = x_0$. 可以看出 E_1, E_2 分别是 A 的对应于负特征值和正特征值的特征空间，并且有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t, x_0) = 0, \qquad \text{当 } x_0 \in E_1,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(-t, x_0) = 0, \qquad \text{当 } x_0 \in E_2.$$

即方程 (2.4.4) 在 E_1 的解是流入 $x=0$ 点，而在 E_2 的解是流出 $x=0$ 点，如图 2.15 所示.

在数学上， E_1 称为方程 (2.4.4) 或者向量场 A 的稳定流形， E_2 称为不稳定流形. 这两个稳定和不稳定流形将向量场 A 在 $x=0$ 的领域内的流的拓扑结构从本质上就确定了.

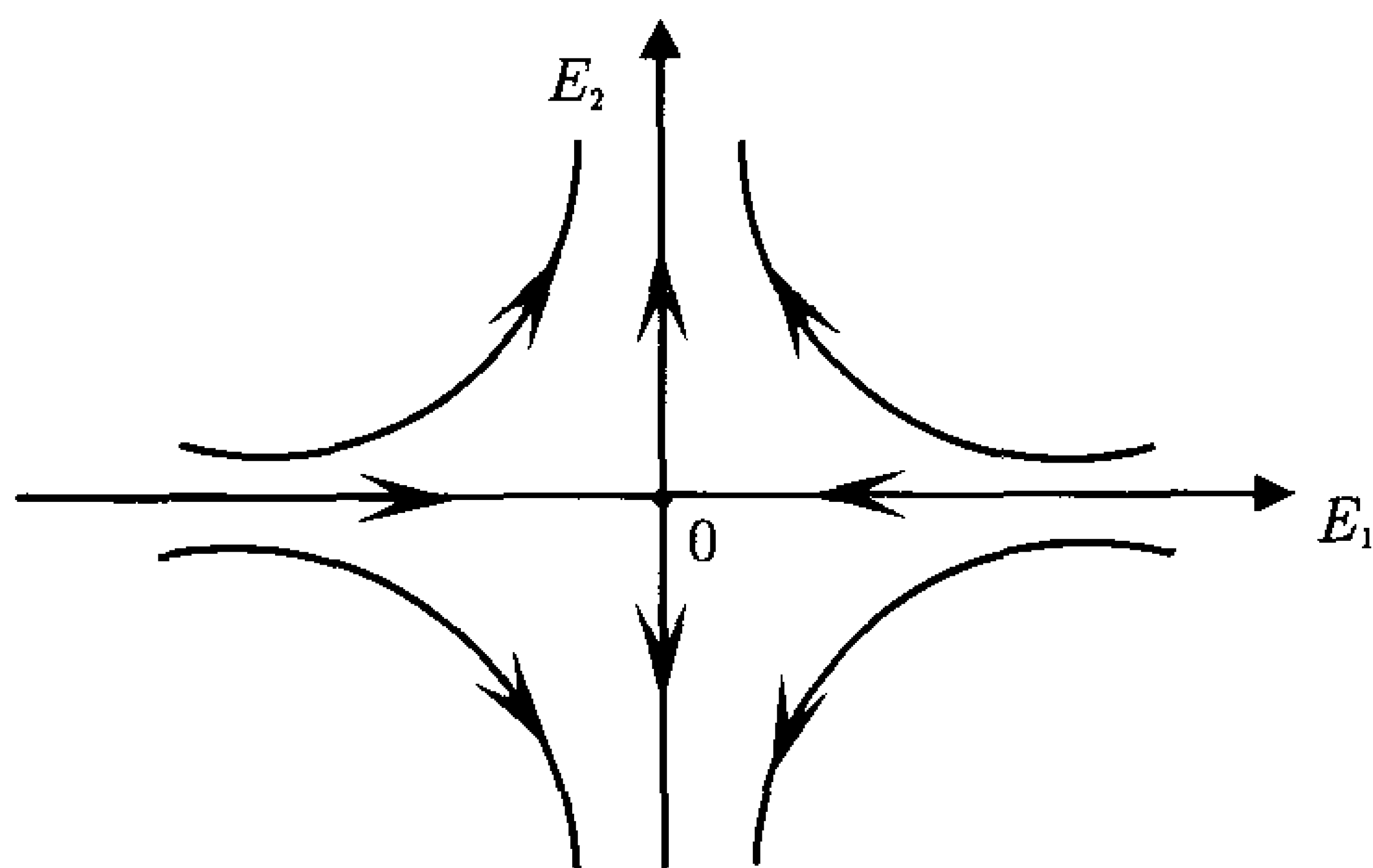


图 2.15 E_1 是稳定流形，E_2 是不稳定流形

现在再来看一般非线性情况 (2.4.1)~(2.4.3). 在 $x=0$ 的一个邻域内，方程 (2.4.1) 能够被看成是方程 (2.4.4) 和一个小摄动. 从直观上看，向量场A 的两个稳定和不稳定流形 E_1 和 E_2 在小摄动 $A+G$ 下不会消失，而应该形变成两个 k 维和 $n-k$ 维曲面 M_1 和 M_2, 使得 M_1 和 M_2 分别在 $x=0$ 处与 E_1 和 E_2 相切，是 $A+G$ 的不变曲面，并且 $A+G$ 在 M_1 的流是进入 $x=0$, 而在 M_2 的流是走出 $x=0$. 换句话说，在条件 (2.4.3) 和 (2.4.5) 下，方程 (2.4.1) 在 $x=0$ 处应该具有两个不变曲面 (流形)M_1 和 M_2, 这里 M_1 和 M_2 是 (2.4.1) 的稳定和不稳定流形，并且 M_1 与 A 的负实部特征值的特征空间相切，而 M_2 与正实部特征值的特征空间相切.

下面给出稳定流形定理.

定理 2.20 令条件 (2.4.3) 和 (2.4.5) 成立，并且 E_1 和 E_2 分别为 A 的对应于负实部和正实部特征值的特征空间. 那么唯一地存在两个流形 M^s 和 M^u, 称为 (2.4.1) 的稳定流形和不稳定流形，它们被表达为

$$M^s=\{x_0\in R^n|\lim_{t\to\infty}x(t,x_0)=0\},$$

$$M^u=\{x_0\in R^n|\lim_{t\to\infty}x(-t,x_0)=0\},$$

其中 $x(t,x_0)$ 是方程 (2.4.1) 的解，并且 $x(0,x_0)=x_0$. 进一步， M^s 与 M^u 在 $x=0$ 处分别与 E_1 和 E_2 相切

$$T_{x=0}M^s=E_1=R^k,\quad T_{x=0}M^u=E_2=R^{n-k}.$$

因而稳定流形 M^s 和不稳定流形 M^u 在 $x=0$ 处横截相交.

前面给出了稳定流形定理实在意义的分析. 下面我们勾划定理证明的基本思路.

不失一般性，将方程 (2.4.1) 变换为如下形式

$$\frac{dy}{dt}=A_1y+G_1(y,z), \tag{2.4.9}$$

$$\frac{dz}{dt} = A_2 z + G_2(y,z), \tag{2.4.10}$$

这里 $y \in R^k, z \in R^{n-k}, A_1$ 是一个 $k \times k$ 阶矩阵，其特征值为 $\lambda_i(\mathrm{Re}\lambda_i < 0, 1 \leqslant i \leqslant k), A_2$ 是 $(n-k)\times(n-k)$ 阶矩阵，其特征值为 $\lambda_j(\mathrm{Re}\lambda_j > 0, 1 \leqslant j \leqslant n-k)$.

只需考虑稳定流形情况，不稳定流形情况的证明是一样的.

令 $z = h(y)$ 是在某个开球 $B_\delta = \{y \in R^k | |y| < \delta\}$ 内的稳定流形的函数形式. 需要在 B_δ 内找到这样的函数 $h(y)$, 使得

$$\begin{cases} y(t, y_0), & y_0 \in B_\delta, \\ z(t, z_0) = h(y(t, y_0)), & z_0 = h(y_0) \end{cases} \tag{2.4.11}$$

是下面方程的解

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A_1 y + \rho_\delta(y) G_1(y,z), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.4.12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = A_2 z + \rho_\delta(y) G_2(y,z), \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{2.4.13}$$

这里 $\rho_\delta(y)$ 是截断函数满足

$$\rho_\delta(y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |y| < \delta, \\ 0, & \text{当 } |y| > 2\delta. \end{cases}$$

容易验证，如果 $h(y)$ 满足方程

$$h(\cdot) = -\int_0^\infty e^{-\tau A_2} \rho_\delta G_2(y(\tau,\cdot), h(y(\tau,\cdot)))d\tau, \tag{2.4.14}$$

则 (2.4.1) 就满足 (2.4.12) 和 (2.4.13). 事实上，能够看到下面函数

$$\begin{aligned} z(t, h(x_0)) &= h(y(t,x_0)) \\ &= -\int_0^\infty e^{-\tau A_2} \rho_\delta G_2(y(\tau, h(t,x_0)), h)d\tau \\ &= -\int_0^\infty e^{-\tau A_2} \rho_\delta G_2(y(t+\tau, x_0), h(y(t+\tau, x_0)))d\tau \\ &= -\int_t^\infty e^{A_2(t-\tau)} \rho_\delta G_2(y(\tau, x_0), h)d\tau \end{aligned}$$

满足方程 (2.4.13).

由条件 (2.4.3) 可以证明，当 $\delta > 0$ 充分小时，映射

$$
\begin{aligned}
&T : Y \to Y,\\
&Y = \{h : B_\delta \to R^{n-k} | h(0) = 0, h\text{是 Lipschitz}\},\\
&T(h) = -\int_0^\infty e^{-\tau A_2}\rho_\delta G_2(y(\tau,\cdot), h(y(\tau,\cdot)))d\tau
\end{aligned}
$$

是一个压缩映射，因而有不动点．这样 (2.4.14) 存在解 $h \in Y$, 并且

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0.$$

于是得到定理的证明．

注意，当证明不稳定流形存在性时，用下面的方程取代 (2.4.14) 式

$$h(\cdot) = \int_{-\infty}^0 e^{-\tau A_1}\rho_\delta G_1(h(z(\tau,\cdot)), z(\tau,\cdot))d\tau.$$

§2.4.2 R^n的中心流形

上一节介绍了 R^n 中向量场双曲奇点的稳定流形与不稳定流形的概念，其基本条件就是向量场在奇点处的线性化矩阵必须是双曲的，即所有特征值实部不为零．这一节考虑非双曲情况，即中心流形定理，该理论在动态分歧中起到关键作用．

考虑下面常微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = Ax + G_1(x,y,\lambda),\\
\dfrac{dy}{dt} = By + G_2(x,y,\lambda),
\end{cases}
\tag{2.4.15}
$$

其中 $x \in R^k, y \in R^m, A$ 是 $k \times k$ 阶矩阵， B 是 $m \times m$ 阶矩阵， $G_i(x,y,\lambda)$ 关于参数 $\lambda \in R^1$ 是连续的，关于 $(x,y) \in R^k \times R^m$ 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 的．

假设 A 的所有特征值为 $\rho_0 i(1 \leqslant i \leqslant k), B$ 的所有特征值为 $\lambda_j(1 \leqslant j \leqslant m)$, 并且满足

$$
\begin{cases}
\text{Re}\rho_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,\\
\text{Re}\lambda_j < 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.
\end{cases}
\tag{2.4.16}
$$

这些非线性函数 $G_i(x,y,\lambda)$ 关于 x,y 是高阶项

$$G_i(x,y,\lambda) = o(|x| + |y|), \quad i = 1,2, \quad \lambda \in R^1. \tag{2.4.17}$$

正如上节所讨论的双曲不变流形原理一样，在条件 (2.4.16) 和 (2.4.17) 下，在 $z = (x,y) = 0$ 的邻域 V 内，存在 (2.4.15) 的一个 m 维的稳定流形 M^s, 在

$z=0$ 处 M^s 与 B 的特征空间 R^m 相切. 因为在 M^s 中的流是进入到 $z=0$, 因而在 V 中, (2.4.15) 的流挤出一个 k 维不变流形 M^c, 如图 2.16 所示. 这个不变流形 M^c 就称为 (2.4.15) 的中心流形.

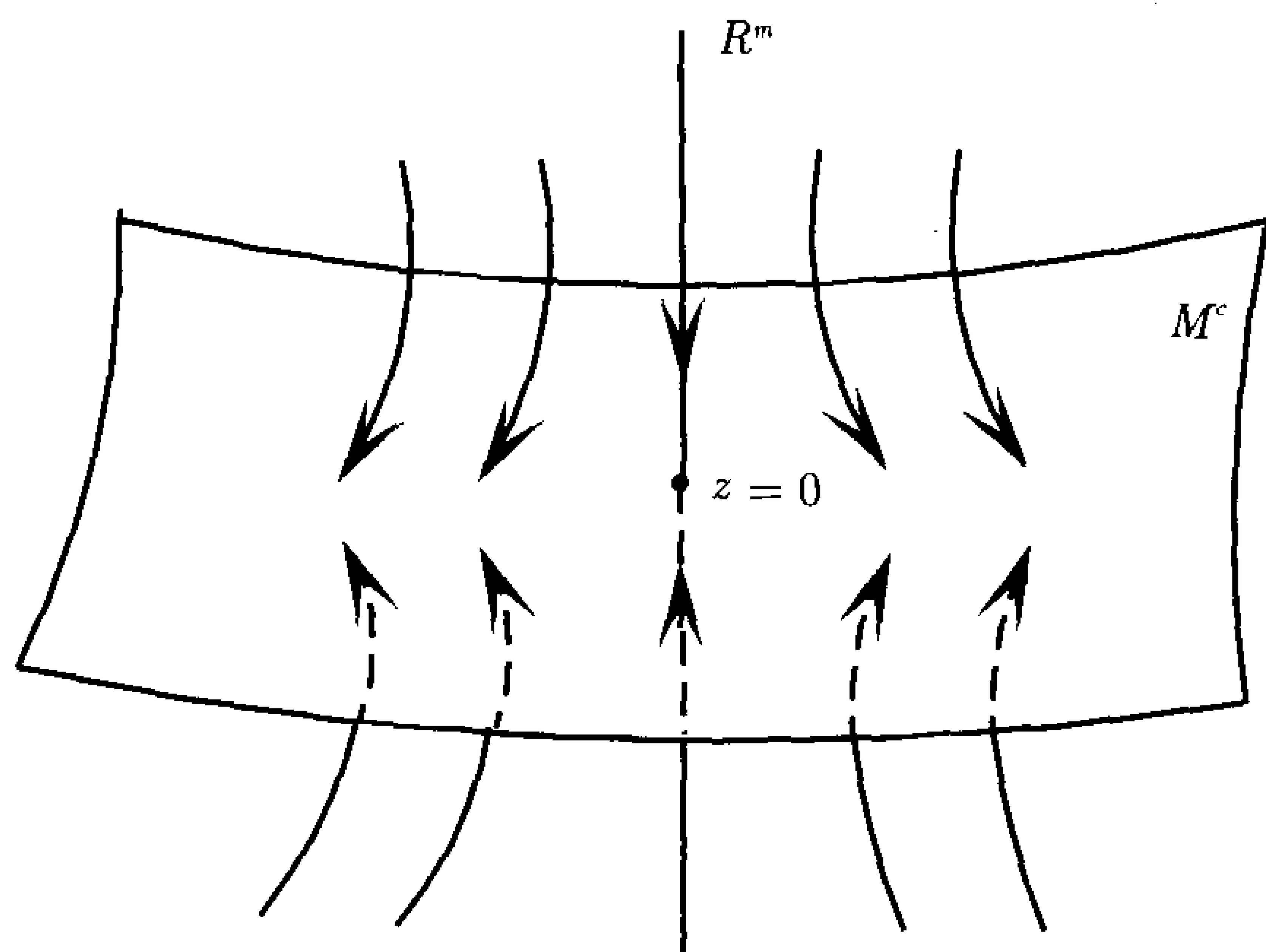


图 2.16

下面给出中心流形定理.

定理 2.21　在条件 (2.4.16) 和 (2.4.17) 的假设下, 对系统 (2.4.15), 存在一个 C^r 函数, 称为中心流形函数.

$$h(\cdot,\lambda):B\to R^m,\quad B\subset R^k \text{ 是 } x=0 \text{ 的一个邻域},$$

使得 $h(x,\lambda)$ 关于 λ 是连续的, 并且

(1) $h(0,\lambda)=0, h'_x(0,\lambda)=0$;

(2) 下面集合

$$M_\lambda=\{(x,y)|x\in B\subset R^k, y=h(x,\lambda)\}$$

称为中心流形, 是 (2.4.15) 的局部不变流形;

(3) 如果 M_λ 是正不变的, 即 $z(t,\varphi)\in M_\lambda, \forall t\geqslant 0$, 那么 M_λ 是 (2.4.15) 的一个吸引集, 也就是说, 存在 M_λ 的一个邻域 $U\subset R^{k+m}$, 当 $\varphi\in U$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}\operatorname{dist}(z(t,\varphi),M_\lambda)=0,$$

这里 $z(t,\varphi)=(x(t,\varphi),y(t,\varphi))$ 是方程 (2.4.15) 的解, 其初值为 $z(0,\varphi)=\varphi$.

该定理证明的基本思想与稳定流形定理的证明是一样的, 它实质上是稳定流形定理的推广.

下面介绍的是更一般的中心流形定理. 考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_\lambda x + G_1(x,y,z,\lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = B_\lambda y + G_2(x,y,z,\lambda), \\ \dfrac{dz}{dt} = C_\lambda z + G_3(x,y,z,\lambda), \end{cases} \tag{2.4.18}$$

其中, $x \in R^k, y \in R^n, A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ 都是连续. 依赖于 λ 的矩阵, $G_i(x,y,z,\lambda) = o(|x|+|y|+|z|)(i=1,2,3)$. 令 $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ 的特征值分别为 $\rho_i, \lambda_j, \beta_l$, 并且假设

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\rho_i(\lambda_0) > 0, & 1 \leqslant i \leqslant k, \\ \mathrm{Re}\lambda_j(\lambda_0) < 0, & 1 \leqslant j \leqslant m, \\ \mathrm{Re}\beta_l(\lambda_0) = 0, & 1 \leqslant l \leqslant n. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

定理 2.22 在条件 (2.4.19) 的假设下, 存在 $\varepsilon > 0$, 在 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 时, 方程 (2.4.18) 具有三个局部不变流形 $M_\lambda^u, M_\lambda^s, M_\lambda^c$, 它们分别与 $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ 的特征空间在 $w = (x,y,z) = 0$ 处相切

$$T_{w=0}M_\lambda^u = R^k, \quad T_{w=0}M_\lambda^s = R^m, \quad T_{w=0}M_\lambda^c = R^n,$$

这里, M_λ^u 是不稳定流形, M_λ^s 是稳定流形, M_λ^c 是中心流形, 并且当 $G_i(i=1,2,3)$ 是 C^r 时, M_λ^u、M_λ^s 和 M_λ^c 也是 C^r 流形.

§2.4.3 无穷维系统的中心流形

现在介绍无穷维系统的中心流形定理. 令 H 和 H_1 是两个 Banach 空间, $H_1 \subset H$ 是一个紧稠密包含. 考虑下面非线性演化方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u,\lambda), \ \lambda \in R^1, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.4.20}$$

其中 $L_\lambda : H_1 \to H$ 是连续依赖于参数 $\lambda \in R^1$ 的线性全连续场, 其定义为

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B_\lambda, \\ A : H_1 \to H \text{一个线性同胚}, \\ B_\lambda : H_1 \to H \text{一个线性紧算子}. \end{cases} \tag{2.4.21}$$

首先考虑 L_λ 是一个扇形算子的情况. 这样, 就可以定义分数指数算子 $L_\lambda^\alpha (\alpha \in R^1)$ 和分数次空间 $H_\alpha = D(L_\lambda^\alpha)$.

对于非线性项 G, 假设对某个 $0 \leqslant \theta < 1, G(\cdot,\lambda): H_\theta \to H$ 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 有界映射且连续地依赖于 $\lambda \in R^1$, 使得

$$G(u,\lambda) = o(\|u\|_\theta), \quad 0 \leqslant \theta < 1, \quad \forall \lambda \in R^1. \tag{2.4.22}$$

假设空间 H_1 和 H 能够被分解成

$$\begin{cases} H_1 = E_1^\lambda \oplus E_2^\lambda, & \dim E_1^\lambda < \infty, \\ H = \widetilde{E}_1^\lambda \oplus \widetilde{E}_2^\lambda, \\ \widetilde{E}_1 = E_1, \\ \widetilde{E_2} = E_2^\lambda, & \text{在}H\text{中的闭包}, \end{cases} \tag{2.4.23}$$

对 λ 在 λ_0 附近，那里 E_1^λ 和 E_2^λ 是 L_λ 的不变子空间，也就是说，在 λ 靠近 λ_0 附近 L_λ 能够被分解成 $L_\lambda = \mathcal{L}_1^\lambda \oplus \mathcal{L}_2^\lambda$, 使得

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1^\lambda = L_\lambda|_{E_1^\lambda} : E_1^\lambda \to \widetilde{E}_1^\lambda, \\ \mathcal{L}_1^\lambda = L_\lambda|_{E_2^\lambda} : E_2^\lambda \to \widetilde{E}_2^\lambda, \end{cases} \tag{2.4.24}$$

其中 $\mathcal{L}_2^\lambda$ 的特征值具有负实部，$\mathcal{L}_1^\lambda$ 的特征值具有非负实部在 $\lambda = \lambda_0$ 处.

这样，对 λ 在 λ_0 附近，方程 (2.4.20) 能够等价地被改写成如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathcal{L}_1^\lambda x + G_1(x,y,\lambda), \\ \dfrac{dy}{dt} = \mathcal{L}_2^\lambda y + G_2(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{2.4.25}$$

其中 $u = x + y, x \in E_1^\lambda, y \in E_2^\lambda, G_i(x,y,\lambda) = P_i G(u,\lambda), P_i : H \to \widetilde{E}_i$ 为规范投影，$i = 1, 2$.

下面就是无穷维的中心流形定理.

定理 2.23　假设条件 (2.4.21)~(2.4.24) 成立，则存在 λ_0 的一个邻域 $|\lambda-\lambda_0| < \delta$, 对某个 $\delta > 0$, 一个 $x = 0$ 的邻域 $B_\lambda \subset E_1^\lambda$, 及一个 C^1 函数 $h(\cdot,\lambda) : B_\lambda \to E_2^\lambda(\theta)$ 连续地依赖于 λ, 这里 $E_2^\lambda(\theta)$ 为 E_2^λ 在 H_θ 范数下的完备化 ($0 \leqslant \theta < 1$ 如 (2.4.22) 所给定), 使得

(1) $h(0,\lambda) = 0, \quad h'_x(0,\lambda) = 0$;

(2) 下面集合

$$M_\lambda = \{(x,y) \in H |\ x \in B_\lambda,\ y = h(x,\lambda)\}$$

称为中心流形，是关于方程 (2.4.18) 局部不变的，即对任何初值 $u_0 \in M_\lambda$, (2.4.18) 的解满足

$$u(t,u_0) \in M_\lambda, \quad \forall 0 \leqslant t < t(u_0),$$

对某个 $t(u_0) > 0$;

(3) 如果 $(x_\lambda(t), y_\lambda(t))$ 是 (2.4.25) 的解，那么有一个 $\beta_\lambda > 0$ 和 $k_\lambda > 0$, 它们依赖于 $(x_\lambda(0), y_\lambda(0))$, 使得

$$\|y_\lambda(t) - h(x_\lambda(t), \lambda)\| \leqslant k_\lambda e^{-\beta_\lambda t}.$$

前面介绍了 L_λ 为扇形算子情况下的中心流形定理．下面考虑 L_λ 为一般强连续半群的生成子情况，这种情况能够适用于非线性波方程.

假设 $L_\lambda : H_1 \to H$ 生成一个强连续线性算子半群 $T(t)$. 又假设 $G : H \to H$ 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 有界映射满足 $\theta = 0$ 情况下的 (2.4.22). 然后有下面中心流形定理.

定理 2.24 令 $L_\lambda : H_1 \to H$ 是一个强连续算子半群的生成子，并且定理 2.23 中的条件在 $\theta = 0$ 情况下成立．如果由 $\mathcal{L}_2^\lambda$ 生成的强连续半群 $S_\lambda(t)$ 满足

$$\|S_\lambda(t)\| \leqslant K_\lambda e^{-\alpha_\lambda t},$$

对某个常数 $K_\lambda \geqslant 1$ 和 $\alpha_\lambda > 0$, 那么存在一个 C^1 中心流形函数 $h(\cdot, \lambda) : B_\lambda \to \widetilde{E}_2^\lambda$, 使得在定理 2.23 中的结论 (1)~(3) 成立.

§2.4.4 中心流形函数的构造

在后面关于动态分歧的讨论中，有时需要近似地解出中心流形函数．为此目的，下面给出定理 2.23 和 2.24 的证明思路，从中可以具体地近似构造出中心流形函数．为简便起见，记 $h(\cdot, \lambda) = h(\cdot)$.

令 $\rho_\varepsilon : E_1^\lambda \to [0,1]$ 是一个 C^∞ 截断函数，定义为

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} \|x\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{当} \|x\| > 2\varepsilon, \end{cases}$$

对某个 $\varepsilon > 0$. 记

$$C^{0,1}(E_1^\lambda, E_2^\lambda(\theta)) = \{h : E_1^\lambda \to E_2^\lambda(\theta) | h(0) = 0, h\text{是 Lipschitz}\}.$$

为了证明中心流形定理，需要找到一个函数 $h \in C^{0,1}(E_1^\lambda, E_2^\lambda(\theta))$, 满足

$$h(\cdot) = \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau \mathcal{L}_2^\lambda} \rho_\varepsilon(x(\tau, \cdot)) G_2(x(\tau, \cdot), h(x(\tau, \cdot))) d\tau, \tag{2.4.26}$$

其中 $x(t, x_0)$ 是下面常微分方程的解

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{L}_1^\lambda x + \rho_\varepsilon(x) G_1(x, h(x), \lambda),$$

$$x(0) = x_0.$$

然后可以证明 $y(t,y_0)=h(x(t,x_0))(y_0=h(x_0))$ 是下面方程的解

$$\frac{dy}{dt}=\mathcal{L}_2^\lambda y+\rho_\varepsilon(y)G_2(x(t,x_0),y,\lambda),$$

$$y(0)=h(x_0).$$

这样, $(x(t,x_0),h(x(t,x_0)))$ 就是方程 (2.4.25) 的一个局部解, 并且由定理 2.23 中给出的流形 M_λ 是关于 (2.4.25) 局部不变的.

方程 (2.4.26) 解的存在性被归为下面映射不动点的存在性

$$F:C^{0,1}(E_1^\lambda,E_2^\lambda(\theta))\to C^{0,1}(E_1^\lambda,E_2^\lambda(\theta)),$$

F 定义为

$$F(h)=\int_{-\infty}^0 e^{-\tau\mathcal{L}_2^\lambda}\rho_\varepsilon(x)G_2(x(\tau),h(x(\tau)))d\tau.$$

最后应用压缩不动点定理可以证明 F 存在不动点.

§2.5 偏微分方程中的解析半群

§2.5.1 Sobolev 空间

为了方便, 这里简要介绍 Sobolev 空间及其嵌入定理. 令 $\Omega\subset R^n$ 是一个开集, $C^k(\Omega)(k\geqslant 0)$ 是所有在 Ω 上 k 次连续可微的函数空间, 其范数定义为

$$\|u\|_{C^k}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha u|,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$ 是整数, $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$, 并且

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D_iu=\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad D_{ij}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}.$$

记

$$C_0^k(\Omega)=\{u\in C^k(\Omega)|\text{supp } u\subset\Omega\},$$

这里 supp u 表示 u 在 Ω 内的紧支集, 定义为

$$\text{supp } u=\overline{\{x\in\Omega|u(x)\neq 0\}}.$$

令 $L^p(\Omega),1\leqslant p<\infty$(或者 $L^\infty(\Omega)$) 是定义在 Ω 上并且 p 次可积函数空间 (或者本质有界函数空间). 配以如下范数

$$\|u\|_{L^p}=\left[\int_\Omega|u|^pdx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

或者对 $p=\infty$,

$$\|u\|_{L^\infty}=\text{ess.}\sup_{\Omega}|u(x)|.$$

对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 和非负整数 k, Sobolev 空间定义为

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega)|\ D^\alpha u\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant k\},$$

其范数为

$$\|u\|_{W^{k,p}}=\sum_{|\alpha|\leqslant K}\|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

当 $p=2$ 时，记

$$H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega),$$

这是 Hilbert 空间，其内积为

$$\langle u,v\rangle_{H^k}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega D^\alpha u\cdot D^\alpha v dx.$$

又记

$$W_0^{k,p}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)\ \ \text{在}W^{k,p}(\Omega)\text{中的闭包},$$

$$H_0^k(\Omega)=W_0^{k,2}(\Omega).$$

对整数 $k\geqslant 0$ 和 $0<\alpha<1$, 定义空间

$$C^{k,\alpha}(\Omega)=\{u\in C^k(\Omega)|[D^\beta u]_\alpha<\infty,|\beta|=k\},$$

其范数为

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}}=\|u\|_{C^k}+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_\alpha,$$

$$[v]_\alpha=\sup_{x,y\in\Omega,x\neq y}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Sobolev 嵌入定理.

定理 2.25 令 $\Omega\subset R^n$ 是一有界区域， $1\leqslant p<\infty$, 那么

$$\begin{cases} W_0^{k,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega), & \forall 1\leqslant q\leqslant\dfrac{np}{n-kp},n>kp,\\ W_0^{k,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega), & \forall 1\leqslant q<\infty,n=kp,\\ W_0^{k,p}(\Omega)\subset C^{m,\alpha}(\Omega), & \forall kp>n,m+\alpha=k-\dfrac{n}{p}.\end{cases}$$

进一步，该包含是连续的，即

$$\begin{cases} \|u\|_{L^q}\leqslant C\|u\|_{W^{k,p}}, & q\leqslant\dfrac{np}{n-kp},\\ \|u\|_{C^{m,\alpha}}\leqslant C\|u\|_{W^{k,p}}, & m+\alpha=k-\dfrac{n}{p},\quad kp>n,\end{cases}$$

其中 $C = C(n, \Omega, q)$ 是常数.

定理 2.26　令 $\Omega \subset R^n$ 是 Lipschitz, 不定有界，那么

$$\begin{cases} W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), & p \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-kp}, \quad n > kp, \\ W^{k,p}(\Omega) \subset C^{m,\alpha}(\Omega), & m + \alpha = k - \dfrac{n}{p}, \quad kp > n, \end{cases}$$

并且包含映射是连续的.

Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理.

定理 2.27　令 $\Omega \subset R^n$ 是有界区域，那么下面的嵌入是紧的

$$\begin{cases} W_0^{1,p} \subset L^q(\Omega), & q < \dfrac{np}{n-p}, \quad n > p, \\ W_0^{1,p} \subset L^q(\Omega), & q < \infty, \quad n = p, \\ W_0^{1,p} \subset C^{0,\alpha}(\Omega), & \alpha < 1 - \dfrac{n}{p}, \quad p > n. \end{cases}$$

定理 2.28 (迹定理)　令 $\Omega \subset R^n$ 是 C^{k+1} 区域, 那么对任 $u \in W_0^{k,p}(\Omega), p \geqslant 1$, 有

$$D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{a.e.} \quad \forall |\alpha| \leqslant k-1.$$

§2.5.2　椭圆算子的正则性估计

考虑下面的线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum\limits_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x) u = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

这里 $x \in \Omega \subset R^n$ 是一个有界区域，并且

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2, \quad \lambda > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \xi \in R^n.$$

下面的定理给出方程 (2.5.1) 的全局 Schauder 估计和 L^p 估计.

定理 2.29 (全局 Schauder 估计)　令 $\Omega \subset R^n$ 是 $C^{2,\alpha}$ 区域, 并且 $a_{ij}, b_i, c, f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. 如果 $u \in C^{2\alpha}(\Omega)$ 是方程 (2.5.1) 的一个解，那么

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leqslant C\left[\|u\|_{C^0} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}} + \|f\|_{C^{0,\alpha}}\right],$$

这里 $C > 0$ 是一个仅依赖于 $n, \Omega, \alpha, \lambda$ 和 a_{ij}, b_i, C 的 Holder 模的常数.

定理 2.30(L^p 估计)　假设 Ω 是 C^2 区域, $a_{ij} \in C^0(\Omega), b_i, c \in L^\infty(\Omega), \varphi \in W^{2,p}(\Omega), f \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$. 如果 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 满足 (2.5.1), 那么

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leqslant C[\|f\|_{L^p} + \|\varphi\|_{W^{2,p}} + \|u\|_{L^p}],$$

这里 $C > 0$ 是一个依赖于 n, p, Ω, λ 及 a_{ij}, b_i, c 的 L^∞ 模的常数.

§2.5.3 各类微分算子的生成半群

这一节介绍几个来自物理、化学和生物等学科的典型方程，这些方程的线性部分都是解析半群或者强连续线性算子半群的生成子，它们具有广泛的代表性. 从这些介绍中可以进一步了解线性算子半群理论及非线演化方程的动力学理论在偏微分方程中如何具体地应用. 这里要介绍的方程是：反应扩散方程、Navier-Stokes 方程、复 Ginzburg-Landau 方程.

首先给出 Sobolev 空间中相应于扇形算子的分数次空间的嵌入定理，它们在非线性偏微分方程的动力学理论中起到关键作用.

定理 2.31(分数次空间的嵌入定理) 令 $\Omega\subset R^n$ 是 Lipschitz 区域，并且 $L: W^{m,p}(\Omega)\to L^p(\Omega)$ 是一个扇形算子，$m\geqslant 2$ 及 $1\leqslant p<\infty$. 那么对 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，分数次空间 $X_\alpha=D(L^\alpha)$ 满足下面嵌入关系

$$X_\alpha\subset W^{k,q}(\Omega),\quad 若\ k-n/q<m\alpha-n/p,$$

$$X_\alpha\subset C^{k,\beta}(\Omega),\qquad 若\ 0\leqslant k+\delta<m\alpha-n/p,$$

并且有

$$\|u\|_{W^{k,q}}\leqslant C\|u\|_{X_\alpha},\quad k-n/q\leqslant m\alpha-\frac{n}{p},$$

$$\|u\|_{C^{k,\beta}}\leqslant C\|u\|_{X_\alpha},\quad 0\leqslant k+\beta<m\alpha-\frac{n}{p}.$$

1. *反应扩散方程*

反应扩散方程出现在许多物理、化学和生物的问题中，它的一般形式由下面给出

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=M_1\Delta u+M_2u+D\cdot\nabla u+F(x,u,\nabla u),\\ u|_{\partial\Omega}=0\ (或\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0),\\ u(x,0)=\varphi,\end{cases}\tag{2.5.2}$$

这里 $\Omega\subset R^n(n\geqslant 1)$ 是一个有界开集，$u=(u_1,\cdots,u_m)(m\geqslant 1)$ 是一个未知函数. 其他符号将依次给出.

(1) M_1 是一个由扩散系数构成的正对角矩阵

$$M_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m\end{pmatrix},$$

这里 $\mu_i>0(1\leqslant i\leqslant m)$.

(2) M_2 是一个 $m \times m$ 阶函数矩阵

$$M_2 = \begin{pmatrix} b_{11}(x) & \cdots & b_{1m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}(x) & \cdots & b_{mm}(x) \end{pmatrix}, \quad b_{ij} \in C^0(\Omega).$$

(3) 算子 $D \cdot \nabla u$ 定义为

$$D \cdot \nabla u = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^t,$$

其中 $d_{ij}^k \in C^0(\Omega)$.

(4) $F = (F_1, \cdots, F_m)$ 是一个定义在 $\Omega \times R^m \times R^{nm}$ 上的连续函数，满足

$$F(x, \xi, \zeta) = o(|\xi|, |\zeta|).$$

对于方程 (2.5.2) 建立如下空间

$$H = L^2(\Omega, R^m),$$

$$H_1 = H^2(\Omega, R^m) \cap H_0^1(\Omega, R^m),$$

或者 $H_1 = \left\{ u \in H^2(\Omega, R^m) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \int_\Omega u dx = 0 \right\}$.

定义映射 $L = -A + B : H_1 \to H$ 及 $G : H_1 \to H$ 如下

$$\begin{cases} -Au = M_1 \Delta u, \\ Bu = M_2 u + D \cdot \nabla u, \\ G(u) = F(x, u, \nabla u). \end{cases} \tag{2.5.3}$$

下面特征值方程

$$\begin{cases} -M_1 \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \right) \end{cases}$$

具有无穷多实特征值 (计入重数)：

$$0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots; \quad \lambda_k \to \infty, \quad 当\ k \to \infty,$$

其对应的特征向量 $\{u_k\} \subset H_1$ 构成 H 的一个正交基. 因而对任何 $\lambda > 0$, 算子 $\lambda id + A$ 有有界逆

$$(\lambda id + A)^{-1} u = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda + \lambda_k)^{-1} x_k u_k,$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k u_k,$$

$$\|u\|_H = \left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

由 L^2 估计 (定理 2.30), $-A : H_1 \to H$ 是同构. 此外, 容易看出

$$\|(\lambda id + A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda + \lambda_1}.$$

因而由定理 2.16 知, $-A$ 是一个扇形算子. 由定理 1.30, $H_{\frac{1}{2}} = D(A^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega, R^m)$. 容易看到

$$B : H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega, R^m) \to H \text{是有界的}.$$

这样, 由定理 2.19(或注 2.2) 可知

$$L = -A + B : H_1 \to H \text{是一个扇形算子}.$$

如果对方程 (2.5.2) 的非线性项 $F(x, \xi, \eta)$ 附加如下的增长限制

$$F(x, \xi, \zeta) \in C^0(\bar{\Omega} \times R^m \times R^{n\times m}), \quad \text{当} n = 1,$$

$$\begin{cases} |F(x, \xi, \zeta)| \leqslant a(x, \xi) + C|\zeta|^q, & 1 \leqslant q < \dfrac{2n}{n-2}, \\ a \in C^0(\bar{\Omega} \times R^m), & a(x, \xi) > 0, \quad c > 0, \quad \text{当} 2 \leqslant n < 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |F(x, \xi, \zeta)| \leqslant C\left[|\xi|^p + |\zeta|^q + 1\right], \\ 1 \leqslant p < \dfrac{4n}{n-4}, \quad 1 \leqslant q < \dfrac{2n}{n-2}, \quad \text{当} 4 \leqslant n. \end{cases}$$

则存在 $\alpha < 1$, 使得由 (2.5.3) 定义的非线性算子

$$G : X_\alpha \to H \text{是有界连续的}.$$

这样, 当方程 (2.5.2) 在 (2.5.3) 的定义下化为抽象形式 (2.4.20) 时, 条件 (2.4.21)~(2.4.22) 被满足.

2. Navier-Stokes 方程

一般黏性流体的控制方程是 Navier-Stokes 方程, 由下式给出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \Delta u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p + f, \\ \text{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{2.5.4}$$

其中 $x \in \Omega \subset R^n(n=2$ 或 $3)$ 是一个有界区域.

如例 1.1.4 所定义的那样建立空间 H 和 H_1. 为了方便，这里再给出它们:

$$H = \{u \in L^2(\Omega, R^n) | \text{div} u = 0,\ u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$H_1 = \{u \in H^2(\Omega, R^n) \cap H | u|_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$L^2(\Omega, R^n) = H \oplus \{\nabla\varphi \in L^2(\Omega, R^2) | \varphi \in H^1(\Omega)\}.$$

定义映射 $L = -A : H_1 \to H$ 和 $G : H_1 \to H$ 为

$$\begin{cases} Au = -\mu P[\Delta u], \\ Gu = P[f - (u \cdot \nabla)u], \end{cases} \tag{2.5.5}$$

这里 $P : L^2(\Omega, R^n) \to H$ 为 Leray 投影.

A 的特征值由特征方程 (1.2.8) 确定，它有一个无穷的实特征值序列

$$0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots; \quad \lambda_k \to \infty, \quad 当\ k \to \infty,$$

并且对应的特征向量 $\{u_k\} \subset H_1$ 构成 H 的一个正交基. 因此，就如椭圆算子情况一样，由 (2.5.5) 定义的线性映射 $L = -A : H_1 \to H$ 称为 Stokes 算子，是一个同胚 (关于 Stokes 算子的 L^p 估计可参见文献 [99]). 因而 L 是一个扇形算子.

此外，由

$$\int_\Omega (u \cdot \nabla)u \cdot v dx \leqslant \|u\|_{C^0} \|\nabla u\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

可以得到

$$\|Gu\|_H \leqslant \|u\|_{C^0} \|\nabla u\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}.$$

再由定理 2.31 可知，由 (2.5.5) 定义的算子 A 的分数次空间 $H_\alpha = D(A^\alpha)$ 满足

$$\|u\|_{C^0} + \|u\|_{W^{1,2}} \leqslant C\|u\|_{H_\alpha},$$

这里 $\alpha > \frac{1}{2}$, 当 $n=2$ 时， $\alpha > \frac{3}{4}$, 当 $n=3$ 时. 这样，这个由 (2.5.5) 定义的非线性映射

$$G : H_\alpha \to H \quad \left(\frac{3}{4} < \alpha < 1\right) 是一个有界的解析映射.$$

3. 复 Ginzburg-Landau 方程

复 Ginzburg-Landau 方程是作为控制不稳定波的振幅方程出现在流体动力学模型中. 其方程为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (\alpha + i\beta)\Delta u + \lambda u - (\sigma + i\rho)|u|^2 u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x, 0) = \phi + i\varphi, \end{cases} \tag{2.5.6}$$

其中未知数 $u:\Omega\times[0,\infty)\to C$ 是一个复值函数， $\Omega\subset R^n(1\leqslant n\leqslant 3)$ 是一个有界区域，参数 α,β,σ,ρ 和 λ 都是实数，并且

$$\alpha>0,\quad \sigma>0.$$

对于问题 (2.5.6), 取如下空间

$$H=L^2(\Omega,C),$$

$$H_1=H^2(\Omega,C)\cap H_0^1(\Omega,C),$$

其中

$$L^2(\Omega,C)=\{u_1+iu_2|u_1,u_2\in L^2(\Omega)\},$$

$$H^k(\Omega,C)=\{u_1+iu_2|u_1,u_2\in H^k(\Omega)\}.$$

这些与方程 (2.5.6) 相关的算子 $L=-A+B:H_1\to H$ 和 $G:H_1\to H$ 定义为

$$\begin{cases}Au=-(\alpha+i\beta)\Delta u,\\ Bu=\lambda u,\\ Gu=-(\sigma+i\rho)|u|^2u.\end{cases}\tag{2.5.7}$$

算子 $A:H_1\to H$ 可以等价地写成如下形式

$$Au=\begin{pmatrix}-\alpha\Delta u_1+\beta\Delta u_2\\ -\beta\Delta u_1+\alpha\Delta u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha\Delta & \beta\Delta\\ -\beta\Delta & -\alpha\Delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

由椭圆方程组的 L^p 估计 [3], 可以证明， $A:H_1\to H$ 是一个同构. 此外容易验证， A 的所有特征值为

$$\alpha\lambda_k+i\beta\lambda_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\lambda_k>0,\quad \forall k\geqslant 0,\quad \lambda_k\to\infty,\quad k\to\infty,$$

这里 λ_k 是 $-\Delta$ 算子的特征值. 其对应的特征函数序列为

$$\phi_k=e_k+ie_k,\quad e_k\text{是}-\Delta\text{ 的特征函数},$$

并且 $\{e_k,ie_j|1\leqslant k,j<\infty\}$ 构成 H 的一个正交基. 采用类似反应扩散方程的方法可以证明， $-A:H_1\to H$ 是一个扇形算子，并且对于 $H_\alpha=D(A^\alpha)$ 有

$$B:H\to H,(H_{\alpha=0}=H)\text{是线性有界},$$

$$G: H_{\frac{1}{2}} \to H\text{是有界解析映射}.$$

因而由 (2.5.7) 定义的线性映射 $L = -A + B : H_1 \to H$ 是一个扇形算子.

总结上面的例子，所有这些方程都可以化为如下抽象形式的方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + G(u), \\ u(0) = \varphi, \end{cases}$$

其中线性算子 $L : H_1 \to H$ 满足

$$\begin{cases} L = -A + B\text{是一个扇形算子}, \\ A : H_1 \to H\text{一个线性同构}, \\ B : H_\alpha \to H\text{线性有界对某个 } 0 \leqslant \alpha < 1. \end{cases}$$

非线性算子 $G : H_1 \to H$ 满足

$$G : H_\alpha \to H \quad \text{是 } C^r \text{ 有界对某个 } 0 \leqslant \alpha < 1.$$

§2.6　评　　注

§2.1　古典隐函数定理能够在许多标准教科书中查到，具体可参阅文献 [9, 10, 75, 120].

§2.2　Brouwer 度理论和 Leray - Schauder 度理论能够在许多著作中发现 [9,28,38,75,120,121].

§2.3　线性算子半群理论可参阅文献 [32, 81, 104, 117].

§2.4　关于中心流形定理可参阅文献 [10, 32, 98].

§2.5　关于 Sobolev 空间理论可参阅文献 [1, 26, 73, 98]. 关于椭圆偏微分方程的 Schauder 估计和 L^p 估计可参阅文献 [2, 3, 5, 26]. 关于反应扩散方程的介绍可参阅文献 [91, 105]. 关于复 Ginzburg-Landau 方程可参阅文献 [98]. 关于 Navier-Stokes 方程可参阅 R. Temam 的经典著作 [99].

第三章　稳定性理论

§3.1　Lyapunov 稳定性

第一章已经对 Lyapunov 稳定性的实在意义进行了讨论. 这一节将从数学上介绍 Lyapunov 稳定性理论.

令 X_1, X 是两个 Banach 空间， $X_1 \subset X$ 是一个稠密包含. 令 $F: X_1 \to X$ 是一个连续映射，考虑下面演化方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Fu, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Lyapunov 稳定性的原始定义如下.

定义 3.1　对于给定的初值 φ, 令 $u(t, \varphi)$ 为方程 (3.1.1) 的解. 若对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当初值 φ_1 满足 $\|\varphi_1 - \varphi\|_X < \delta$ 时， (3.1.1) 的解 $u(t, \varphi_1)$ 满足

$$\|u(t, \varphi_1) - u(t, \varphi)\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0.$$

则称 $u(t, \varphi)$ 是 Lyapunov 稳定的. 又若

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t, \varphi_1) - u(t, \varphi)\|_X = 0,$$

则称 $u(t, \varphi)$ 是渐近 Lyapunov 稳定的.

不难看出，古典 Lyapunov 稳定性概念只涉及到单个轨道 $u(t, \varphi)$. 它一般适用于方程 (3.1.1) 在稳态解和周期轨道邻域内渐近行为的研究.

更广义的 Lyapunov 稳定性概念是从一个区域来考虑的. 下面给出它的严格数学定义.

定义 3.2　令 $\Omega \subset X$ 为一有界开集，若对任何初值 $\varphi \in \Omega$, 方程 (3.1.1) 的解 $u(t, \varphi) \in \Omega, \forall t \geqslant 0$, 则称方程 (3.1.1) 在区域 Ω 内是 Lyapunov 稳定的. 又若存在 (3.1.1) 的一个稳态解 $u_0 \in \Omega$(即 $F(u_0) = 0$), 使对任 $\varphi \in \Omega$ 有

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t, \varphi) - u_0\|_X = 0.$$

则称方程 (3.1.1) 在 Ω 内是渐近 Lyapunov 稳定的，或者说， u_0 是 (3.1.1) 在 Ω 内的渐近稳定的平衡解.

在现代关于非线性演化方程的稳定性研究中，出现许多新的概念，如吸引子、吸收集等、不变区域等等，它们都是在广义 Lyapunov 稳定性的范围内.

§3.1.1 R^n中系统的 Lyapunov 稳定性定理

考察下面常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(x), \quad x \in R^n, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

其中 $v(x)$ 是 R^n 上一个 C^1 向量场.

先从一些现象分析开始，然后再进入 Lyapunov 稳定性的讨论. 当一个有界开区域 $\Omega \subset R^n$ 是方程 (3.1.2) 的一个稳定区域时，向量场 $v(x)$ 的流是不会流出 Ω 的，如图 3.1 所示.

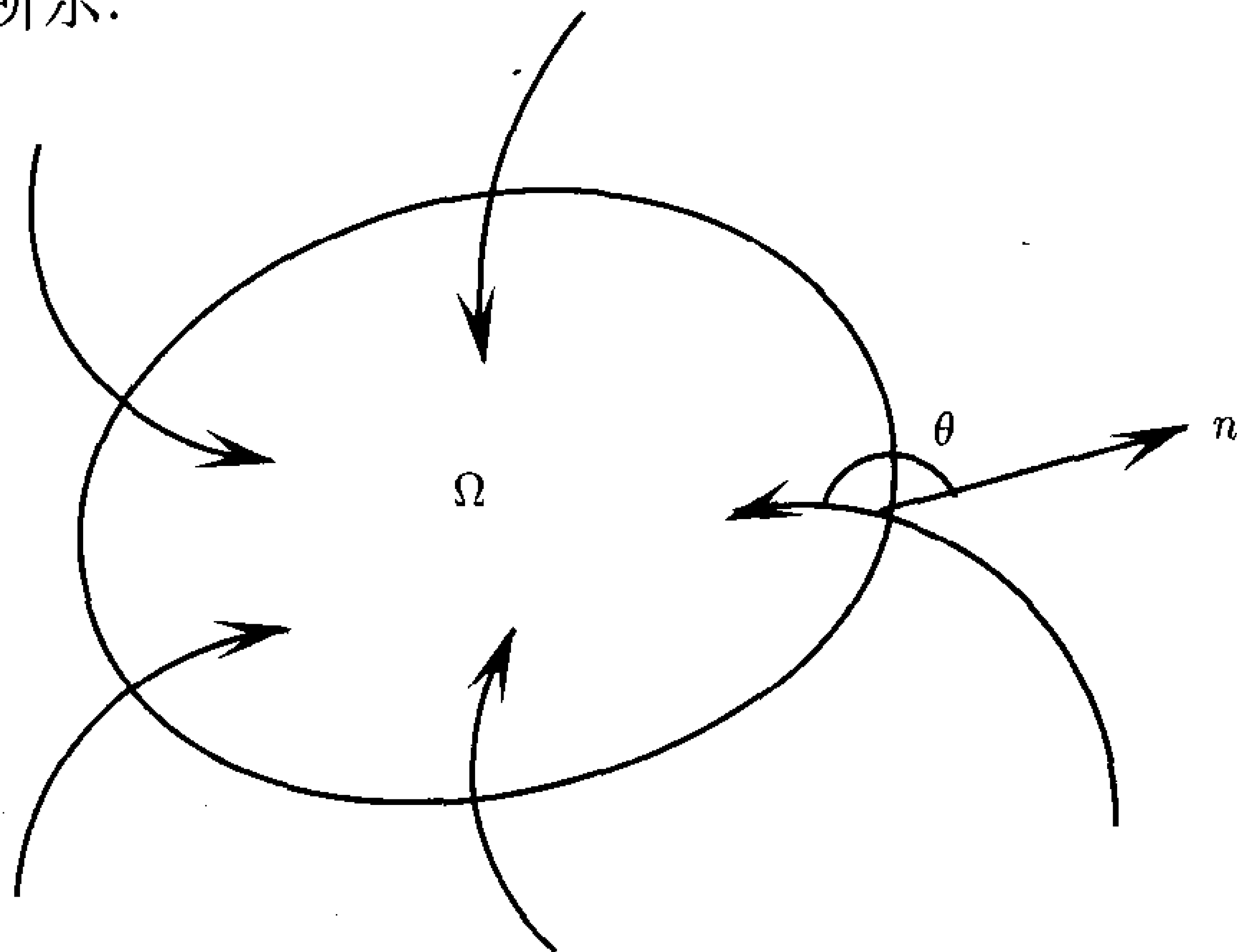


图 3.1 Ω 是 $v(x)$ 的一个 Lyapunov 稳定区域

在数学上，这种现象表述为：Ω 的边界上每一点 $x_0 \in \partial\Omega$ 的外法向量 n 与向量场在 x_0 点的值 $v(x_0)$ 之间夹角 θ 满足钝角条件 $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi$, 也就是说

$$\langle v(x), n_x \rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.1.3}$$

如果知道一个区域 Ω, 使得 (3.1.3) 式成立，则可判定 Ω 是方程 (3.1.2) 的一个稳定区域. 然而，一般情况下，$\partial\Omega$ 的法向量无法表达出来，这样就很难直接找到使 (3.1.3) 成立的区域 Ω. 因而它不适合作为一个定理出现.

现在从另外一个角度看这个问题. 为了简单，假设 $v(0) = 0$. 如果有一个连续可微函数

$$V : R^n \to R^1,$$

满足条件

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \forall |x| < R \text{ 对某个} R > 0, \tag{3.1.4}$$

$$\langle v(x), \nabla V(x) \rangle \leqslant 0, \quad \forall |x| < R. \tag{3.1.5}$$

则可判定在开球 $B_r(0)$ 内存在一个开区域 $\Omega(0\in\Omega)$, 使得 Ω 是方程 (3.1.2) 的一个 Lyapunov 稳定区域. 这是因为条件 (3.1.4) 表明函数 $V(x)$ 在 $x=0$ 的邻域是一个如图 3.2 所示的一个开口向上的 n 维曲面. 因而存在一个数 $r_0>0$, 使得 $V(x)$ 的等值面

$$\Gamma_{r_0}=\{x\in R^n|\ \ V(x)=r_0,\quad |x|<R\}$$

是包含 $x=0$ 的一个区域 Ω 的边界 $\partial\Omega=\Gamma_{r_0}$. 而条件 (3.1.5) 表明 $\Gamma_{r_0}=\partial\Omega$ 上每一点的外法向量 $n=\nabla V(x)$ 与 $v(x)$ 之间夹角为钝角，即 (3.1.3) 式成立.

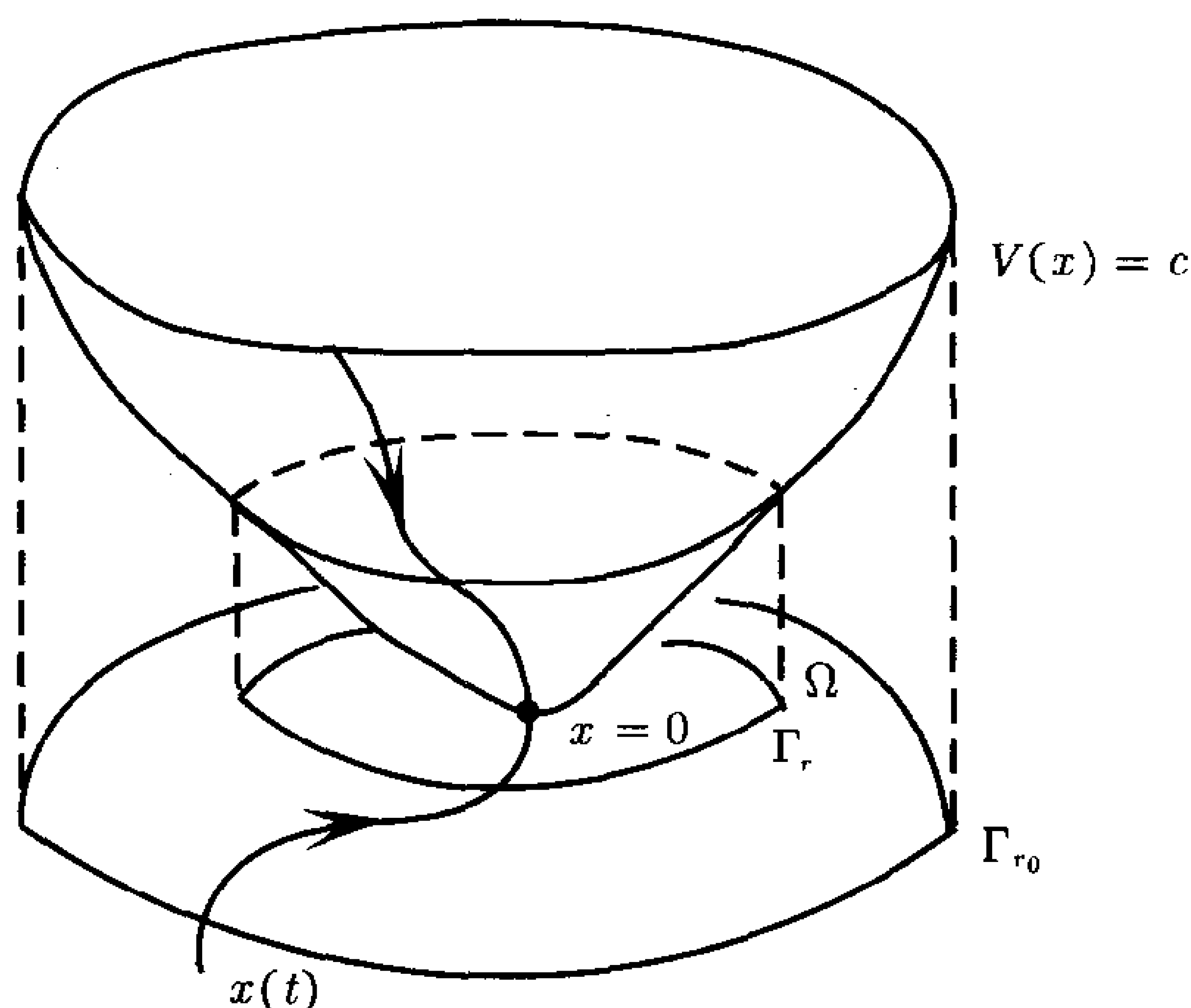


图 3.2

在许多实际数学问题中，找一个能满足条件 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的函数是可行的，因而可以作为一个定理出现，这就是下面要介绍的 Lyapunov 稳定性定理. 满足条件 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的函数称为 Lyapunov 函数.

进一步，如果将 (3.1.5) 改为

$$\langle v(x),\nabla V(x)\rangle<0,\quad \forall|x|<R,\quad x\neq 0, \tag{3.1.6}$$

那么 $x=0$ 是 (3.1.2) 的一个渐近稳定平衡点. 这是因为 Ω 内含有一族收敛于 $x=0$ 的 $V(x)$ 的等值面 $\Gamma_r\to 0(r\to 0)$. 条件 (3.1.6) 意味着 (3.1.2) 的流随着时间 $t\to\infty$ 而进入每一个等价面 Γ_r, 即趋于 $x=0$ 点. 从另一方面也能理解这一点. 从 (3.1.6) 看

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t))&=\langle\nabla V(x),\frac{dx}{dt}\rangle\\&=\langle\nabla V(x),v(x)\rangle\\&<0,\quad \forall|x|<R,\quad x\neq 0\end{aligned}$$

表示 (3.1.2) 解的轨道曲线 $x(t)$ 的像 $V(x(t))$ 的高度随时间而下降，最后降到最低点 $x=0$. 满足 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的函数称为严格的 Lyapunov 函数.

下面给出 Lyapunov 稳定性定理.

定理 3.1　令 $v(0)=0$. 若方程 (3.1.2) 有一个 Lyapunov 函数 $V(x)$, 即 $V(x)$ 是满足 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的连续可微函数，则存在一个开区域 $\Omega\subset B_r, 0\in\Omega$, 使得 Ω 是 (3.1.2) 的一个稳定区域. 又若 $V(x)$ 是严格的 Lyapunov 函数，即 V 满足 (3.1.4) 和 (3.1.6), 则 $x=0$ 是渐近稳定的平衡点.

证明　令 $V(x)$ 是满足 (3.1.4) 和 (3.1.5) 的一个连续可微函数，则存在常数 $C>0$, 使得等值面

$$\Gamma=\{x\in B_r|\ \ V(x)=C\}$$

是一个包含 $x=0$ 点开区域 Ω 的边界 $\partial\Omega=\Gamma, \Omega\subset B_R$, 并且对任何 $0<C_1<C$, 等值面

$$\Gamma_1=\{x\in B_R|\ \ V(x)=C_1\}\subset\Omega. \tag{3.1.7}$$

由 (3.1.5), 对任何 $x_0\in\Omega$,

$$\begin{aligned}\frac{dV(x(t,x_0))}{dt}&=\langle\nabla V(x(t,x_0)),v(x(t,x_0))\rangle\\&\leqslant 0,\quad 对 x(t,x_0)\in\Omega\subset B_r,\end{aligned}$$

这里 $x(t,x_0)$ 是 (3.1.2) 的一个解. 因而有

$$V(x(t,x_0))\leqslant V(x(0,x_0))=V(x_0)\leqslant C.$$

由 (3.1.7) 这意味着

$$x(t,x_0)\in\Omega,\quad \forall t\geqslant 0,\quad x_0\in\Omega.$$

这就证明了 Ω 是一个稳定区域.

令 $V(x)$ 又满足严格不等式 (3.1.6). 则对任何 $x_0\in\Omega$ 及 (3.1.2) 的解 $x(t,x_0)$, 有

$$\frac{dV(x(t,x_0))}{dt}<0,\quad \forall t\geqslant 0, \tag{3.1.8}$$

即 $V(x(t,x_0))$ 是 t 的严格下降函数. 条件 (3.1.6) 意味着

$$\lim_{t\to\infty}V(x(t,x_0))=0.$$

再由 (3.1.4) 推出

$$\lim_{t\to\infty}x(t,x_0)=0,\quad x_0\in\Omega\subset B_R.$$

这样定理得证.

§3.1.2 局部渐近稳定性

现在考虑下面非线性演化方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + G(u), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3.1.9}$$

这里 $L: X_1 \to X$ 是一个线性有界算子，$G: X_1 \to X$ 是一个 $C^r(r \geq 1)$ 的映射.

这一节主要考虑方程 (3.1.9) 平衡点的渐近稳定性. 为了帮助理解问题的实质，先从简单的有限维情况进行分析，然后再讨论无穷维情况.

令 $X_1 = X_2 = R^n, L$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 并且满足

$$\text{Re}\lambda_k < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.1.10}$$

$G: R^n \to R^n$ 满足

$$G(u) = o(|u|), \quad u \in R^n. \tag{3.1.11}$$

在 §2.4.1 中, 我们主要是强调稳定与不稳定流形存在性的实质, 而忽略了在流形中流的稳定性与不稳定性的实质. 现在用简单明了的分析来阐明条件 (3.1.10) 和 (3.1.11) 意味着平衡点 $u = 0$ 的渐近稳定性.

由矩阵的 Jordan 定理，对任 $\varepsilon > 0$, 可选取适当的坐标系 $(x_1, \cdots, x_n)$ 使得 L 为如下形式

$$L = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix},$$

其中 J_i 为 Jordan 块矩阵，或为对角矩阵，或为如下形式的矩阵

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ \varepsilon & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \varepsilon & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i & 0 & & & & \\ \beta_i & \alpha_i & & & & & \\ 0 & \varepsilon & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & \varepsilon & \alpha_i & -\beta_i \\ & 0 & & 0 & 0 & \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

取内积有

$$\langle Lx + G(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \text{Re}\lambda_k x_k^2 + \varepsilon \sum_j x_j x_{j+1} + \langle G(x), x \rangle.$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，由 (3.1.10) 和 (3.1.11) 从上式推出

$$\begin{aligned}\langle Lx+G(x),x\rangle &\leqslant -\alpha|x|^2+o(|x|^2)\\ &<0,\quad \forall |x|<\delta,\quad 对某个\delta>0,\end{aligned}$$

这里 $\alpha>0$ 为某个常数.

对 Lyapunov 函数 $V(x)=\dfrac{1}{2}|x|^2, \nabla V(x)=x$, 上式意味着条件 (3.1.4) 和 (3.1.6) 被满足，因而从定理 3.1 可知， $u=0(x=0)$ 是 (3.1.9) 的局部渐近稳定平衡点.

下面就将这一性质推广到无穷维情况.

定理 3.2 令 $L:X_1\to X$ 是一个扇形算子， $G:H_\alpha\to H$ 对某个 $0\leqslant\alpha<1$ 是一个 $C^r(r\geqslant 1)$ 映射， $v\in X_1$ 是 (3.1.9) 的一个平衡点. 如果 $L+DG(v)$ 的谱 λ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda<-\varepsilon,\quad 对某个\varepsilon>0.$$

这里 $DG(v)$ 为 G 在 v 点的导算子, 则 v 是 (3.1.9) 的一个局部渐近稳定平衡点. 并且是指数衰减的，即存在常数 $M>0,\sigma>0$ 和 $\delta>0$, 使当 $\|u_0\|<\delta$ 时，方程 (3.1.9) 的解 $u(t,u_0)$ 满足

$$\|u(t,u_0)-v\|_X\leqslant Me^{-\sigma t},\quad \forall t\geqslant 0.$$

证明 由定理 2.19(或注 2.2),$L+DG(v):X_1\to X$ 仍是一个扇形算子. 则 (3.1.9) 的解可表达为

$$\widetilde{u}(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-\tau)G_1(\widetilde{u})d\tau,$$

这里 $T(t)$ 是由 $L+DG(v)$ 生成的解析半群, $\widetilde{u}=u-v, G_1(\widetilde{u})=G(\widetilde{u}+v)-DG(v)\widetilde{u}$, 并且满足

$$G_1(\widetilde{u})=o(\|\widetilde{u}\|_{X_\alpha}). \tag{3.1.12}$$

从定理 2.18 推得

$$\|\widetilde{u}\|_{X_\alpha}\leqslant Me^{-\delta t}\|u_0\|_X+\int_0^t \tau^{-\alpha}Me^{-\delta(t-\tau)}\|G_1(\widetilde{u})\|_X d\tau.$$

令

$$\|\widetilde{u}(t)\|_{X_\alpha}=e^{-\delta t}z(t),$$

则由 (3.1.12)，$z(t)$ 满足

$$z(t)\leqslant M\|u_0\|_X+M\int_0^t \tau^{-\alpha}e^{\delta\tau}o(e^{-\delta\tau}z(\tau))d\tau.$$

这意味着

$$z(t) \leqslant M\|u_0\|_X + M_1 \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} o(z(\tau)). \tag{3.1.13}$$

从 (3.1.13) 推出当 $z(0) = \|u_0\|_X$ 充分小时, $z(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是有界的. 定理得证.

当 $L : X_1 \to X$ 不是扇形算子时, 有下面的稳定性定理. 该定理对非线性阻尼波方程的稳定性是有用的.

定理 3.3 令 $L : X_1 \to X$ 是一个线性有界算子, 并且生成一个强连续半群 $T(t), G : X \to X$ 是连续映射满足

$$G(u) = o(\|u\|_X), \quad u \in X.$$

如果有常数 $M \geqslant 1, \delta > 0$, 使得

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{-\delta t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

那么 $u = 0$ 是 (3.1.9) 的一个局部渐近稳定的平衡点, 并且是指数衰减的.

§3.2 经典的全局吸引子存在性理论

这一节主要介绍一般 Banach 空间上动力系统的一些基本概念和理论. 这些动力系统是直接与常微分方程和偏微分方程的解相关连. 一般微分方程都能化为如方程 (3.1.1) 的抽象形式, 因而由方程 (3.1.1) 生成的动力系统理论直接反映了具有耗散结构微分方程的动力学行为.

§3.2.1 基本概念

Banach 空间上一族连续映射 $\{S(t)|t \geqslant 0\}$ 称为是由方程 (3.1) 生成的算子半群 (或动力系统), 如果 $S(t)$ 满足下面性质

$$\begin{cases} S : [0,\infty) \times X \to X\text{是连续的}, \\ S(0) = id\text{为}X\text{上恒等算子}, \\ S(t+s) = S(t)\cdot S(s), \quad \forall t, s \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

并且方程 (3.1.1) 的解能够表达为

$$u(t, u_0) = S(t)u_0, \quad \forall t \geqslant 0.$$

在动力系统理论中, 空间 X 上的算子半群 $S(t)$ 是独立于方程的, 它的定义是由 (3.2.1) 给出, 这就使得动力系统理论更具有一般性意义. 然而这里给出的

算子半群定义是与非线性演化方程相关连，主要是强调研究算子半群的动机，并表明我们特别是对非线性演化方程生成出的算子半群感兴趣.

从定义中可以看出， X 空间上的算子半群本质上就是由 X 上演化方程的解抽象出的概念. 那么，以算子半群为对象，要研究非线性演化方程的动力学行为，又怎样去研究它们，这与直接从方程的角度去研究有什么区别呢？下面就说明这些问题.

令 $u(t,u_0)$ 是方程 (3.1.1) 的一个解. 那么在空间 X 中这个解 $u(\cdot,u_0)$: $[0,\infty)\to X$ 代表了一条从 u_0 出发的曲线，通常称为方程 (3.1.1) 的以 u_0 为起点的轨道. 从算子半群的角度，这条轨道是下面的集合

$$\cup_{t\geqslant 0}S(t)u_0.$$

特别地，当 $D\subset X$ 是一个集合时，下面集合

$$\Omega=\cup_{t\geqslant 0}S(t)D,\quad D\subset X$$

代表方程 (3.1.1) 从集合 D 出发的流，也就是方程 (3.1.1) 从 D 内所有点出发的轨道集合. 经过时间 $\tau>0$ 后，这个流 Ω 将收缩到它的一个子集 Ω_τ 上，如图 3.3 所示.

$$\Omega_\tau=\cup_{t\geqslant\tau}S(t)D.$$

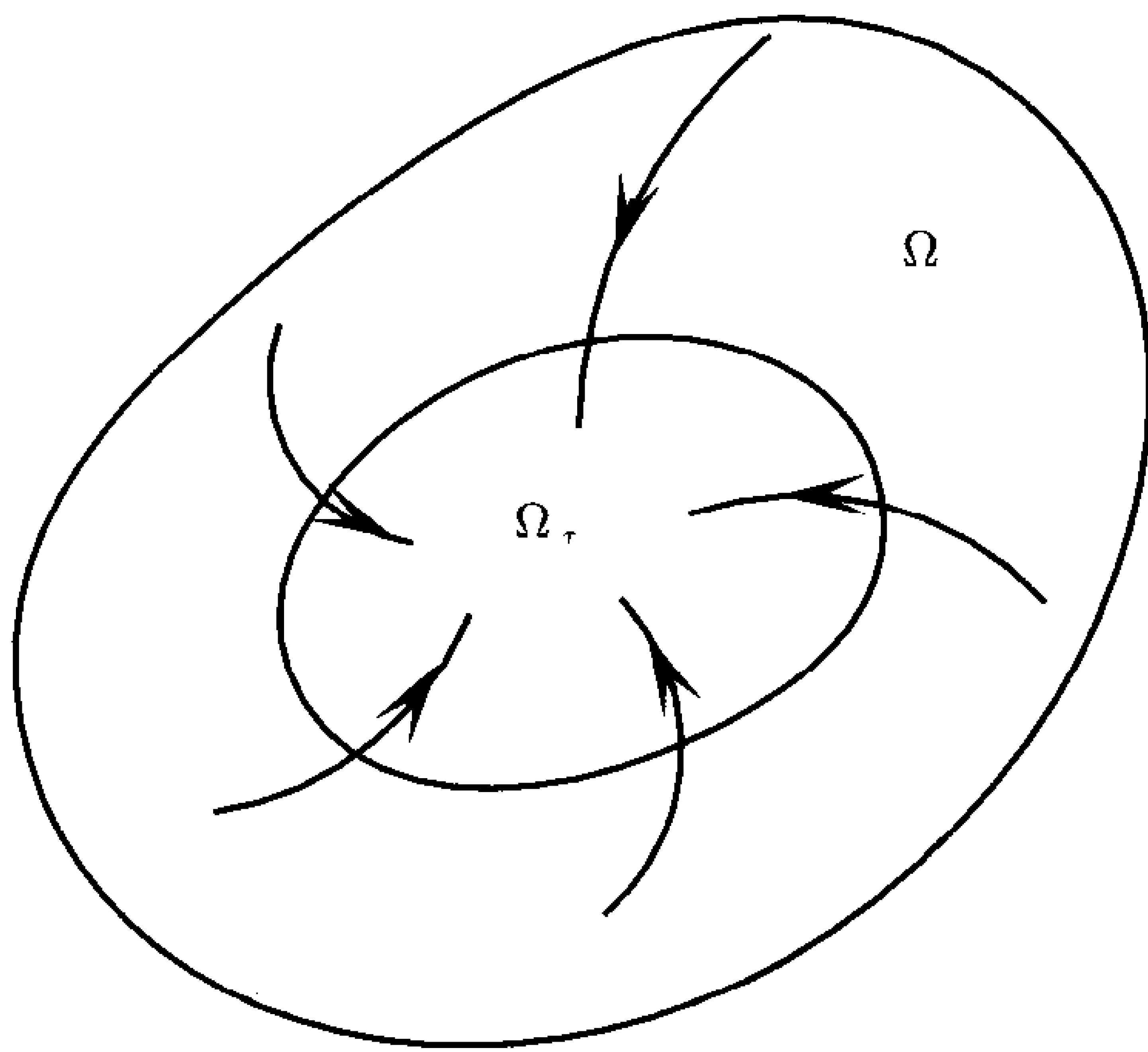


图 3.3

回忆方程 (3.1.1) 平衡点渐近稳定的定义，其特征是平衡点 u_0 邻域的解随时间 $t\to\infty$ 而收敛到 u_0, 从动力系统的角度，平衡点 u_0 的渐近稳定性特征是 u_0 邻域 Ω 的流 Ω_t 随时间 $t\to\infty$ 而收缩到 u_0 点. 这两种观念的差别在于第一种情况是函数收敛，而第二种情况是空间 X 中集合的收敛，这两种区域导致了研究非线性演化方程动力学在方法和结果上的根本差别. 很容易看出，对于平

衡点的渐近稳定性定理，如 Lyapunov 稳定性定理 (定理 3.1 和定理 3.2)，应用算子半群方法是无法获得，必须从方程角度证明．然而，我们也能看到，在许多情况下一个区域 Ω 的流 Ω_t 随时间 $t \to \infty$ 不是收缩到某一点，而是收缩到 X 中的某一紧集 Σ 上，即

$$\lim_{\tau\to\infty} \bar{\Omega}_\tau = \cap_{\tau\geqslant 0}^{\infty}\overline{\cup_{t\geqslant\tau}S(t)\Omega} = \Sigma \subset \Omega,$$

Ω 是 Σ 的一个邻域．这就意味着集合 Σ 吸收方程 (3.1.1) 在 Ω 内的所有解，即随 $t \to \infty$, 每个 (3.1.1) 在 Ω 内的解 $u(t)$ 与 Σ 之间距离收敛到零

$$\inf_{v\in\Sigma} \|u(t) - v\|_X \to 0, \quad t \to \infty.$$

这样，在动力系统中流的观念作用下，我们能够将古典的平衡点 Lyapunov 渐近稳定性概念推广到一般集合上的稳定性概念，这样的集合 Σ 现在称之为吸引子，它要求是紧的并且是流作用下不变的．

$$S(t)\Sigma = \Sigma, \quad \forall t \geqslant 0.$$

方程 (3.1.1) 的吸引子存在性问题就是动力系统的一个重要研究课题．一般情况下，这个问题必须借助于算子半群方法，而直接从方程角度无法解．

现在，回过来从数学严格的角度介绍动力系统中的一些基本概念．下面，总是记 $S(t)$ 为方程 (3.1.1) 生成的算子半群．

定义 3.3 一个集合 $\Sigma \subset X$ 称为是方程 (3.1.1) 的不变集，如果 $S(t)\Sigma = \Sigma, \forall t \geqslant 0$. 一个 (3.1.1) 的不变集 $\Sigma \subset X$ 称为吸引子，如果 Σ 是一个紧集，并且存在 Σ 的一个邻域 $U \subset X$, 使得对任 $u_0 \in U$ ，有

$$\inf_{v\in\Sigma} \|S(t)u_0 - v\|_X \to 0, \quad \text{当} t \to \infty.$$

此时称 Σ 吸引 U. 特别地，如果 Σ 吸引整个空间 X, 则称 Σ 为一个全局吸引子．

对于一个集合 $D \subset X$. 定义 D 的 ω 极限集为

$$\omega(D) = \cap_{s\geqslant 0}\overline{\cup_{t\geqslant s}S(t)D},$$

这里的闭包是在 X 范数下取的．同样，如果存在， D 的 α 极限集定义为

$$\alpha(D) = \cap_{s\geqslant 0}\overline{\cup_{t\geqslant s}S(-t)D}.$$

定义 3.4 令 $D \subset X$ 是一个子集， $U \subset X$ 是包含 D 的一个开集，称 D 是在 U 内的一个吸收集，如果 U 的任何有界集的轨道在某个时间后 (该时间依赖于该集合) 进入 D, 也就是说，对任何有界集 $B \subset U$, 存在时间 $t_0 = t_0(B)$ ，使得对所有 $t \geqslant t_0(B), S(t)B \subset D$.

§3.2.2 全局吸引子存在性

这一小节主要介绍和证明全局吸引子的存在性定理.

一个算子半群 $S(t):X\to X$ 对充分大的 $t>0$ 称为是一致紧的，如果对任何有界集 $B\subset X$ ，存在 $t_0>0$ ，使得下面集合

$$\overline{\cup_{t\geqslant t_0}S(t)B}$$

在 X 中是一个紧集.

定理 3.4　令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 X 上的一个算子半群， $U\subset X$ 是一个开集，并且假设

(1) $S(t)$ 是对充分大的 $t>0$ 是一致紧的，以及

(2) 在 U 中存在一个有界吸收集 B.

那么， B 的 ω 极限集 $\mathcal{A}=\omega(B)$ 是一个吸引 U 的吸引子，并且当 U 是连通时， $\mathcal{A}$ 也是连通的. 特别地，当 $U=X$ 时， $\mathcal{A}$ 是全局吸引子.

证明　分三步进行.

第一步. 证明 $\omega(B)$ 是非空紧不变集.

因为 $B\neq\varnothing$, 故

$$\overline{\cup_{t\geqslant s}S(t)B}\neq\varnothing,\quad \forall s\geqslant 0.$$

由

$$\overline{\cup_{t\geqslant s_1}S(t)B}\subset\overline{\cup_{t\geqslant s_2}S(t)B},\quad \forall s_1>s_2,$$

可知

$$\omega(B)=\cap_{s\geqslant 0}^{\infty}\overline{\cup_{t\geqslant s}S(t)B}\neq\varnothing.$$

再由假设 (1),$\omega(B)$ 是紧集.

证明 $\omega(B)$ 是不变集. 容易看到 $\varphi\in\omega(B)$ 的充要条件是存在 $\varphi_n\in B$ 及 $t_n\to\infty$, 使得

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi,\quad 当n\to\infty.$$

若 $\psi\in S(t)\omega(B)$, 那么 $\psi=S(t)\varphi,\varphi\in\omega(B)$. 这样, 存在序列 $\{\varphi_n\}\subset B,t_n\to\infty$, 满足

$$S(t)S(t_n)\varphi_n=S(t+t_n)\varphi_n\to S(t)\varphi=\psi.$$

这就表明 $\psi\in\omega(B)$. 即 $S(t)\omega(B)\subset\omega(B)$.

相反地，若 $\varphi\in\omega(B)$, 再考虑如上所述的序列 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{t_n\}$. 当 $t_n>t$ 时，注意到 $S(t_n-t)\varphi_n$ 在 X 中是相对紧的，这样，存在某个 $\psi\in H$, 使得

$$S(t_n-t)\varphi_n\to\psi,\quad 当n\to\infty,$$

这就推出 $\psi \in \omega(B)$. 此外，由

$$S(t_n)\varphi_n = S(t)S(t_n - t)\varphi_n \to S(t)\psi,$$

及

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi, \quad \text{当} n \to \infty.$$

故有 $\varphi = S(t)\psi \in S(t)\omega(B)$. 这就推出

$$\omega(B) \subset S(t)\omega(B), \quad \forall t \geqslant 0.$$

因而 $S(t)\omega(B) = \omega(B), \forall t \geqslant 0$.

第二步. $\omega(B)$ 是吸引 U 的吸引子.

用反证法. 假设存在有界集 $B_0 \subset U$ 和 $t_n \to \infty (n \to \infty)$，使得

$$\operatorname{dist}(S(t_n)B_0, \mathcal{A}) \geqslant \delta > 0, \quad \forall n \geqslant 1,$$

这里两个集合 A 和 B 的距离 $\operatorname{dist}(A, B)$ 定义为

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_X. \tag{3.2.2}$$

这样，对每个 n 存在 $x_n \in B_0$, 使得

$$\operatorname{dist}(S(t_n)x_n, \mathcal{A}) \geqslant \frac{\delta}{2} > 0. \tag{3.2.3}$$

因为 B 是吸收集，再由条件 (1), 对充分大的 n, 有

$$\begin{cases} S(t_n)x_m \in B, \quad \forall n \geqslant N, \quad m = 1, 2, \cdots, \\ \lim\limits_{n \to \infty} S(t_n)x_n = x_0. \end{cases}$$

由

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} S(t_n)x_n = \lim\limits_{n \to \infty} S(t_n - t_N)S(t_N)x_n, \\ S(t_N)x_n \in B, \end{cases}$$

可知

$$\lim_{n \to \infty} S(t_n - t_N)S(t_N)x_n = x_0,$$

$$x_0 \in \cap_{s \geqslant t_N}^{\infty} \overline{\cup_{t \geqslant s} S(t)B} = \omega(B) = \mathcal{A}.$$

此与 (3.2.3) 矛盾.

第三步. 当 U 是连通时，$\mathcal{A} = \omega(B)$ 也是连通的.

用反证法. 假设 $\mathcal{A}$ 不连通,

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2,$$

$$\mathcal{A}_i\subset U_i(i=1,2),\quad \bar{U}_1\cap\bar{U}_2=\varnothing.$$

因为 $\mathcal{A}\subset B$, 则 $\mathcal{A}=S(t)\mathcal{A}\subset S(t)B$. 因为 B 是连通的, 所以 $S(t)B$ 也是连通的. 这样

$$U_i\cap S(t)B\neq\varnothing,\quad i=1,2,$$

但是 U_1+U_2 并不覆盖 $S(t)B$. 因此存在 $x_n\in S(t_n)B, x_n\notin U_1+U_2$. 但是 $\mathcal{A}$ 吸引 $\{x_n\}$, 并且 $\{x_n\}$ 相对紧 (由条件 (1)). 因而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\in\mathcal{A},$$

此与 $x_n\notin U_1+U_2$ 矛盾. 定理证毕.

§3.2.3　吸引子的摄动稳定性

当对方程 (3.1.1) 作一小摄动时,

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}=F(v)+H_\eta(v),\\ v(0)=v_0,\end{cases}\tag{3.2.4}$$

这里, $H_\eta:X_1\to X$ 满足

$$\|H_\eta(v)\|_X\to 0,\quad 当\eta\to 0,\quad v\in X_1.$$

那么 (3.2.4) 生成一个算子半群

$$\{S_\eta(t)\}_{t\geqslant 0}.$$

很自然地, 人们要关心当 η 充分小时, $S_\eta(t)$ 与 $S(t)$ 的吸引子之间的偏差是怎样的. 下面的定理表明, 吸引子在小摄动下是稳定的. 有时也称这种稳定性为吸引子的上半连续性.

假设算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 有一个吸引子 $\mathcal{A}$, 它吸引一个开集 $U\in X$, 并假设对每个有界区间 $I\subset(0,\infty)$,

$$\sup_{u_0\in U}\sup_{t\in I}\|S_\eta(t)u_0-S(t)u_0\|_X\to 0,\quad 当\eta\to 0.\tag{3.2.5}$$

定理 3.5　在 (3.2.5) 的条件下, 如果对每个 $\eta>0$ 充分小, $S_\eta(t)$ 有一个吸引子 $\mathcal{A}_\eta$, 它吸引 $\widetilde{U}\subset X$, 这里 $\widetilde{U}$ 是 $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}_\eta$ 的一个邻域并独立于 η. 则 $\mathcal{A}_\eta$ 依 (3.2.2) 所定义的距离收敛于 $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{dist}(\mathcal{A}_\eta,\mathcal{A})\to 0,\quad 当\eta\to 0.$$

证明 我们将证明，对任 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta_0 > 0$ 及 $T_0 > 0$, 使得当 $0 < \eta < \eta_0, t > T_0$ 时,

$$\text{dist}(\mathcal{A}_\eta, \mathcal{A}) < \varepsilon. \tag{3.2.6}$$

因为 $\mathcal{A}$ 吸引 U, 则当 $t > T_0$ 时,

$$\text{dist}(S(t)V, \mathcal{A}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $V = U \cap \widetilde{U}$. 对 $I = [T_0, 2T_0]$ 由 (3.2.5)，能够找到 $\eta_0 > 0$，使得

$$\text{dist}(S_\eta(t)V, S(t)V) < \varepsilon/2, \tag{3.2.7}$$

对任何 $t \in [T_0, 2T_0]$ 及 $0 < \eta < \eta_0$.

因而，(3.2.6) 对每个 $0 < \eta < \eta_0$ 和 $t \in [T_0, 2T_0]$ 成立. 用归纳法，假设对每个 $t \in [T_0, nT_0]$,(3.2.6) 成立，然后证明对 $t \in [nT_0, (n+1)T_0]$ 和 $0 < \eta < \eta_0$, (3.2.7) 成立即可. 令 $t = (n-1)T_0 + \tau, \tau \in [T_0, 2T_0]$, 则

$$S_\eta(t)V = S_\eta(\tau)S_\eta((n-1)T_0)V. \tag{3.2.8}$$

由归纳假设,

$$\text{dist}(S_\eta((n-1)T_0)V, \mathcal{A}) < \varepsilon/2,$$

故 $S_\eta((n-1)T_0)V \subset V$. 这样由 (3.2.8) 可推出 (3.2.7) 对任何 $t \in [nT_0, (n+1)T_0]$ 和 $0 < \eta < \eta_0$ 成立. 定理证毕.

§3.2.4 变分结构演化方程全局吸引子

由定理 3.4 给出的全局吸引子存在性结果完全由算子半群自身的性质所决定. 如何把这一抽象定理与方程 (3.1.1) 连系起来是了解全局吸引子存在性定理怎样应用到微分方程中去的关键. 我们将讨论一类特殊的非线性演化方程，从这个例子可以看到定理 3.4 是如何应用到具体问题中去的.

令 H_1 和 H 是两个 Hilbert 空间，$H_1 \subset H$ 是一个紧稠密包含，$L : H_1 \to H$ 是一个扇形算子，并定义分数次空间 $H_\alpha = D(L^\alpha), \alpha \in R^1$. 令 $G : H_\alpha \to H$ 对某个 $0 < \alpha < 1$ 是紧映射. 考虑下面非线性演化方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Lu + G(u), \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

假设存在一个泛函 $F : H_\alpha \to R^1$，使得

$$DF = L + G, \tag{3.2.10}$$

$$F(u) \leqslant -\beta_1\|u\|_{H_\alpha}^2 + \beta_2, \tag{3.2.11}$$

$$\langle Lu + Gu, u\rangle_H \leqslant -C_1\|u\|_{H_\alpha}^2 + C_2, \tag{3.2.12}$$

这里 DF 为 F 的导算子， $\beta_1, \beta_2, C_1, C_2 > 0$ 为常数.

然后，有下面的全局吸引子存在性定理.

定理 3.6 在条件 (3.2.10)~(3.2.12) 的假设下，方程 (3.2.9) 在 H 中具有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$, 并且 $\mathcal{A}$ 在 H 范数下吸引 H 中的任何有界集.

证明 下面分三步进行证明. 从证明的过程中可以看到定理 3.4 是如何用到方程上.

第一步. 证明方程 (3.2.9) 存在唯一整体解

$$u \in C^0([0,\infty), H_\alpha) \cap W^{1,2}([0,\infty), H). \tag{3.2.13}$$

使用标准 Galerkin 程序证明此断言. 取 $\{e_k | k = 1, 2, \cdots\} \subset H$ 是一组标准正交基，记

$$H_n = \left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k | \alpha_k \in R^1, 1 \leqslant k \leqslant n\right\},$$

$$\widetilde{H}_n = \left\{\sum_{k=1}^n \beta_k(t) e_k | \beta_k \in C^1[0,\infty), 1 \leqslant k \leqslant n\right\}.$$

考虑下面常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = \langle Lu_n + Gu_n, e_k\rangle_H, 0 \leqslant k \leqslant n, \\ x_k(0) = \langle \phi, e_k\rangle_H, \end{cases} \tag{3.2.14}$$

这里 $u_n = \sum_{k=1}^n x_k(t) e_k$. 由常微分方程理论，方程 (3.2.14) 存在唯一局部解

$$\{x_1(t), \cdots, x_n(t)\}, \quad 0 \leqslant t < \tau.$$

从 (3.2.14) 可以得到

$$\langle u_n, v\rangle_H = \int_0^t \langle Lu_n + Gu_n, v\rangle_H dt + \langle \phi, v\rangle_H, \quad \forall v \in H_n, \tag{3.2.15}$$

$$\int_0^t \left[\langle \frac{du_n}{dt}, v\rangle_H - \langle Lu_n + Gu_n, v\rangle_H\right] = 0, \quad \forall v \in \widetilde{H}_n. \tag{3.2.16}$$

将 $v = u_n$ 代入 (3.2.16), 再由 (3.2.12) 可得

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_H^2 + C_1 \int_0^t \|u_n\|_{H_\alpha}^2 dt \leqslant C_2 t + \frac{1}{2}\|\phi\|_H^2.$$

由 Gronwall 不等式和 $\|\cdot\|_H \leqslant \|\cdot\|_{H^\alpha}$ 可推出

$$\|u_n\|_H^2 \leqslant \|\phi\|_H^2 e^{-2C_1 t} + C_2 C_1^{-1}(1 - e^{-2C_1 t}).$$

这意味着 (3.2.13) 的解可延拓到 $0 \leqslant t < \infty$. 这样, 就推出 $u_n \in C^1([0,\infty), H_n)$ 满足 (3.2.15) 和 (3.2.16).

将 $v = du_n/dt$ 代入 (3.2.16) 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \left[\left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_H^2 - \langle Lu_n + Gu_n, \frac{du_n}{dt}\rangle_H\right] dt \\ &= \int_0^t \left[\left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_H^2 - \langle DF(u_n), \frac{du_n}{dt}\rangle_H\right] dt \quad (\text{由 } (3.2.10)) \\ &= \int_0^t \left[\left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_H^2 - \frac{d}{dt}F(u_n)\right] dt \\ &= \int_0^t \left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_H^2 dt - F(u_n) + F(\phi_n), \end{aligned}$$

这里 $\phi_n = \sum_{i=1}^n \langle \phi, e_i\rangle_H e_i$. 因而有

$$\int_0^t \left\|\frac{du_n}{dt}\right\|_H^2 dt - F(u_n) = -F(\phi_n). \tag{3.2.17}$$

当 $\phi \in H_\alpha$ 时, $\{\phi_n\}$ 是在 H_α 内有界, 故从 (3.2.11) 和 (3.2.17) 推出

$$\{u_n\} \subset W^{1,2}([0,\infty), H) \cap L^\infty([0,\infty), H_\alpha)$$

是有界的. 令

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u_0, & \text{在} W^{1,2}([0,\infty), H), \\ u_n \rightharpoonup^* u_0, & \text{在} L^\infty([0,\infty), H_\alpha). \end{cases} \tag{3.2.18}$$

由于 $G: H_\alpha \to H$ 是紧映射, 故从 (3.2.15) 可得

$$\langle u_0, v\rangle_H - \int_0^t \langle Lu_0 + Gu_0, v\rangle_H dt = \langle \phi, v\rangle_H$$

对任何 $v \in H_n$ 成立. 因为 $\cup_{r=1}^\infty H_n$ 在 H_α 中稠密, 故有

$$\begin{cases} \langle \dfrac{du_0}{dt} - Lu_0 - Gu_0, v\rangle_H = 0, & \forall t \geqslant 0, \quad v \in H_\alpha, \\ \langle u_0(0), v\rangle_H = \langle \phi, v\rangle_H, & \forall v \in H_\alpha. \end{cases}$$

这样得到

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dt} = Lu_0 + Gu_0, & \text{在弱意义下}, \\ u_0(0) = \phi, & \phi \in H_\alpha. \end{cases} \tag{3.2.19}$$

因为 $L: H_1 \to H$ 是一个扇形算子，故 (3.2.19) 的解 u_0 满足

$$u_0 = e^{-tL}\phi + \int_0^t e^{-(t-\tau)L} G(u_0) d\tau. \tag{3.2.20}$$

从 (3.2.18) 和 (3.2.20) 可推出 (3.2.13), 并且解是唯一的.

第二步. 需要证明 (3.2.9) 的整体解也满足

$$u \in C^0([0,\infty), H) \cap C^0((0,\infty), H_\alpha), \tag{3.2.21}$$

即当初值 $\phi \in H$ 时， $u(t,\phi) \in H_\alpha, \forall t > 0$.

事实上，应用上述标准 Galerkin 程序，从 (3.2.15) 可以推出当 $\phi \in H$ 时方程 (3.2.9) 有一个弱解

$$u_0 \in L^\infty([0,\infty), H) \cap L^2([0,\infty), H_\alpha),$$

即 u_0 满足

$$\langle u_0, v\rangle_H = \langle \phi, v\rangle + \int_0^t \langle Lu_0 + Gu_0, v\rangle_H dt,$$

对任何 $v \in H$. 这表明，对几乎所有 $t > 0, u_0(t) \in H_\alpha$. 再由第一步的结论及 (3.2.9) 解的唯一性可推出 (3.2.21).

第三步. 方程 (3.2.9) 在 H 中具有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$.

由 (3.2.13) 和 (3.2.21), 方程 (3.2.9) 分别在空间 H 和 H_α 上生成出一个算子半群

$$S(t): H \to H,$$

$$S(t): H_\alpha \to H_\alpha,$$

使得 (3.2.9) 的解 $u(t,\phi)$ 可表达为

$$u(t,\phi) = S(t)\phi, \quad \phi \in H.$$

首先证明 $S(t)$ 在 H 中有一个吸集 $B_R \subset H, B_R$ 为 H 中以 $u = 0$ 为中心，R 为半径的球体. 对方程 (3.2.9) 两边关于解 u 取内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = \langle Lu + Gu, u\rangle_H.$$

两边关于 t 积分，由 (3.2.12) 推出

$$\begin{aligned}\|u(t,\phi)\|_H^2 &= 2\int_0^t \langle Lu + Gu, u\rangle_H dt + \|\phi\|_H^2 \\ &\leqslant -2C_1 \int_0^t \|u\|_{H_\alpha}^2 dt + \|\phi\|_H^2 + 2C_2 t\end{aligned}$$

$$\leqslant -2C_1\int_0^t \|u\|_H^2 dt + \|\phi\|_H^2 + 2C_2 t \quad (\text{由}\|\cdot\|_H \leqslant \|\cdot\|_{H_\alpha}). \tag{3.2.22}$$

由 Gronwell 不等式，从 (3.2.22) 可得

$$\|u(t,\phi)\|_H^2 \leqslant \|\phi\|_H^2 e^{-2C_1 t} + C_2 C_1^{-1}(1-e^{-2C_1 t}).$$

从而可知当 $R > C_2C_1^{-1}$ 时，对任何 $\phi \in H$, 存在 $t_0 = t_0(\phi)$, 使得

$$S(t)\phi = u(t,\phi) \in B_R, \quad \text{当} t > t_0.$$

因而 B_R 是 $S(t)$ 在 H 中的一个吸收集.

其次要证明算子半群 $S(t)$ 对 $t > 0$ 充分大时是一致紧的. 因为 $H_1 \subset H$ 是紧的，故 $H_\alpha \subset H$ 也是紧的. 因而只需证明对任有界集 $B \subset H$, 集合 $S(t)B \subset H_\alpha$ 对 $t > 0$ 充分大是一致有界的.

关于方程 (3.2.9) 两边对 u_t 作内积可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du}{dt}\right\|_H^2 &= \langle Lu + Gu, u_t\rangle_H \\ &= \frac{d}{dt}F(u),\end{aligned}$$

两边关于 t 积分，再由 (3.2.11) 可得

$$\beta_1\|u\|_{H_\alpha}^2 \leqslant \beta_2 - \int_\tau^t \left\|\frac{du}{dt}\right\|_H^2 dt - F(u(\tau)) \tag{3.2.23}$$

对任何 $\tau \geqslant 0$ 成立.

取 $\tau > 0$, 需要证明 $S(\tau)B \subset H_\alpha$ 是有界的. 从 (3.2.22) 可以得到

$$\int_0^\tau [C_1\|u(t,\phi)\|_{H_\alpha}^2 - C_2]dt \leqslant \frac{1}{2}\|\phi\|_H^2. \tag{3.2.24}$$

如果 $S(\tau)B \subset H_\alpha$ 是无界的，则存在 $\phi_n \in B$ ，使得

$$\|S(t)\phi_n\|_{H_\alpha} = \|u(t,\phi_n)\|_{H_\alpha} \to \infty, \quad n \to \infty$$

对任何 $0 \leqslant t \leqslant \tau$ 成立. 因而

$$\int_0^\tau \|u(t,\phi_n)\|_{H_\alpha} dt \to \infty, \quad n \to \infty,$$

此与 (3.2.24) 矛盾，因为 $\|\phi_n\| \leqslant M, M > 0$ 为一常数. 因此 $S(\tau)B \subset H_\alpha$ 是有界的对某个 $\tau > 0$. 再由 (3.2.23) 可以推知，对任何有界集 $B \subset H$,

$$S(t)B \subset H_\alpha, \quad \text{对} t > 0 \text{充分大是一致有界}.$$

这样就证明了 $S(t)$ 对 $t>0$ 充分大是一致紧的. 由定理 3.4 得到该定理. 证毕.

下面给出一个例子表明定理 3.6 的应用.

例 3.1 考虑下面抛物方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - C|u|^{p-1}u + f(x,u), \quad x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.2.25}$$

这里 $\Omega\subset R^2$ 是有界开集, $C>0, p>1$ 是某个常数, $f\in C^0(\Omega\times R^1)$ 满足

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|f(x,z)|}{|z|^p} = 0, \quad \forall x\in\bar{\Omega}. \tag{3.2.26}$$

在 (3.2.26) 条件下, 应用定理 3.6 可以证得方程 (3.2.25) 在 $L^2(\Omega)$ 中有一个全局吸引子. 建立下面空间

$$H = L^2(\Omega), \quad H_1 = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

定义算子 $L+G: H_1\to H$ 为

$$Lu = \Delta u, \quad Gu = -C|u|^{p-1}u + f(x,u).$$

则 $L+G$ 是下面泛函的导算子

$$F(u) = \int_\Omega \left[-|\nabla u|^2 - \frac{C}{p+1} + |u|^{p+1}g(x,u)\right]dx,$$

$$g(x,z) = \int_0^z f(x,z)dz.$$

显然 L 是扇形算子, $H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega), G: H_{\frac{1}{2}}\to H$ 是紧算子. 并且容易验证, 条件 (3.2.26) 意味着 $L+G$ 和 F 满足 (3.2.10)~(3.2.12). 因而 (3.2.25) 可化为 (3.2.9) 的抽象形式, 并且满足定理 3.6 的条件. 这样方程 (3.2.25) 在 $H=L^2(\Omega)$ 中具有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$.

§3.3 C 条件全局吸引子存在性理论

经典的全局吸引子存在性理论所要求的半群一致紧性条件在具体应用中需要更高一阶的一致有界正则性估计, 这是比较强的条件. 虽然有一些试图改进一致紧性的工作 [98]. 但是这些工作在本质上没有太大的突破. 最近一个非常好的进展是将一致紧性条件减弱为 C 条件 [71,47,118]. 该条件的最大优点就是适合

许多具有耗散结构的偏微分方程特点，不需要作更高一阶的正则性估计. 一般吸收集在那个空间便能证明吸引子就在那个空间. 必须指出，J.K.Hale[31] 关于全局吸引子存在性理论给出一个本质上与 C 条件等价的条件，但是他的那种形式是很难被应用到偏微分方程中去.

§3.3.1 非紧致性测度

这里只是简单介绍非紧致性测度概念及其一些基本性质. 利用这个概念可以引入算子半群 ω 极限紧的定义，它是 C 条件全局吸引子理论的基本概念.

定义 3.5 令 X 是一个无穷维 Banach 空间，$A\subset X$ 是一个有界子集. A 的非紧致性测度 $\gamma(A)$ 定义为

$$\gamma(A)=\inf\{\delta>0|A\text{允许一个直径}\leqslant\delta\text{的有限覆盖}\}.$$

这个定义实质上反映了无穷维空间中有界集的非紧致度. 例如，知道一个 n 维空间中边长为 1 的方体如果要用边长为 $\frac{1}{2}$ 的方体覆盖，则致少需要 2^n 个这样的方体. 这说明一个无穷维空间 X 中的任何有界开集，或者说一个非紧子集，是不能用有限个充分小直径的开集所覆盖. 容易看出非紧致性测度具有如下基本性质:

(1) $\gamma(B)=0$ 的充要条件为 $\bar{B}$ 是紧集;

(2) $\gamma(B_1+B_2)\leqslant\gamma(B_1)+\gamma(B_2)$;

(3) $B_1\subset B_2\Rightarrow\gamma(B_1)\leqslant\gamma(B_2)$;

(4) $\gamma(B_1\cup B_2)\leqslant\max\{\gamma(B_1),\gamma(B_1)\}$;

(5) $\gamma(B)=\gamma(\bar{B})$;

(6) 若 $B(r)$ 为一半径为 r 的球体，则 $\gamma(B(r))=2r$.

下面两个引理在 C 条件全局吸引子理论中起到关键作用. 它们刻画了一个紧集更细致的特征.

引理 3.1 令 X 是一个无穷维 Banach 空间，有如下分解

$$X=X_1\oplus X_2,\quad \dim X_1<\infty.$$

令 $P_i:X\to X_i$ 是规范投影，$A\subset X$ 是一个有界集. 如果 $P_2A\subset X_2$ 的直径小于 ε, 那么 $\gamma(A)<\varepsilon$.

证明 集合 A 能够被分解为

$$A=A_1+A_2,$$

其中 $A_1=P_1A\subset X_1, A_2=P_2A\subset X_2$. 因为 $\dim X_1<\infty, A_1$ 是一个紧集，故由非紧致测度基本性质 (2) 可得

$$\gamma(A)=\gamma(A_1+A_2)\leqslant\gamma(A_2).$$

而由定义可知 $\gamma(A_2) \leqslant A_2$ 的直径，故有

$$\gamma(A) \leqslant A_2\text{的直径} < \varepsilon.$$

引理证毕.

引理 3.2 令 X 是一个无穷维 Banach 空间，γ 是非紧致性测度. 假设 $\{A_n\}$ 是一列 X 中的有界闭集，满足下面性质:

(1) $A_n \neq \varnothing, \quad \forall n \in N$;

(2) $A_{n+1} \subset A_n$; 及

(3) $\gamma(A_n) \to 0, \quad$ 当 $n \to \infty$.

那么集合 $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是一个非空紧集.

证明 首先由集合理论知 $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是非空闭集. 如果 A 是非紧集，则

$$\gamma(A) = \delta > 0. \tag{3.3.1}$$

由于 $A \subset A_n, \quad \forall n \in N$, 由非紧测度基本性质 (3) 有

$$\gamma(A) \leqslant \gamma(A_n), \quad \forall n \in N.$$

然而 $\gamma(A_n) \to 0$, 当 $n \to \infty$, 此与 (3.3.1) 矛盾. 证毕.

§3.3.2　全局吸引子存在性的充要条件

现在, 我们利用前面介绍的非紧致性测度的概念引入下面 ω 极限紧的定义, 然后用 ω 极限紧的条件取代经典全局吸引子存在性定理中的一致紧性假设，从而给出全局吸引子存在性的充要条件. 最后再证明 ω 极限紧与 C 条件的某种等价性，而 C 条件在偏微分方程中是可适用的.

定义 3.6 一个定义在 X 空间上的算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 被称为是 ω 极限紧的，如果对每个有界集 $B \subset X$ 及任一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 > 0$, 使得

$$\gamma(\cup_{t\geqslant t_0} S(t)B) \leqslant \varepsilon,$$

这里 γ 为 X 中非紧致性测度.

定理 3.7 令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 X 上的一个算子半群，那么 $S(t)$ 在 X 中有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$ 的充分必要条件是:

(1) $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 ω 极限紧的，

(2) 在 X 中存在一个有界吸收集 $B \subset X$.

此外， B 的 ω 极限集就是这个吸引子 $\mathcal{A} = \omega(B)$.

证明 首先证明充分性. 由 $S(t)$ 是 ω 极限紧的，对任 $n \in N$, 存在 $t_n > 0$, 使得

$$\gamma(\overline{\cup_{t\geqslant t_n} S(t)B}) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

由引理 3.2 知，下面 ω 极限集

$$\mathcal{A} = \omega(B) = \cap_{s\geqslant 0}\overline{\cup_{t\geqslant s}S(t)B} = \cap_{n=1}^{\infty}\overline{\cup_{t\geqslant t_n}S(t)B}$$

是一个非空紧集.

现在证明 $\mathcal{A} = \omega(B)$ 是不变的. 与定理 3.4 的第一步证明方法一样可以证明

$$S(t)\omega(B) \subset \omega(B), \quad \forall t \geqslant 0.$$

只需证明

$$\omega(B) \subset S(t)\omega(B), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.3.2}$$

由极限集的定义知， $\varphi \in \omega(B)$ 的充要条件是存在 $\{\varphi_n\} \subset B$ 和 $t \to \infty$, 使得

$$S(t_n)\varphi_n \to \varphi, \quad 当 n \to \infty. \tag{3.3.3}$$

令 $\varphi \in \omega(B)$, 则存在 $\{\varphi_n\}$ 和 $t_n \to \infty$ 满足 (3.3.3). 需要证明 $\{S(t_n - t)\varphi_n\}$ 在 X 中是相对紧的. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在有 $t_\varepsilon > 0$, 使得

$$\gamma(\cup_{\tau\geqslant t_\varepsilon}S(\tau)B) < \varepsilon,$$

这意味着

$$\gamma(\cup_{\tau\geqslant t_\varepsilon + t}S(\tau - t)B) < \varepsilon.$$

另一方面，存在 N, 使得

$$\cup_{n\geqslant N}S(t_n - t)\varphi_n \subset \cup_{\tau\geqslant t_\varepsilon + t}S(\tau - t)B.$$

这就推出

$$\gamma(\cup_{n\geqslant N}S(t_n - t)\varphi_n) < \varepsilon.$$

对固定的 N_0, 由非紧致性测度基本性质 (1) 和 (2) 可以推得

$$\gamma(\cup_{n\geqslant N_0}S(t_n - t)\varphi_n) = \gamma(\cup_{n\geqslant N}S(t_n - t)\varphi_n) < \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 从上式可得

$$\gamma(\cup_{n\geqslant N_0}S(t_n - t)\varphi_n) = 0.$$

这就意味着 $\{S(t_n - t)\varphi_n\}$ 是相对紧集. 因而存在 $\psi \in X$ ，使得

$$S(t_n - t)\varphi_n \to \psi, \quad 当 n \to \infty.$$

这样由 (3.3.3) 知 $\psi \in \omega(B)$, 并且

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} S(t_n)\varphi_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n - t)\varphi_n = S(t)\psi.$$

即 $\varphi = S(t)\psi \in S(t)\omega(B)$. 因而 (3.3.2) 得证.

最后，证明 $\mathcal{A} = \omega(B)$ 是 H 中的全局吸引子的方法与证明定理 3.4 的方法是一样的. 这样，充分性得证.

现在证明必要性. 因为 $\mathcal{A}$ 是一个全局吸引子，所以 $\mathcal{A}$ 的 ε 邻域 $N_\varepsilon(\mathcal{A}) \subset X$ 是一个吸收集. 因此只需证明算子半群 $S(t)$ 是 ω 极限紧的.

由于 $N_\varepsilon(\mathcal{A})$ 是一个吸收集, 对每个有界集 $B \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_\varepsilon(B) > 0$ ，使得

$$\cup_{t\geqslant t_\varepsilon(B)} S(t)B \subset N_{\frac{\varepsilon}{4}}(\mathcal{A}) = \{x \in X | \ \operatorname{dist}(x, \mathcal{A}) < \frac{\varepsilon}{4}\}.$$

在另一方面，因为 $\mathcal{A}$ 是紧的，存在有限个元素 $x_1, \cdots, x_n \in X$, 使得

$$\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^n N(x_i, \frac{\varepsilon}{4}).$$

因而

$$N_{\frac{\varepsilon}{4}}(\mathcal{A}) \subset \cup_{i=1}^n N(x_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

这就意味着

$$\gamma(\cup_{t\geqslant t_\varepsilon(B)} S(t)B) \leqslant \gamma(N_{\frac{\varepsilon}{4}}(\mathcal{A})) \leqslant \varepsilon.$$

这样，定理得证.

虽然定理 3.7 给出全局吸引子存在性的充分必要条件, 但是由于非紧致性测度在一般情况下是不可计算的，因此算子半群 $S(t)$ 的 ω 极限紧性的条件在应用的层面上比一致紧性条件还难于验证. 然而，定理 3.7 的价值在于它能够作为一种中介，将难于验证的 ω 极限紧性条件转化为一个非常易于使用的 C 条件，这样就使得这项工作变得很有意义.

下面介绍 C 条件的定义.

定义 3.7 一个定义在 X 上的算子半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为是满足 C 条件，如果对任何有界集 $B \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在有 $t_B > 0$ 和一个有限维子空间 $X_1 \subset X$, 使得 $\{\|PS(t)B\|_X\}$ 是有界的，并且

$$\|(I - P)S(t)x\|_X < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_B, \quad x \in B,$$

这里 $P : X \to X_1$ 是一个规范投影.

定理 3.8 令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是一个定义在 X 上的算子半群. 那么下面结论成立:

(1) 如果 $S(t)$ 满足 C 条件，那么 $S(t)$ 是 ω 极限紧的.

(2) 当 X 是一致凸 Banach 空间时, 那么 $S(t)$ 是 ω 极限紧的充要条件是 $S(t)$ 满足 C 条件.

证明 结论 (1). 由非紧致测度的基本性质 (2) 和引理 3.1~3.2, 有

$$\begin{aligned}\gamma(\cup_{t\geqslant t_B}S(t)B) &\leqslant \gamma(P(\cup_{t\geq t_B}S(t)B))+\gamma((I-P)(\cup_{t\geqslant t_B}S(t)B))\\ &\leqslant \gamma(N(0,\varepsilon))=2\varepsilon.\end{aligned}$$

因此, $S(t)$ 是 ω 极限紧的.

结论 (2). 令 X 是一致凸 Banach 空间, 并且 $S(t)$ 是 ω 极限紧的. 那么对每个有界集 $B\subset X$ 及任何 $\varepsilon>0$, 存在 $t_B>0$, 使得

$$\gamma(\cup_{t\geqslant t_B}S(t)B)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由非紧致性测度定义, 这意味着存在有限个直径小于 $\varepsilon/2$ 的集合 $A_1,\cdots,A_n\subset X$, 使得

$$\cup_{t\geqslant t_B}S(t)B\subset\cup_{i=1}^{n}A_i.$$

令 $x_i\in A_i$, 则

$$\cup_{t\geqslant t_B}S(t)B\subset\cup_{i=1}^{n}N_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i).$$

令 $X_1=\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$, 因为 X 是一致凸的, 存在有一个投影 $P:X\to X_1$, 使得对任何 $x\in X$, 有

$$\|x-Px\|_X=\text{dist}(x,X_1).$$

因此有

$$\|(I-P)S(t)x\|_X\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

这说明 C 条件成立, 定理得证.

从定理 3.7 和定理 3.8 立刻得到下面定理.

定理 3.9 令 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是定义在 X 上的一个算子半群, 如果下面条件成立:

(1) 存在一个有界吸收集 $B\subset X$, 并且

(2) $S(t)$ 满足 C 条件,

那么 $S(t)$ 在 X 中有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$, 并且 $\mathcal{A}=\omega(B)$ 在 X 的范数下吸引 X 中任何有界集.

§3.3.3 非线性演化方程全局吸引子

ω 极限集的等价条件, C 条件, 使得我们能够对许多具有耗散结构的偏微分方程关于全局吸引子存在性问题建立一个一般方法. 更准确地说, 为了证明一个无穷维动力系统全局吸引子的存在性, 只需要验证

(1) 吸收集的存在性;

(2) C 条件成立.

这个 C 条件的主要优点就是它能够在吸收集所在的同一函数空间用能量估计证得, 而不像一致紧性条件那样, 必须到更高可微性函数空间中获得有界性估计. 下面仍以方程 (3.2.9) 为例来说明 C 条件全局吸引子理论的特点.

在定理 3.6 中, 为了应用一致紧性的全局吸引子理论获得 (3.2.9) 在 H 中全局吸引子存在性, 必须对方程中的算子 $L+G$ 加上变分结构的条件, 也就是 (3.2.10) 和 (3.2.11) 这两个假设, 以便在更强的拓扑空间 $H_\alpha(0<\alpha<1)$ 中获得解的一致有界性估计. 现在, 应用 C 条件全局吸引子理论, 将去掉变分结构这一条件来证得 (3.2.9) 全局吸引子存在性定理, 从而使人们了解如何利用 C 条件.

对方程 (3.2.9), 假设 $L=\mathcal{L}+B:H_1\to H$ 是一扇形算子, $\mathcal{L}:H_1\to H$ 为对称全连续场, $B:H_\theta\to H$ 对某个 $\theta(0<\theta\leqslant 1)$ 是有界线性算子而且是反对称的, 即 $\forall u,v\in H_1$,

$$\begin{cases}\langle \mathcal{L}u,v\rangle_H=\langle u,\mathcal{L}v\rangle_H,\\ \langle Bu,v\rangle_H=-\langle u,Bv\rangle_H.\end{cases}\tag{3.3.4}$$

假设 $G:H_\alpha\to H$ 对某个 $\alpha\left(\dfrac{1}{2}\leqslant\alpha<1\right)$ 是紧映射, 并且满足

$$\langle(1-\varepsilon)\mathcal{L}u+Gu,u\rangle_H\leqslant -C_1\|u\|_{H_\alpha}^2+C_2,\tag{3.3.5}$$

这里 $0\leqslant\varepsilon<\dfrac{1}{4}$ 为任意数, $C_1,C_2>0$ 为常数.

定理 3.10 在条件 (3.3.4) 和 (3.3.5) 的假设下, 如果方程 (3.2.9) 存在唯一整体解 $u\in C^0([0,\infty),H)$, 那么 (3.2.9) 在 H 中具有一个全局吸引子 $\mathcal{A}$.

证明 正如定理 3.6 的证明, 在定理的假设下, 方程 (3.2.9) 存在一个唯一的整体解

$$u\in C^0([0,\infty),H)\cap L^2((0,\infty),H_\alpha),$$

因而生成一个算子半群

$$S(t):H\to H,\quad \forall t\geqslant 0,$$

并且 $S(t)$ 在 H 中有一个吸收集.

只需验证 C 条件. 由线性算子的谱理论 (详细可见 4.1 节), 对称算子 $\mathcal{L}$ 的谱是由实特征值构成并且其特征向量全体构成 H 空间的一个正交基.

令 $\mathcal{L}$ 的所有特征值为 (计入重数)

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k\geqslant\cdots.$$

因为 $L=\mathcal{L}+B$ 为扇形算子, $B:H_\theta\to H(\theta<1)$ 有界, 故

$$\lambda_k\to-\infty,\quad 当k\to\infty.$$

其对应的特征向量 $\{e_k\}\subset H$ 形成标准正交基，即对任何 $u\in H$,

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}x_ke_k,\quad \|u\|_H=\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2.$$

对任何 $N>0$, 存在整数 k, 使得

$$-N\geqslant\lambda_j,\quad \forall j\geqslant k+1. \tag{3.3.6}$$

取空间 $E_1=\text{span}\{e_1,\cdots,e_k\},E_2=E_1^{\perp}$ 为 E_1 在 H 中的正交补空间. 则对任 $u\in H$,

$$u=u_1+u_2,$$
$$u_1=\sum_{i=1}^{k}x_ie_i\in E_1,$$
$$u_2=\sum_{j=k+1}^{\infty}x_je_j\in E_2.$$

记 $P_i:H\to E_i(i=1,2)$ 为规范投影. 需要证明对任何有界集 $B\subset H$ 及 $\delta>0$，存在 $t_0>0$，使得

$$\|P_1S(t)B\|_H\leqslant M,\quad \forall t>t_0,\quad M\text{为某一常数}, \tag{3.3.7}$$

$$\|P_2S(t)\phi\|_H<\delta,\quad \forall t>t_0,\quad \phi\in B. \tag{3.3.8}$$

由于 $S(t)$ 存在一个吸收集 B_r, 故对任何有界集 $B\subset H$，存在 $t_0>0$，使得 $S(t)B\subset B_r,\forall t>t_0$, 这意味着 (3.3.7) 成立.

由标准 Galerkin 程序，我们知道下面函数

$$u(t)=S(t)\phi,\quad \phi\in H$$

是方程 (3.2.9) 在弱意义下的解，即满足

$$\langle u,v\rangle_H=\int_0^t\langle Lu+Gu,v\rangle_Hdt+\langle\phi,v\rangle_H \tag{3.3.9}$$

对任何 $v\in L^2((0,\infty),H)$ 成立.

将 $v=u$ 代入 (3.3.9) 得到

$$\begin{aligned}\|u\|_H^2&=\int_0^t\langle Lu+Gu,u\rangle_Hdt+\langle\phi,u\rangle_H\\&=\int_0^t\langle\mathcal{L}u+Gu,u\rangle_Hdt+\langle\phi,u\rangle_H\quad(\text{由}L=\mathcal{L}+B\text{及}B\text{的反对称性}).\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

容易看到

$$\|u\|_H^2 = \|P_1 u\|_H^2 + \|P_2 u\|_H^2 = \|u_1\|_H^2 + \|u_2\|_H^2,$$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}u, u\rangle_H &= \langle \mathcal{L}u_1, u_1\rangle_H + \langle \mathcal{L}u_2, u_2\rangle_H \\ &\leqslant \|u_1\|_{H_{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j x_j^2(t).\end{aligned}$$

从 (3.3.10) 推出

$$\begin{aligned}\|u_2\|_H^2 \leqslant{}& \varepsilon \int_0^t \left[\|u_1\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j x_j^2(t)\right] dt \\ &+ \int_0^t \langle (1-\varepsilon)\mathcal{L}u + Gu, u\rangle dt + \langle u, \phi\rangle_H \\ \leqslant{}& -\varepsilon N \int_0^t \|u_2\|_H^2 dt + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 dt \quad (\text{由 (3.3.5) 和 (3.3.6)}) \\ &-C_1 \int_0^t \|u\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 dt + C_2 t + \langle u, \phi\rangle_H.\end{aligned}$$

取 $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{4}, C_1\}$, 注意到 $S(t)B \subset B_r (t > t_0)$, 即

$$\|u(t)\|_H = \|S(t)\phi\|_H < r, \quad \forall t \geqslant t_0,$$

得到

$$\|u_2\|_H^2 \leqslant -\varepsilon N \int_0^t \|u_2\|_H^2 dt + Mt + \|\phi\|_H^2,$$

这里 $M = C_2 + r\|\phi\|_H$. 由 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned}\|P_2 S(t)\phi\|_H &= \|u_2\|_H^2 \\ &\leqslant e^{-\varepsilon Nt}\|\phi\|_H^2 + \frac{M}{N}(1 - e^{-\varepsilon Nt}).\end{aligned}$$

这意味着 (3.3.8) 成立. 定理证毕.

注 3.1 条件 (3.3.4) 和 (3.3.5) 实质上包括了条件 (3.2.10)~(3.2.12). 事实上, 当 L 有变分结构时一定是对称算子, 而在实际应用中, 条件 (3.2.12) 与 (3.3.5) 是等价的. 从定理 3.6 和定理 3.10 的对比中可以看到, C 条件全局吸引子理论比一致紧全局吸引子理论具有明显的优势.

注 3.2 在定理 3.16 和 3.10 中, 非线性算子 $G: H_\alpha \to H$ 不需要紧性假设, 只须弱连续即可, 也就是说对任何 $u_n \rightharpoonup u_0$ 在 $L^2((0,\infty), H_\alpha)$ 中, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle Gu_n, v\rangle dt = \int_0^t \langle Gu_0, v\rangle dt$$

对任 $v \in C^0((0,\infty), H)$ 成立.

例 3.2 考虑下面反应扩散方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u + g(x,u), \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) = u_0, \end{cases} \tag{3.3.11}$$

这里 $\Omega \subset R^2$ 为一有界开集， $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 为向量值函数， A 为 $n \times n$ 阶对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$g \in C^0(\bar{\Omega} \times R^n, R^n)$ 满足

$$g(x,\xi) \cdot \xi \leqslant C_1|\xi| + C_2, \quad \forall \xi \in R^n, \tag{3.3.12}$$

$$|g(x,\xi)| \leqslant C(|\xi|^p + 1), \quad 对某个p > 1, \tag{3.3.13}$$

其中 $C, C_1, C_2 > 0$ 为常数.

建立如下空间

$$H = L^2(\Omega, R^n),$$

$$H_1 = H^2(\Omega, R^n) \cap H_0^1(\Omega, R^n).$$

定义映射 $L + G : H_1 \to H$ 为

$$\begin{cases} Lu = A\Delta u, \\ Gu = g(x,u). \end{cases}$$

则方程 (3.3.11) 化为如 (3.2.9) 的抽象形式. 显然 L 是对称的扇形算子. 条件 (3.3.13) 意味着 $G : H_{\frac{1}{2}} \to H$ 是紧映射 ($H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega, R^n)$), 而条件 (3.3.12) 保证了算子 $L + G$ 满足 (3.3.5). 这样, 由定理 3.10, 方程 (3.3.11) 在 $H = L^2(\Omega, R^n)$ 中存在一个全局吸引子 $\mathcal{A}$.

§3.4 临界状态的稳定性

在 §3.1 中，一个平衡点的线性化算子特征值实部小于零时，该平衡点一定是局部渐近稳定的. 在第五章动态分歧理论中，当线性化算子的特征值实部是非正时，即存在实部为零的特征值，称为临界状态，其平衡点的渐近稳定性判定对动态分歧理论是非常重要的. 这一节专门讨论这一问题.

§3.4.1 正交算子临界态的稳定性

考虑下面给出的非线性演化方程

$$\frac{du}{dt} = Lu + G(u), \tag{3.4.1}$$

这里 $L : H_1 \to H$ 是对称的，因而 L 的所有特征值是实的，详细见 §4.1.

令 L 的特征值 $\{\beta_k\}$ 满足

$$\begin{cases} \beta_i = 0, & \text{当} 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \beta_{j+1} \leqslant \beta_j < 0, & \forall m+1 \leqslant j < \infty. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

记 E_0 和 $E_0^{\perp}$ 为

$$E_0 = \{u \in H| \ \ Lu = 0\},$$

$$E_0^{\perp} = \{u \in H| \langle u, v\rangle_H = 0, \quad \forall v \in E_0\}.$$

下面定理对流体动力学中的 Rayleigh-Benard 对流及 Taylor 问题的动态分歧及其稳定性研究起到关键作用，我们将在第六章讨论这些问题.

定理 3.11 令 $L : H_1 \to H$ 是一个对称的线性全连续场及扇形算子，其特征值满足条件 (3.4.3). 假设 $G : H_1 \to H$ 满足下面正交性条件

$$\langle Gu, u\rangle_H = 0, \quad \forall u \in H_1. \tag{3.4.3}$$

那么下面两个结论中有且只有一个成立.

(1) 方程 (3.4.1) 有一个不变集序列 $\{\Gamma_n\} \subset E_0$, 使得

$$0 \notin \Gamma_n, \quad \lim_{n\to\infty} \text{dist}(\Gamma_n, 0) = 0;$$

(2) $u = 0$ 是方程 (3.4.1) 在 H 范数下的一个局部渐近稳定的平衡点.

进一步，如果 (3.4.1) 除了平凡平衡点 $u = 0$ 外在 E_0 内没有其他不变集，那么 $u = 0$ 是全局渐近稳定的.

在证明该定理之前，我们首先解释它的几何直观，以便更好地理解.

条件 (3.4.2) 意味着线性算子 L 的流在 H 空间中将被吸引到零特征空间 E_0 上，如图 3.4 所示. 而正交性条件 (3.4.3) 则表明算子 G 的流是在球面上，即每个球面 $S_R = \{x \in H| \|x\|_H = R, R > 0\}$ 是 G 的不变集，如图 3.5 所示. 当定理 3.11 中的结论 (1) 不成立时， G 的流是横截于 E_0, 在球面 S_R 上从 E_0 进入 H/E_0, 然后在 L 流的挤压下 $L + G$ 的流从球面 S_R 进入 S_R 内部. 这样在 G 的盘旋驱动和 L 挤压到 E_0 的驱动这双重作用下， $L + G$ 的流将渐近地趋于 $u = 0$. 如图 3.6 所示.

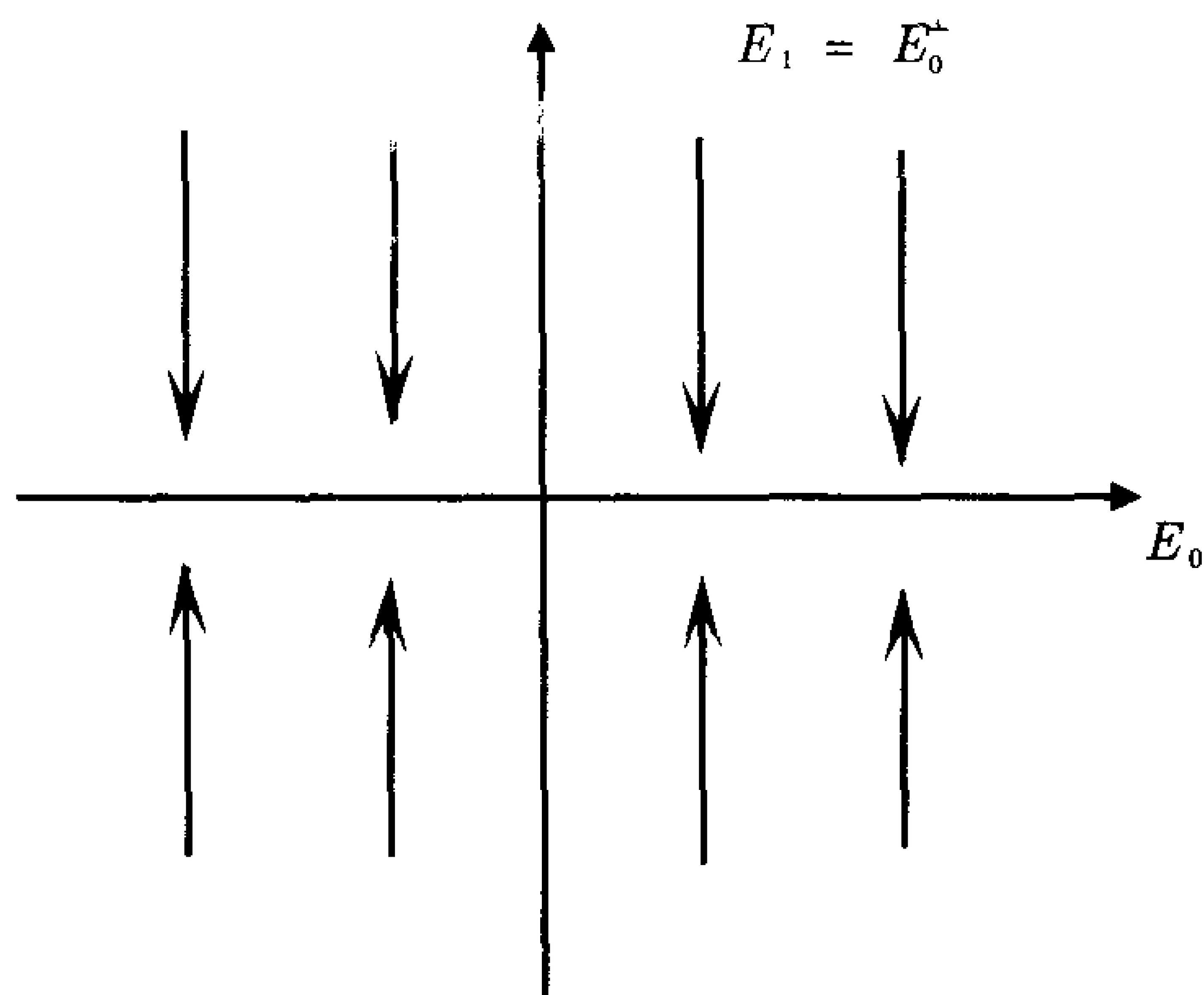


图 3.4 L 的流吸引到零特征空间 E_0

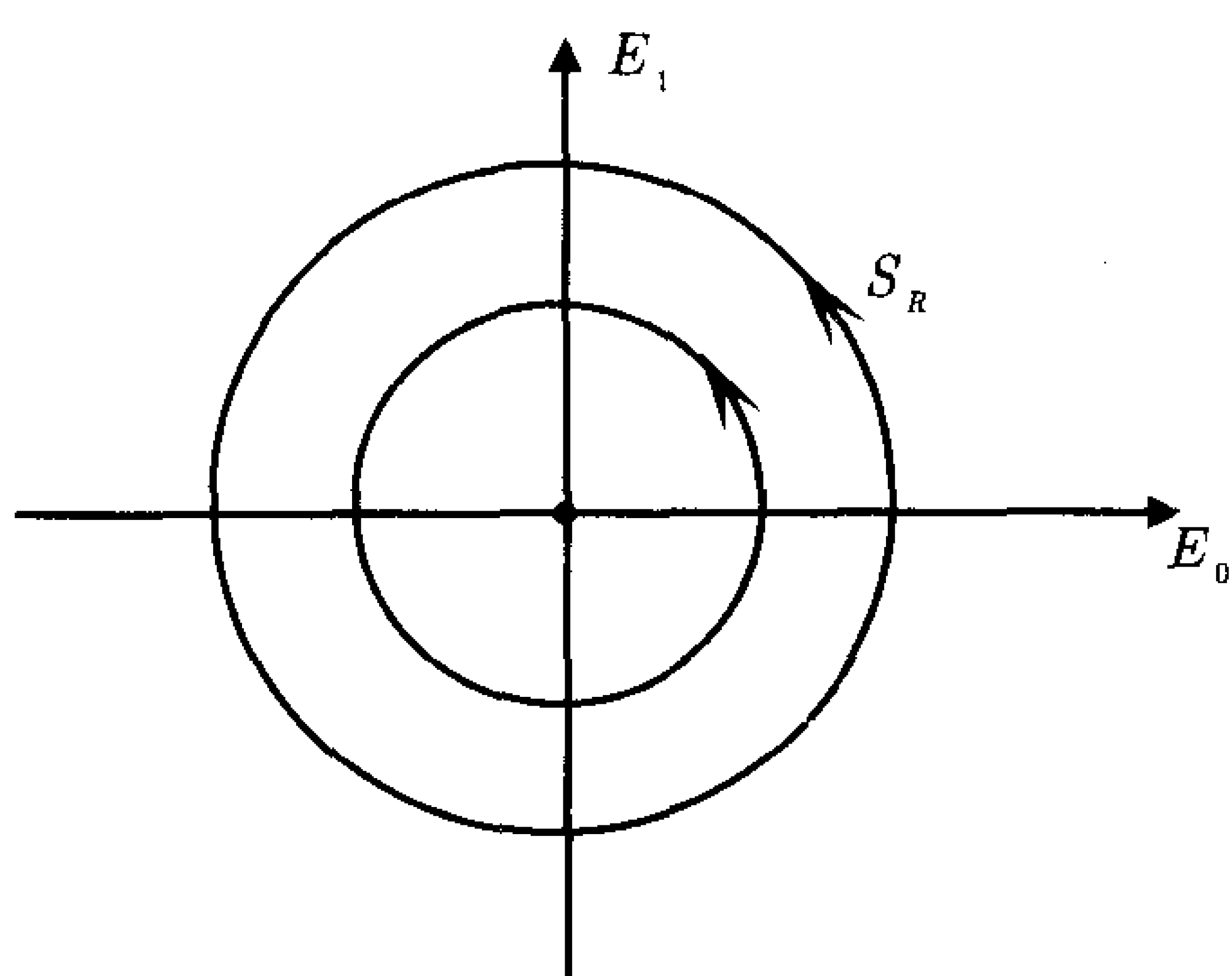


图 3.5 每个球面 S_R 都是正交算子 G 的一个不变集

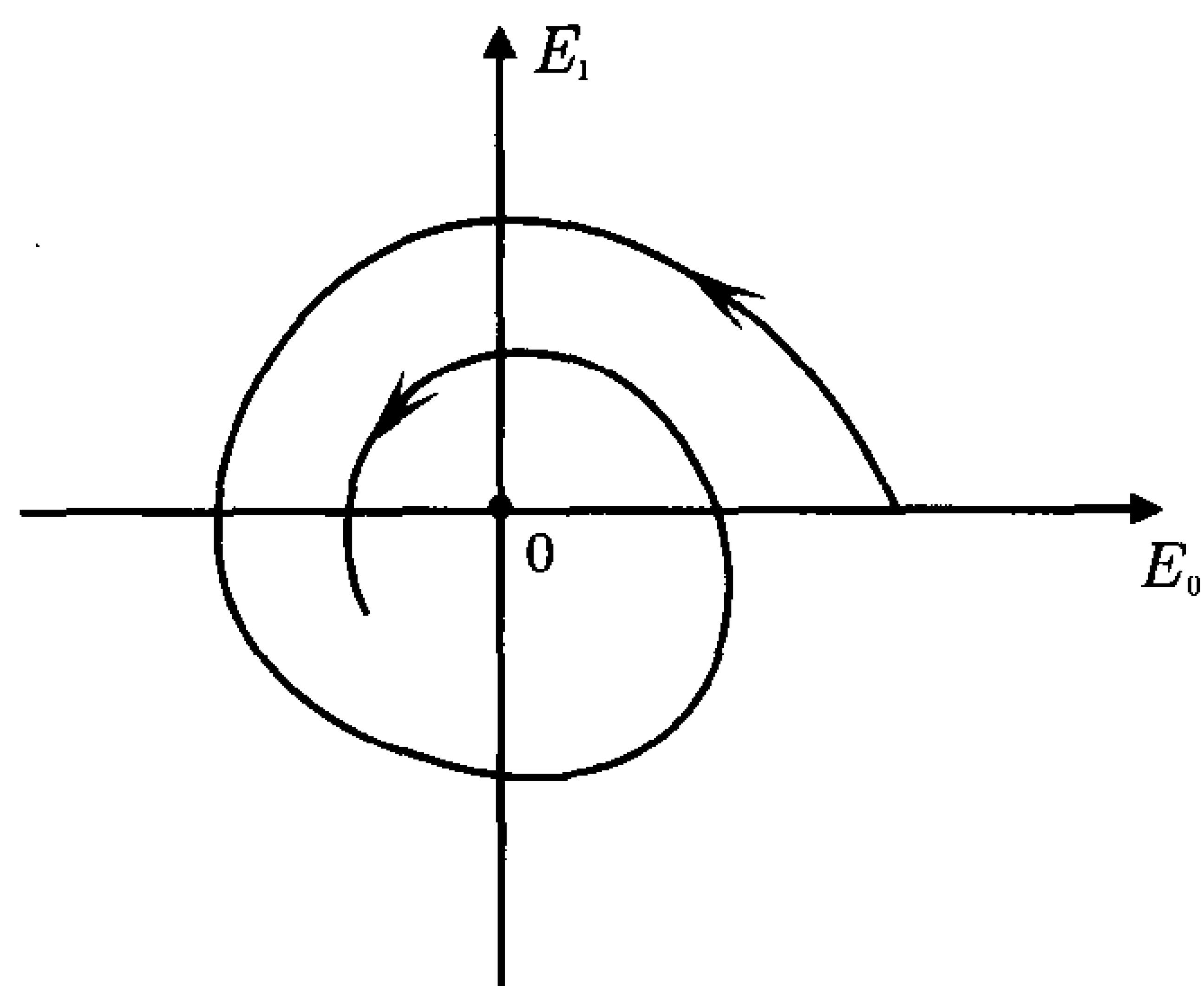


图 3.6 $L+G$ 的流渐近收敛到 $u=0$

定理 3.11 的证明 分下面四步进行证明.

第一步. 显然在定理 3.11 中的结论 (1) 和 (2) 不能够同时成立.

因为 $L: H_1 \to H$ 是对称的线性全连续场及扇形算子, 由定理 4.2, L 的所有特征向量构成 H 空间的一个正交基. 由 (3.4.2) 和 (3.4.3), 一个直接的能量估计意味着 (3.4.1) 的解满足

$$\frac{d}{dt}\|u\|_H^2 = 2\langle Lu, u\rangle = \sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_j |u_j|^2 \leqslant 0,$$

$$\|u\|_H^2 \leqslant \|u(0)\|_H^2 - 2|\beta_{m+1}| \int_0^t \|v(\tau)\|_H^2 d\tau, \tag{3.4.4}$$

其中

$$u = w + v \in H = E_0 \oplus E_0^{\perp},$$

$$w = \sum_{i=1}^{m} u_i \in E_0,$$

$$v = \sum_{j=m+1}^{\infty} u_j \in E_0^{\perp}.$$

容易看到，对任何 $\varphi \in H$, 方程 (3.4.1) 的解 $u(t,\varphi)$, 这里 $u(0,\varphi)=\varphi$, 关于 t 是非增的，也就是说

$$\|u(t_2,\varphi)\|_H \leqslant \|u(t_1,\varphi)\|_H, \quad \forall t_1 < t_2, \quad \varphi \in H.$$

因此，对任何 $\varphi \in H$, 极限

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\varphi)\|_H \text{存在}.$$

第二步．对任何 $\varphi \in H$, 有

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\varphi)\| = \lim_{t\to\infty} \|v(t,\varphi)+w(t,\varphi)\|_H$$
$$= \delta \leqslant \|\varphi\|_H.$$

那么 φ 的 ω 极限集，它是一个不变集，满足

$$\omega(\varphi) \subset S_\delta = \{u \in H | \ \|u\|_H = \delta\}.$$

因为 $\omega(\varphi)$ 是一个不变集，对任何 $\psi \in \omega(\varphi)$ 有

$$u(t,\psi) \subset \omega(\varphi) \subset S_\delta, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.4.5}$$

如果 $\psi = \psi_0 + \psi_1, \psi_0 \in E_0, \psi_1 \in E_0^L$, 并且 $\psi_1 \neq 0$, 那么由 (3.4.4) 可推出

$$\|u(t,\psi)\|_H < \|\psi\|_H = \delta, \quad \forall t > 0.$$

此与 (3.4.5) 矛盾．因而有

$$\omega(\varphi) \subset E_0, \quad \forall \varphi \in H.$$

第三步．如果结论 (2) 不成立，那么存在 $u_n \in H$ 及 $u_n \to 0$, 当 $n \to \infty$, 在 H 范数下，使得 $0 \notin \omega(u_n) \subset E_0$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \text{dist}(\omega(u_n), 0) = 0,$$

即结论 (1) 成立．

第四步．如果结论 (1) 不成立，则一定存在 $u=0$ 的一个邻域 $U \subset H$, 使得对 $\forall \varphi \in U$ 有

$$\omega(\varphi) = \{0\},$$

也就是说

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\varphi)\|_H=0,$$

因而结论 (2) 成立.

这个定理其余部分的证明是平凡的. 定理证毕.

§3.4.2 有限维情况

首先考虑一个二维系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=G_1(x_1,x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=G_2(x_1,x_2),\end{cases}\tag{3.4.6}$$

这里 $G=(G_1,G_2),G(0,0)=0$. 假设

$$G=f+g=(f_1+g_1,f_2+g_2),$$

并且记

$$V(x_1,x_2)=\int_0^{x_2}f_1(x_1,x_2)dx_2-\int_0^{x_1}f_2(x_1,0)dx_1.$$

我们有下面局部渐近稳定性定理，此结果对断定具阻尼项波方程在临界状态下的渐近稳定性是有用的.

定理 3.12 如果有一个开集 $\Omega\subset R^2,0\in\Omega$, 使得 $x=0$ 是 G 在 Ω 内唯一奇点，并且 G 满足下面条件

(1) $V(x)>0,\quad \forall x\in\Omega,\quad x\neq 0;$

(2) $f_1g_2-f_2g_1\leqslant 0,\quad \forall x\in\Omega$, 及

(3) $\operatorname{div} f=0, \operatorname{div} g<0,\quad \forall x\in\Omega,\quad x\neq 0.$

那么 $x=0$ 在 Ω 中是 (3.4.6) 的一个渐近稳定平衡点.

证明 由条件 (3) 知

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_2}{\partial x_2},\quad \forall x\in\Omega.$$

故有

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=f_1(x),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\int_0^{x_2}\frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_2-f_2(x_1,0)$$

$$= -\int_0^{x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 - f_2(x_1, 0)$$
$$= -f_2(x).$$

因此，由条件 (2) 看到

$$\begin{aligned}\frac{dV(x)}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} G_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} G_2 \\ &= -f_2 g_1 + f_1 g_2 \\ &\leqslant 0, \quad \forall x(t) \in \Omega, \quad x(t)\text{为 (3.4.6) 的解}.\end{aligned}$$

再由条件 (1), 这意味着 $V(x)$ 是 (3.4.6) 的一个 Lyapunov 函数. 故 $x = 0$ 在 Ω 中是稳定的. 另一方面，由条件 (3), 方程 (3.4.6) 在 Ω 中没有周期轨道. 然后该定理由 Poincaré-Bendixson 定理推出.

利用该定理，现在能够验证在 §1.5.1 中的方程 (1.5.4) 在临界状态下平衡点的渐近稳定性. 回忆方程 (1.5.4) 为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -kx_2 - \dfrac{1}{2} g x_1^3 + o(|x_1|^3).\end{cases} \tag{3.4.7}$$

令 $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ 由下式给出

$$f_1 = x_2, f_2 = -\frac{1}{2} g x_1^3 + o(|x_1|^3),$$

$$g_1 = 0, \quad g_2 = -kx_2.$$

显然 $x = 0$ 是 (3.4.7) 的一个局部孤立奇点，并且

$$\begin{aligned}&\mathrm{div} f = 0, \\ &\mathrm{div} g = -k < 0, \\ &f_1 g_2 - f_2 g_1 = -kx_2^2 \leqslant 0, \\ &V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{8} g x_1^4 + o(|x_1|^4).\end{aligned}$$

容易看出方程 (3.4.7) 满足定理 3.12 中的条件 (1)~(3), 因而 $x = 0$ 是 (3.4.7) 的一个局部渐近稳定平衡点.

定理 3.12 能够被推广到下面更高维系统:

$$\frac{dx}{dt} = G(x), \quad x \in R^{2n}, \quad n \geqslant 1, \tag{3.4.8}$$

这里 $x = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n), G(0) = 0$. 令

$$G(x) = J\nabla H(x) + g(x),$$

其中 H 为一个 Hamilton 函数， $H(0)=0, J$ 是一个辛矩阵

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

使用与定理 3.12 的证明相似方法可以获得如下定理.

定理 3.13 如果存在一个开集 $U\subset R^n, 0\in U$, 使得

(1) $x=0$ 是 G 在 U 中的一个唯一奇点;

(2) $H(x)>0,\quad \forall x\in U,\quad x\neq 0$, 并且

(3) $\sum_{i=1}^n\left[\dfrac{\partial H}{\partial x_i}g_i+\dfrac{\partial H}{\partial y_i}g_{n+i}\right]<0.\quad \forall x\in\Omega,\quad x\neq 0.$

那么 $H(x)$ 是 (3.4.8) 的一个 Lyapunov 函数，并且 $x=0$ 是 (3.4.8) 在 U 中的渐近稳定平衡点.

现在考虑下面二维系统，该系统对于 Hopf 分歧的讨论是重要的.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+G_1(x), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+G_2(x), \end{cases} \tag{3.4.9}$$

这里 $G_i(x)=o(|x|)(i=1,2)$, 并且

$$\begin{cases} \alpha_{11}+\alpha_{22}=0, \\ \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{22}>0. \end{cases} \tag{3.4.10}$$

矩阵 (α_{ij}) 的特征值为

$$\beta_{\pm}=\pm i\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}.$$

我们知道，(3.4.9) 的平衡点 $x=0$ 可能是下述三种情况之一：中心，稳定焦点，不稳定焦点.

下面定理给出系统 (3.4.9) 在临界状态平衡点类型的一个基本判定，它对 Hopf 分歧是有用的. 例如在 §1.5.2 中关于经济周期 Kaldor 模型的讨论中就应用了下面定理.

定理 3.14 令 $U\subset R^2$ 是 $x=0$ 的一个邻域，在条件 (3.4.10) 的假设下，下面断言成立：

(1) 如果 $\operatorname{div} G=0$ 在 U 内，则 $x=0$ 是一个中心;

(2) 若 $\operatorname{div} G\leqslant 0(\neq 0)$ 在 U 内，则 $x=0$ 是稳定焦点;

(3) 若 $\operatorname{div} G\geqslant 0(\neq 0)$ 在 U 内，则 $x=0$ 是不稳定焦点.

证明 分两步进行证明.

第一步. 需要证明由 (3.4.9) 生成的轨道 $x(t,x_0)$ 对初值 $x_0 \in U, x_0 \neq 0$ 是绕着 $x=0$ 点盘旋的, 即

$$\theta(t,x_0) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{x_2(t,x_0)}{x_1(t,x_0)} \to \pm\infty, \quad 当 t\to\infty. \tag{3.4.11}$$

由条件 (3.4.10) 记 $\alpha_{11}=\alpha, \alpha_{22}=-\alpha, \alpha_{12}=\beta_1, \alpha_{21}=-\beta_2$, 则方程 (3.4.9) 可写为

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x\in R^2, \tag{3.4.12}$$

其中 $v=(v_1,v_2)$,

$$\begin{cases} v_1 = \alpha x_1 + \beta_1 x_2 + G_1(x), \\ v_2 = -\beta_2 x_1 - \alpha x_2 + G_2(x), \end{cases}$$

这里 $\alpha \geqslant 0, \beta_1, \beta_2 > 0$(或 $\beta_1,\beta_2<0$), 并且 $\beta_1\beta_2 > \alpha^2$.

我们仅仅考虑 $\beta_1,\beta_2>0$ 的情况, 对于 $\beta_1,\beta_2<0$ 情况, 证明方法是一样的. 取 $\delta>0$, 使得

$$\alpha^2 = (\beta_1-\delta)(\beta_2-\delta).$$

然后可推出

$$\begin{aligned} x_1v_2 - x_2v_1 &= -\beta_2x_1^2 - \beta_1x_2^2 - 2\alpha x_1x_2 + o(|x|^2) \\ &\leqslant -\beta_2x_1^2 - \beta_1x_2^2 + (\beta_2-\delta)x_1^2 \\ &\quad +\alpha^2x_2^2/(\beta_2-\delta) + o(|x|^2) \\ &= \mp\delta(x_1^2+x_2^2) + o(|x|^2). \end{aligned}$$

这意味着在 $x=0$ 的一个邻域 $U\subset R^2$ 内有

$$x_1v_2 - x_2v_1 \leqslant -\frac{\delta}{2}(x_1^2+x_2^2), \quad \forall x\in U. \tag{3.4.13}$$

从 (3.4.12) 和 (3.4.13) 可推出

$$\begin{aligned} x_1^2\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) &= x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} \\ &= x_2v_2 - x_2v_1 \\ &\leqslant -\frac{\delta}{2}(x_1^2+x_2^2). \end{aligned}$$

令 $y=x_2/x_1$, 则从上式可得

$$\frac{dy}{dt} \leqslant -\frac{\delta}{2}(1+y^2),$$

即

$$\mathrm{tg}^{-1}y(t)-\mathrm{tg}^{-1}y(0)\leqslant -\frac{\delta}{2}t.$$

这样就推出 (3.4.11).

第二步. 结论 (1)~(3) 的证明.

首先考虑 div $G>0$ 的情况. 令 $x_0\in U$ 给定, 取 $T>0$ 是轨道 $x(t,x_0)$ 从 x_0 点出发的盘旋周期 (如图 3.7 所示), 定义为

$$T=\min\{t|x(t,x_0)\text{与从零过}x_0\text{点射线相交}\}.$$

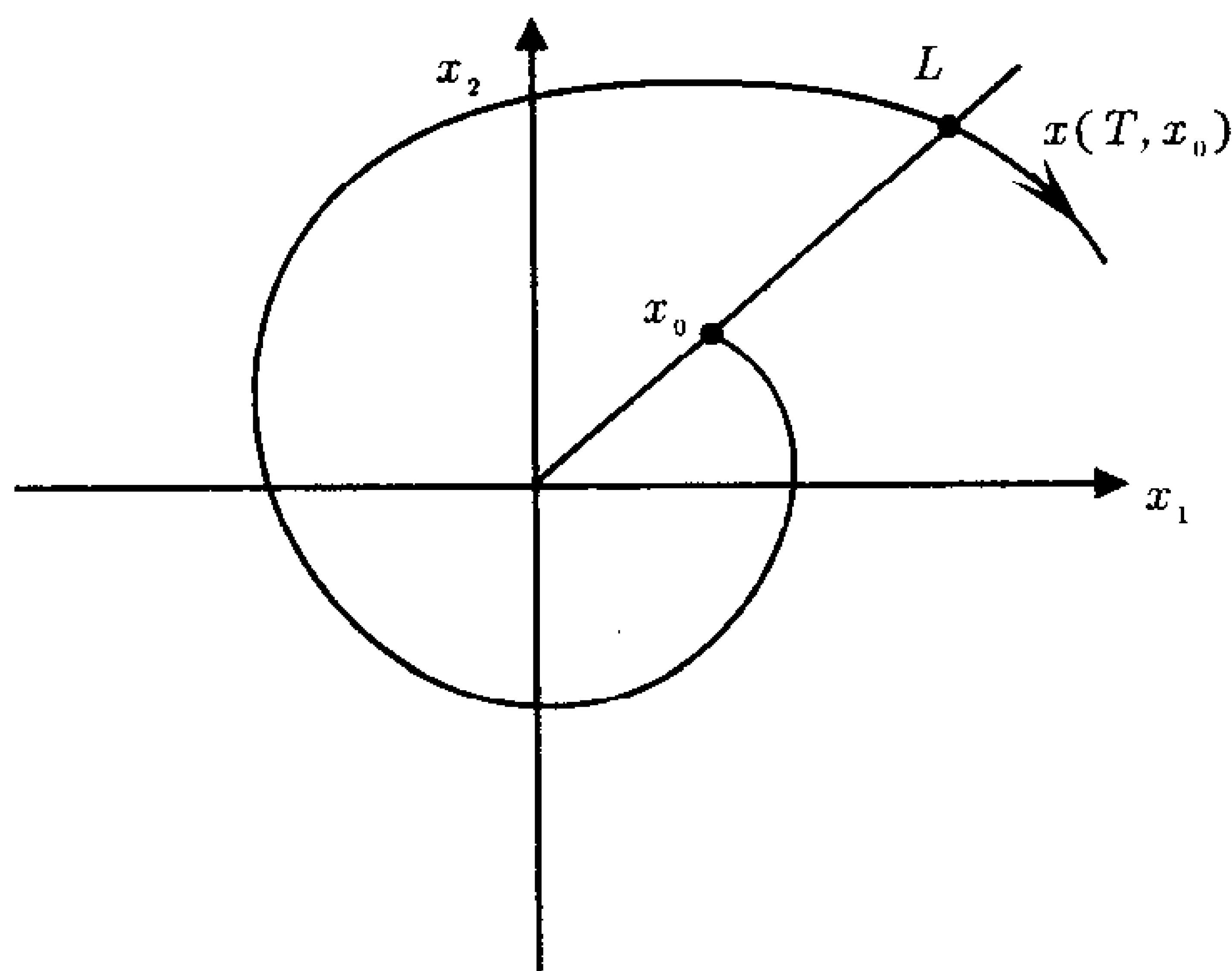


图 3.7

将证明

$$|x(T,x_0)|>|x_0|,\quad \forall x_0\in U. \tag{3.4.14}$$

用反证法. 若 (3.4.14) 不真, 则有

$$|x(T,x_0)|\leqslant |x_0|,\quad \text{对某个}x_0\in U. \tag{3.4.15}$$

令 C 是由轨道 $\{x(t,x_0)|0\leqslant t\leqslant T\}$ 及连结 x_0 与 $x(T,x_0)$ 的线段所围的闭曲线, 即

$$C=\{x(t,x_0)|0\leqslant t\leqslant T\}\cup\{\tau x_0+(1-\tau)x(T,x_0)|0\leqslant\tau\leqslant 1\}.$$

令 $S(t)$ 为 (3.4.9) 生成的半群, A_C 为 C 所围区域, 则由 (3.4.15) 可知, 当 $t>0$ 时, $S(t)$ 映曲线 C 进入 A_C 内, 即

$$|S(t)A_C|\leqslant |A_C|,\quad \forall t>0, \tag{3.4.16}$$

这里 $|A|$ 表示区域 A 的面积.

证 $A_t=S(t)A_C$, 则有

$$|A_t| = \int_{A_t} dx_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|A_t| &= \int_{A_t} d\left(\frac{dx_1}{dt}\right) dx_1 + dx_1 d\left(\frac{dx_2}{dt}\right)\\ &= \int_{A_t} dv_1 dx_2 + dx_1 dv_2\\ &= \int_{A_t} \mathrm{div} v dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

这里需要说明，上式为 Liouville 定理.

因为 $A_t \subset A_C \subset U$, 从 div v=div $G \geqslant 0(\not\equiv 0)$ 在 U 内，可推出

$$\frac{d}{dt}|A_t| > 0, \quad \forall t > 0,$$

即 $|A_t|$ 是关于 t 严格单增的，此与 (3.4.16) 矛盾. 故 (3.4.14) 成立.

从 (3.4.14) 容易看出 $x=0$ 是一个不稳定的焦点. 这样结论 (3) 被证明. 用同样的方式，可以证明结论 (1) 和 (2). 定理证毕.

§3.5　评　　注

§3.1　关于 Lyapunov 稳定性可参阅文献 [105, 106, 116].

§3.2　关于古典全局吸引子理论可参阅文献 [27, 98, 103]. 定理 3.6 是由作者给出的.

§3.3　这一节的内容建立在马庆峰、汪守宏和钟承奎等人的工作基础上 [71], 进一步的发展可参阅文献 [47, 118, 119]. 定理 3.10 由作者给出.

§3.4　这一节的工作是由作者得到的 [52].

第四章　定 态 分 歧

§4.1　线性全连续场谱理论

在非线性方程的分歧理论中，线性化算子的特征值问题占有非常重要的地位，这不仅仅是因为许多问题的分歧一定是从特征值实部正负变号处发生，更主要的是在分歧理论中占重要作用的 Lyapunov-Schmidt 约化及中心流形约化都直接依赖于特征空间的分解. 这一节将介绍关于线性全连续场谱理论 [52], 该理论本质上是古典 Jordan 定理和 Fredholm 选择定理的变形，它在后面要介绍的新的分歧理论中起到关键作用.

§4.1.1　线性全连续场的特征值

令 H 和 H_1 是两个 Hilbert 空间，$H_1 \subset H$ 是稠密和紧包含. 一个线性算子 $L: H_1 \to H$ 称为全连续场，如果

$$\begin{cases} L = -A + B : H_1 \to H, \\ A : H_1 \to H \text{是一个线性同胚}, \\ B : H_1 \to H \text{是一个线性紧算子}. \end{cases}$$

一个数 $\lambda = \alpha + i\beta \in C$ 被称为是线性算子 $L: H_1 \to H$ 的特征值，如果存在 $x, y \in H_1, x \neq 0$, 使得

$$Lz = \lambda z (z = x + iy),$$

或者等价地

$$\begin{cases} Lx = \alpha x - \beta y, \\ Ly = \beta x + \alpha y. \end{cases}$$

空间

$$E_\lambda = \cup_{n \in N} \{x, y \in H_1 | \ (L - \lambda)^n z = 0, z = x + iy\}$$

称为是 L 在 λ 的特征空间，$x, y \in E_\lambda$ 称为是 L 对应于 λ 的特征向量. E_λ 的维数 $m = \dim E_\lambda$, 是一个有限数，称为特征值 λ 的代数重数. 子空间 $E_\lambda^* \subset E_\lambda$

$$E_\lambda^* = \{x, y \in H_1 | \ Lz = \lambda z, z = x + iy\},$$

其维数 $r = \dim E_\lambda^*$ 定义为特征值 λ 的几何重数.

定义 4.1　一个线性映射 $L^*: H_1^* \to H$ 称为是 $L: H_1 \to H$ 的共轭算子，如果

$$\langle Lx, y\rangle_H = \langle x, L^*y\rangle_H, \quad \forall x \in H_1, \quad y \in H_1^*,$$

这里 $H_1^* \subset H$ 是一个稠密子空间. 如果 $H_1^* = H_1$ 则称 L 是正则的. 一个正则线性算子 $L: H_1 \to H$ 是对称的，如果 $L = L^*$.

注 4.1　令 $\Omega \subset R^n$ 是一个开集. 一个线性微分算子 $L: H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega) \to L^2(\Omega)$,

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

是正则的，如果其系数 $a_\alpha \in W^{k,\infty}(\Omega)(k = |\alpha|)$. 此外 L 的共轭算子 L^* 可以表达为

$$L^*u = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha(x)u),$$

对任何 $u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$.

定义 4.2　称一个线性算子 $L: H_1 \to H$ 有一个完备的特征值序列 $\{\lambda_k\} \subset C$, 如果每个在 λ_k 的特征空间 E_k 是有限维的，并且 $H = \overline{\cup_{k=1}^{\infty} E_k}$.

一个线性全连续场 $L = -A + B : H_1 \to H$ 是一个具有零指标的 Fredholm 算子，并且 L 的谱是由特征值构成. 更进一步，下面的性质是古典的，这里不再给出证明 [36].

定理 4.1　令 $L: H_1 \to H$ 是一个线性全连续场. 那么

(1) L 的谱是由特征值构成;

(2) 每个特征值 $\lambda \in C$ 是孤立的，并且其对应的特征空间 E_λ 是有限维的;

(3) L 和它的共轭算子 L^* 有相同的特征值，并且对应的特征空间有相同维数 $\dim E_\lambda = \dim E_\lambda^*$;

(4) 如果 L 是对称的，则 L 特征值为实数.

下面定理是关于对称算子完备谱的结论. 虽然这个定理本质上为人们所已知的，但是这里的算子和空间与古典的略有不同.

定理 4.2　令 $L: H_1 \to H$ 是一个线性全连续场，并且是一个扇形算子. 如果 L 是对称的，那么 L 有一个完备的特征值序列 $\{\lambda_k\} \subset R^1$, 并且所有特征向量 $\{e_k\}$ 构成 H 空间中的一个正交基.

证明　记 $I: H_1 \to H$ 是包含嵌入映射. 由于 $H_1 \subset H$ 是紧包含，I 是一个线性对称紧算子. 因而对任何 $\alpha \in R^1, L + \alpha I$ 自然是对称全连续场，并且如果 λ 是 L 的一个特征值则 $\lambda + \alpha$ 是 $L + \alpha I$ 的一个特征值. 因此不失一般性，假设 $L: H_1 \to H$ 是可逆的，否则可考虑算子 $L + \alpha I$.

因为 L 是一个扇形算子，$\|x\|_1 = \|Lx\|_H$ 是定义在空间 H_1 上的一个范数,

其内积由下式定义

$$\langle x,y\rangle_{\alpha=1}=\langle Lx,Ly\rangle_H. \tag{4.1.1}$$

这样，有

$$\begin{aligned}\langle L_0^{-1}Ix,y\rangle_{\alpha=1}&=\langle L(L_0^{-1}Ix),Ly\rangle_H\\&=\langle x,Ly\rangle_H\\&=\langle Lx,y\rangle_H\quad(\text{由}L\text{对称性})\\&=\langle Lx,L(L^{-1}\circ I)y\rangle_H\\&=\langle x,(L^{-1}\circ I)y\rangle_{\alpha=1}.\end{aligned}$$

因此算子 $L^{-1}\circ I:H_1\to H_1$ 关于内积 (4.1.1) 是对称的线性紧算子. 不失一般性，假设 L 的所有特征值都是负的，因而对任何 $x\in H_1,x\neq 0$, 有

$$\begin{aligned}-\langle L^{-1}\circ Ix,x\rangle_{\alpha=1}&=\langle x,(-L)x\rangle_H\\&=\langle(-L)^{\frac{1}{2}}x,(-L)^{\frac{1}{2}}x\rangle_H\\&>0.\end{aligned}$$

即 $L^{-1}\circ I$ 在 H_1 上是负定的. 因此 $L^{-1}\circ I:H_1\to H_1$ 有一个完备的特征值序列 $\{\rho_k\}\subset R^1$, 使得

$$\begin{cases}\rho_k\varphi_k=L^{-1}\circ I\varphi_k,\\ \rho_k<0,\quad \rho_k\to 0,\quad \text{当}k\to\infty.\end{cases} \tag{4.1.2}$$

并且特征向量 $\{\varphi_k\}$ 在 (4.1.1) 内积下形成 H_1 的一个正交基. 因而从 (4.1.2) 可证得此定理. 定理证毕.

§4.1.2 谱定理

先从有限维线性算子开始. 令 M 是一个 $n\times n$ 阶矩阵, M^* 为共轭矩阵. 令 $\beta_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 是 M 的所有特征值 (计入重数), 向量 $\xi_j\in R^n(1\leqslant j\leqslant n)$ 被称为 M 的特征向量. 如果存在 $1\leqslant k_j\leqslant M_j$, 这里 M_j 为 β_j 的代数重数，使得当 β_j 为实数时，有

$$(M-\beta_j)^{k_j}\xi_j=0,$$

而当 $\beta_j=\bar{\beta}_{j+1}$ 为复数时有

$$\begin{cases}(M-\beta_j)^{k_j}(\xi_j+i\xi_{j+1})=0,\\(M-\beta_{j+1})^{k_j}(\xi_j-i\xi_{j+1})=0.\end{cases}$$

令 $\xi_j = (\xi_{j1}, \cdots, \xi_{jn})^{\mathrm{T}}$ 是 M 的特征向量，则

$$MP = PJ, \tag{4.1.3}$$

这里 J 为 M 的 Jordan 型矩阵，以及

$$P = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} & \cdots & \xi_{n1} \\ \xi_{12} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \xi_{2n} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}.$$

因为 M 的 n 个特征向量 $\xi_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 是线性无关的，所以 P 是一个可逆矩阵. 从 (4.1.3) 可以得到

$$M^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}} = (P^{-1})^{\mathrm{T}} J^{\mathrm{T}}, \tag{4.1.4}$$

其中 $J^{\mathrm{T}} = J^*$ 是 J 的转置矩阵，它也是共轭矩阵 $M^* = M^{\mathrm{T}}$ 的 Jordan 型矩阵. 因此如果建立

$$(P^{-1})^{\mathrm{T}} = (\widetilde{\xi}_1 \cdots \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}),$$

那么 $\widetilde{\xi}_1, \cdots, \widetilde{\xi}_n$ 是 M^* 的 n 个特征向量，并且

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\xi}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{T}} = (\widetilde{\xi}_{\mathrm{j1}} \cdots \widetilde{\xi}_{\mathrm{jn}}).$$

这样，得到

$$I = P^{-1}P = \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (\xi_1 \cdots \xi_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{\xi}_1^{\mathrm{T}}\xi_1 & \widetilde{\xi}_1^{\mathrm{T}}\xi_2 & \cdots & \widetilde{\xi}_1^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{n}} \\ \widetilde{\xi}_2^{\mathrm{T}}\xi_1 & \widetilde{\xi}_2^{\mathrm{T}}\xi_2 & \cdots & \widetilde{\xi}_2^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\xi_1 & \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\xi_2 & \cdots & \widetilde{\xi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

这就意味着如下正交关系

$$\widetilde{\xi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{j}} = \langle \widetilde{\xi}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{T}}, \xi_{\mathrm{j}} \rangle = \delta_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

也就是说 M 的特征向量与 M^* 的特征向量互为对偶正交.

注意到，(4.1.3) 和 (4.1.4) 作为矩阵变换是古典的 Jordan 定理；而作为方程 (4.1.3) 和 (4.1.4) 是等价于经典的 Fredholm 选择定理. 因而从上面的讨论可以总结出下面的定理. 它可以看作为 Fredholm 和 Jordan 定理的变形观点.

定理 4.3 令 $\beta_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵 M 的特征值. 那么，可取 M 的 n 个相应特征向量 $\xi_j \in R^n(1 \leqslant j \leqslant n)$ 和共轭矩阵 M^* 的 n 个特征向量 $\xi_i^* \in R^n(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得下面结论成立:

(1) $\{\xi_j | 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 和 $\{\xi_i^* | 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 满足

$$\langle \xi_j^*, \xi_j \rangle = \delta_{ij};$$

(2) 令 $\xi_j = (\xi_{j1}, \cdots, \xi_{jn})^{\mathrm{T}}, \xi_i^* = (\xi_{i1}^*, \cdots, \xi_{in}^*)^{\mathrm{T}}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, 那么下面矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n} & \cdots & \xi_{nn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{P} = \begin{pmatrix} \xi_{11}^* & \cdots & \xi_{n1}^* \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1n}^* & \cdots & \xi_{nn}^* \end{pmatrix}$$

满足 $P^{-1} = \widetilde{P}^{\mathrm{T}}$, 并且

$$P^{-1}MP = J, \quad \widetilde{P}^{-1}M^*\widetilde{P} = J^*,$$

这里 J 和 J^* 分别为 M 和 M^* 的 Jordan 型矩阵.

上述 Fredholm-Jordan 定理能够被推广到一般线性全连续场，称之为线性算子的谱定理.

考虑一个线性全连续场 $L = -A + B : H_1 \to H$. 正如定理 4.2 的证明那样，不失一般性，可以假设 L 有一个紧逆

$$L^{-1} = I(-A+B)^{-1} : H \to H,$$

$I : H_1 \to H$ 为包含映射. 因而 L 的特征值问题能够等价地写成如下形式

$$(L^{-1} - \beta_k)^m \varphi_k = 0, \quad \beta_k = \lambda_k^{-1}, \quad \text{对某个} m \geqslant 1. \tag{4.1.5}$$

令 $H \otimes C$ 为 H 的复化空间，定义为

$$\widehat{H} = H \otimes C = \left\{ \sum_k a_k u_k | u_k \in H, a_k \in CAN * 84F = Cf \right\},$$

其内积为

$$\langle u, v \rangle_H = (\langle u_1, v_1 \rangle_H + \langle u_2, v_2 \rangle_H) + i(\langle u_2, v_1 \rangle_H - \langle u_1, v_2 \rangle_H),$$

对任何 $u=u_1+iu_2, v=v_1+iv_2\in\widehat{H}$.

下面给出的就是一般线性全连续场的谱定理.

定理 4.4 令 $L:H_1\to H$ 是一个线性全连续场，那么有如下结论.

(1) 如果 $\{\lambda_k|k\geqslant 1\}\subset C$ 是 L 的特征值 (计入重数), 则可取 L 的特征向量 $\{\varphi_k\}\subset H_1$ 和 L^* 的特征向量 $\{\varphi_k^*\}\subset H_1^*$, 使得

$$\langle\varphi_i,\varphi_j^*\rangle_H\begin{cases}=0, & 当i\neq j时,\\ \neq 0, & 当i=j时.\end{cases}\tag{4.1.6}$$

(2) 如果 $\rho=\lambda_k=\cdots=\lambda_{k+n}(n\geqslant 1)$ 是 L 的一个代数重数 $m=n+1$ 和几何重数 $r=1$ 的特征值，那么对任一定数 $\sigma\neq 0$ 可以取 L 的特征向量 $\{\varphi_k,\cdots,\varphi_{k+n}\}$ 和 L^* 的特征向量 $\{\varphi_k^*,\cdots,\varphi_{k+1}^*\}$ 满足 (4.1.6), 并且有

$$\begin{cases}L\varphi_k=\rho\varphi_k,\\ L\varphi_{k+1}=\rho\varphi_{k+1}+\sigma\varphi_k,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ L\varphi_{k+n}=\rho\varphi_{k+n}+\sigma\varphi_{k+n-1},\end{cases}\tag{4.1.7}$$

$$\begin{cases}L^*\varphi_{k+n}^*=\rho\varphi_{k+n}^*,\\ L^*\varphi_{k+n-1}^*=\rho\varphi_{k+n-1}^*+\sigma\varphi_{k+n},\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ L^*\varphi_k^*=\rho\varphi_k^*+\sigma\varphi_{k+1}^*.\end{cases}\tag{4.1.8}$$

(3) H 能够分解为下面空间直和

$$\begin{aligned}&H=\bar{E}_1\oplus\bar{E}_2,\\ &E_1=\mathrm{span}\{\varphi_k|k\geqslant 1\},\\ &E_2=\{v\in H_1|\langle v,\varphi_k^*\rangle_H=0,\forall k\geqslant 1\},\end{aligned}$$

其中 $\bar{E}_1$ 和 $\bar{E}_2$ 分别是 E_1 和 E_2 在 H 中闭包.

(4) E_1 和 E_2 是 L 的不变子空间.

$$L:E_i\to\bar{E}_i,\quad i=1,2,$$

并且 $\mathcal{L}=L|_{E_2}$ 有逆 $\mathcal{L}^{-1}:\bar{E}_2\to E_2\subset\bar{E}_2$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{L}^{-n}u\|_H^{\frac{1}{n}}=0,\quad\forall u\in\bar{E}_2.$$

(5) 对任何 $u \in H$, 有如下广义 Fourier 展开

$$u = \sum_k x_k \varphi_k + v, \quad v \in \bar{E}_2, \quad x_k = \langle u, \varphi_k^* \rangle_H.$$

特别地，如果 $L: H_1 \to H$ 有完备谱，则有下面完全的 Fourier 展开

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \quad x_k = \langle u, \varphi_k^* \rangle_H.$$

证明 分下面几步完成定理证明.

第一步. 空间 H 能够被分解成 L^{-1} 不变子空间的直和，即

$$\begin{cases} H = \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2, \\ H = \bar{E}_1^* \oplus \bar{E}_2^*, \\ E_1 = \text{span}\{\varphi_k | k \geqslant 1\}, \\ E_1^* = \text{span}\{\varphi_k^* | k \geqslant 1\}. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

由谱半径定理知

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \|L^{-n} v\|_H^{\frac{1}{n}} = 0, & \forall v \in \bar{E}_2, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \|L^{*-n} v\|_H^{\frac{1}{n}} = 0, & \forall v \in \bar{E}_2^*. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

这样，结论 (4) 得证.

第二步. 将证明

$$\langle v, \varphi_k^* \rangle_H = 0, \forall v \in E_2, \quad \varphi_k^* \in E_1^*, \tag{4.1.11}$$

$$\langle v^*, \varphi_k \rangle_H = 0, \forall v^* \in E_2^*, \quad \varphi_k \in E_1. \tag{4.1.12}$$

首先考虑下面的情况

$$L^{-1} \varphi_k = \beta_k \varphi_k. \tag{4.1.13}$$

然后有

$$\begin{aligned} \langle v^*, L^{-n} \varphi_k \rangle_H &= \beta_k^n \langle v^*, \varphi_k \rangle_H \\ &= \langle L^{*-n} v^*, \varphi_k \rangle_H. \end{aligned}$$

从上式可得

$$\beta_k |\langle v^*, \varphi_k \rangle_H|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|L^{*-n} v^*\|_H^{\frac{1}{n}} \|\varphi_k\|_H^{\frac{1}{n}}.$$

由 (4.1.10) 可推出

$$\langle v^*, \varphi_k \rangle_H = 0, \quad 对\varphi_k满足 (4.1.13).$$

由 (4.1.5), 令

$$L^{-1}\varphi_{k+m} = \beta_k \varphi_{k+m} + \sigma\varphi_{k+m-1}, \quad \forall 0 \leqslant m \leqslant N.$$

用归纳法，假设对 $\varphi_k, \cdots, \varphi_{k+N-1}$, (4.1.12) 成立. 则

$$\begin{aligned}\langle v^*, L^{-n}\varphi_{k_N} \rangle_H &= \langle L^{*-n}v^*, \varphi_{k+N} \rangle_H \\ &= \beta_k^n \langle v^*, \varphi_{k+N} \rangle_H.\end{aligned}$$

这样，从上式推出 (4.1.12) 对所有 $\varphi_k \in E_1$ 成立. 同理可证 (4.1.11) 成立.

第三步. 令 $\{\xi_1, \cdots, \xi_m\} \subset H \otimes C$ 是 L 对应于 $\lambda \in C$ 的特征向量, $\{\eta_1^*, \cdots, \eta_M^*\} \subset H \otimes C$ 是 L^* 对应于 $P \in C$ 的特征向量，表达为

$$\xi_k = \xi_{k1} + i\xi_{k2}, \; 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$\eta_j^* = \eta_{j1}^* + i\eta_{j2}^*, \; 1 \leqslant j \leqslant M.$$

以下将证明如果 $\lambda \neq \rho$, 则

$$\langle \xi_{kl}, \eta_{jr}^* \rangle_H = 0, \quad \forall l, r = 1, 2, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant M. \tag{4.1.14}$$

仅仅考虑 λ 和 ρ 的几何重数为 1 的情况，对于更一般的情况，证明方法是一样的. 由 (4.1.5) 有

$$\begin{cases} L^{-1}\xi_k = \lambda^{-1}\xi_k + \alpha_k\xi_{k-1}, & 1 \leqslant k \leqslant m, \\ L^{*-1}\eta_j^* = \rho^{-1}\eta_j^* + \gamma_j\eta_{j+1}, & 1 \leqslant j \leqslant M, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

其中 $\alpha_1 = 0, \alpha_k \neq 0, \forall 2 \leqslant k \leqslant m, \gamma_M = 0, \gamma_j \neq 0, \forall 1 \leqslant j \leqslant M-1$. 由 (4.1.15) 可推出

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \eta_M^* \rangle_{\hat{H}} &= \langle \xi_{11} + i\xi_{12}, \eta_{M1}^* - i\eta_{M2}^* \rangle_H \\ &= \lambda \langle L^{-1}\xi_1, \eta_M^* \rangle_{\hat{H}} \\ &= \lambda \langle \xi_1, L^{*-1}\eta_M^* \rangle_{\hat{H}} \\ &= \lambda\bar{\rho}^{-1} \langle \xi_1, \eta_M^* \rangle_{\hat{H}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\langle \xi_1, \bar{\eta}_M^* \rangle_{\hat{H}} &= \lambda\rho^{-1} \langle \xi_1, \bar{\eta}_M^* \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

这两者意味着

$$\langle \xi_{1l}, \eta_{Mr} \rangle_H = 0, \quad \forall l, r = 1, 2.$$

正如第二步的证明那样，应用归纳法从 (4.1.15) 可推出 (4.1.14) 成立.

第四步. 由前三步的结论可知,

$$\langle \varphi_k, \varphi_j^* \rangle \neq 0$$

的必要条件为 φ_k 和 φ_j^* 分别是 L 和 L^* 对应同一特征值 λ 的特征向量. 记 E_λ 和 E_λ^* 分别为 L 和 L^* 对应于 λ 的特征空间，则 E_λ 和 E_λ^* 为有限维空间，并且是互为对偶空间. 因而存在 E_λ 和 E_λ^* 的对偶基

$$\{\varphi_k | 1 \leqslant k \leqslant m\} \subset E_\lambda,$$
$$\{\varphi_j^* | 1 \leqslant j \leq m\} \subset E_\lambda^*,$$
$$\langle \varphi_k, \varphi_j^* \rangle_H = \delta_{ij}.$$

记线性算子

$$A = L|_{E_\lambda} : E_\lambda \to E_\lambda,$$
$$A^* = L^*|_{E_\lambda^*} : E_\lambda^* \to E_\lambda^*,$$

则在上述对偶基下， A 和 A^* 可表示为 $m \times m$ 阶矩阵

$$A = (a_{ij}), \quad A^* = (a_{ij}^*),$$

其中

$$a_{ij} = \langle L\varphi_j, \varphi_i^* \rangle_H,$$
$$a_{ij}^* = \langle \varphi_i, L^* \varphi_j^* \rangle_H.$$

因而 A 与 A^* 互为转置矩阵了. 应用定理 4.3 便可得到结论 (2).

结合第一步至第四步便可得到结论 (1)~(4), 最后结论 (5) 是结论 (1)~(3) 的推论. 定理证毕.

注 4.2 令 X_1 和 X 是 Banach 空间， $X_1 \subset X$ 是稠密的紧包含，对全连续场 $L = -A + B : X_1 \to X$ 和它的对偶算子 $L^* : X_1^* \to X^*$, 谱定理也同样成立.

注 4.3 令 X 是 Banach 空间, X^*为对但凡空间, $B : X \to X$为一紧算子, 其共轭算子为 $B^* : X^* \to X^*$. 那么上面谱定理对特征值问题 $Bx = \lambda x$ 也成立.

§4.1.3 特征值的渐近性质

考虑一类线性全连续场 $L = -A + B : H_1 \to H$, 这 A 是对称算子，并且有一个实特征值序列 $\{\rho_k\} \subset R^1$ 和一个特征向量序列 $\{\varphi_k\} \subset H_1$, 使得

$$\begin{cases} A\varphi_k = \rho_k \varphi_k, \\ 0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = +\infty, \end{cases} \tag{4.1.16}$$

而且 $\{\varphi_k\}$ 是 H 的一个正交基.

容易看到 $-A$ 是一个扇形算子，并且可以定义分数指数算子和分数次空间如下

$$A^\alpha x = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^\alpha x_k \varphi_k, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k \in H,$$

$$H_\alpha = D(A^\alpha) = \left\{ x \in H | \ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{2\alpha} x_k^2 < \infty \right\},$$

其内积定义为

$$\langle x, y \rangle_{H_\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{2\alpha} x_k y_k.$$

又假设

$$B : H_\gamma \to H, \quad 对某个0 \leqslant \gamma < 1是有界的. \tag{4.1.17}$$

由定理 2.19, 满足 (4.1.16) 和 (4.1.17) 的线性映射 $L = -A + B : H_1 \to H$ 是一个扇形算子. L 的特征值有如下渐近性质.

定理 4.5 令 $L = -A + B : H_1 \to H$ 满足 (4.1.16) 和 (4.1.17). 若 L 有一个无穷的特征值序列 $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in C$, 那么 $\alpha_k \to -\infty$ 当 $k \to \infty$, 并且对 (4.1.17) 给出的数 $\gamma < 1$, 有

$$\frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|^\gamma} \leqslant C\|B\|, \quad C > 0为一常数, \quad k \in N. \tag{4.1.18}$$

证明 令 $z_k = x_k + iy_k$ 是对应于 λ_k 的特征向量，满足

$$\begin{cases} -Ax_k + Bx_k = \alpha_k x_k + \beta_k y_k, \\ -Ay_k + By_k = -\beta_k x_k + \alpha_k y_k. \end{cases}$$

从上式推出

$$\begin{aligned} -\alpha_k &= \frac{\langle Ax_k, A^{2\theta}x_k\rangle + \langle Ay_k, A^{2\theta}y_k\rangle}{\langle x_k, A^{2\theta}x_k\rangle + \langle y_k, A^{2\theta}y_k\rangle} - \frac{\langle Bx_k, A^{2\theta}x_k\rangle + \langle By_k, A^{2\theta}y_k\rangle}{\langle x_k, A^{2\theta}x_k\rangle + \langle y_k, A^{2\theta}y_k\rangle} \\ &= \frac{\|z_k\|_{\theta+\frac{1}{2}}^2 - \langle Bx_k, A^{2\theta}x_k\rangle - \langle By_k, A^{2\theta}y_k\rangle}{\|z_k\|_\theta^2}, \end{aligned}$$

$$\beta_k = \frac{\langle Bx_k, A^{2\theta}y_k\rangle - \langle By_k, A^{2\theta}x_k\rangle}{\|z_k\|_\theta^2},$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{1}{2}$ 是一个待定常数.

由 (4.1.17) 得到

$$|\langle Bx_k, A^{2\theta}y_k\rangle| \leqslant \|B\|\|x_k\|_\gamma\|y_k\|_{2\theta},$$

$$|\langle By_k, A^{2\theta}x_k\rangle| \leqslant \|B\|\|y_k\|_\gamma\|x_k\|_{2\theta}.$$

因此有

$$|\beta_k| \leqslant \frac{\|B\|\|z_k\|_\gamma\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_\theta^2}, \tag{4.1.19}$$

$$|\alpha_k| \geqslant \frac{\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^2 - \|B\|\|z_k\|_\gamma\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_\theta^2}, \tag{4.1.20}$$

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^2 + \|B\|\|z_k\|_\gamma\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_\theta^2}. \tag{4.1.21}$$

因为 L 是扇形算子，如果 L 的特征值数是无穷的，那么 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty}$ $\mathrm{Re}\lambda_k = -\infty$. 从 (4.1.21) 推出

$$\frac{\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^2 + \|B\|\|z_k\|_\gamma\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_\theta^2} \to \infty, \quad k\to\infty. \tag{4.1.22}$$

取 $\theta \geqslant 0$ 如下

$$\begin{cases} \theta + \dfrac{1}{2} = \gamma, & 当\ \gamma > \dfrac{1}{2}, \\ \theta = \gamma, & 当\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.1.23}$$

因为 $0 \leqslant \gamma < 1$, 从 (4.1.23) 可知 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{1}{2}$, 并且

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} + \theta \geqslant \max\{\gamma, 2\theta\}, \\ \dfrac{1}{2} + \theta > \min\{\gamma, 2\theta\}. \end{cases} \tag{4.1.24}$$

取 $\|z_k\|_{\theta+\frac{1}{2}} = 1, \forall k \in N$. 然后由 (4.1.24), 有

$$1 \geqslant \|z_k\|_\gamma, \quad 1 \geqslant \|z_k\|_{2\theta}.$$

另一方面，从 (4.1.22) 推出 $\|z_k\|_\theta \to 0 (k\to\infty)$, 这意味着

$$z_k \rightharpoonup^w 0, \quad 在 H_{\frac{1}{2}+\theta} 中.$$

因为 $H_\alpha \subset H_\beta$ 对所有 $\beta < \alpha$ 是紧嵌入，由 (4.1.24) 可推出

$$\|z_k\|_\gamma \cdot \|z_k\|_{2\theta} \to 0, \quad k\to\infty. \tag{4.1.25}$$

根据 (4.1.19),(4.1.20) 和 (4.1.25), 存在一个数 $K > 0$ 充分大，使得对所有的 $k > K$, 有

$$\frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|^\gamma} \leqslant \frac{2\|B\|\|z_k\|_\gamma\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_\theta^{2-2\gamma}\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^{2\gamma}} \tag{4.1.26}$$

$$= \frac{2\|B\|\|z_k\|_{2\theta}}{\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^{2\theta}\|z_k\|_\theta^{1-2\theta}} \quad (\text{由 } (4.1.23)).$$

由内插空间的基本性质 [98],

$$H_{2\theta} = [H_{\frac{1}{2}+\theta}, H_\theta]_\varepsilon,$$

这里 ε 由 $(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\theta\right)+\varepsilon\theta = 2\theta$ 确定，即 $\varepsilon = 1-2\theta$, 有下面内插不等式

$$\|z_k\|_{2\theta} \leqslant C_\theta\|z_k\|_{\frac{1}{2}+\theta}^{2\theta}\|z_k\|_\theta^{1-2\theta},$$

其中 $C_0 > 0$ 是一个常数. 这样，从 (4.1.26) 可得

$$\frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|^\gamma} \leqslant 2C_\theta\|B\|, \quad \forall k \geqslant K.$$

这就意味着 (4.1.18) 成立. 定理证毕.

注 4.4 算子 $L = -A + B$ 实际上能够被视为 $B: H_\gamma \to H(0 \leqslant \gamma < 1)$ 对扇形算子 A 产生的紧摄动. 定理 4.5 表明该摄动对算子 A 的谱 $\{\rho_k\}$ 造成的影响在虚部是 $|\rho_k|^\gamma$ 数量级的. 因而，它是可以合理地推测在条件 (4.1.16) 和 (4.1.17) 下， L 的谱 $\{\lambda_k\}$ 是完备的，并且有估计

$$\frac{|\mathrm{Re}\lambda_k - \rho_k|}{|\rho_k|^\gamma} \leqslant C, \quad \forall k \in N,$$

这里 $C > 0$ 是一个仅依赖范数 $\|B\|$ 的常数.

§4.2 Lyapunov-Schmidt 约化

§4.2.1 定态分歧问题介绍

从一个古老的物理问题介绍开始. 这个问题就是某个一端固定的水平杆受到水平压力下的屈曲问题，称之为 Euler-Bernoulli 问题.

设一个长度为 l 的杆在 $xy-$ 平面上水平地放在 x 轴上，如图 4.1 所示. 杆的一端在 $(x,y)=0$ 点是固定的，另一端受到一个强度为 p 的水平压力.

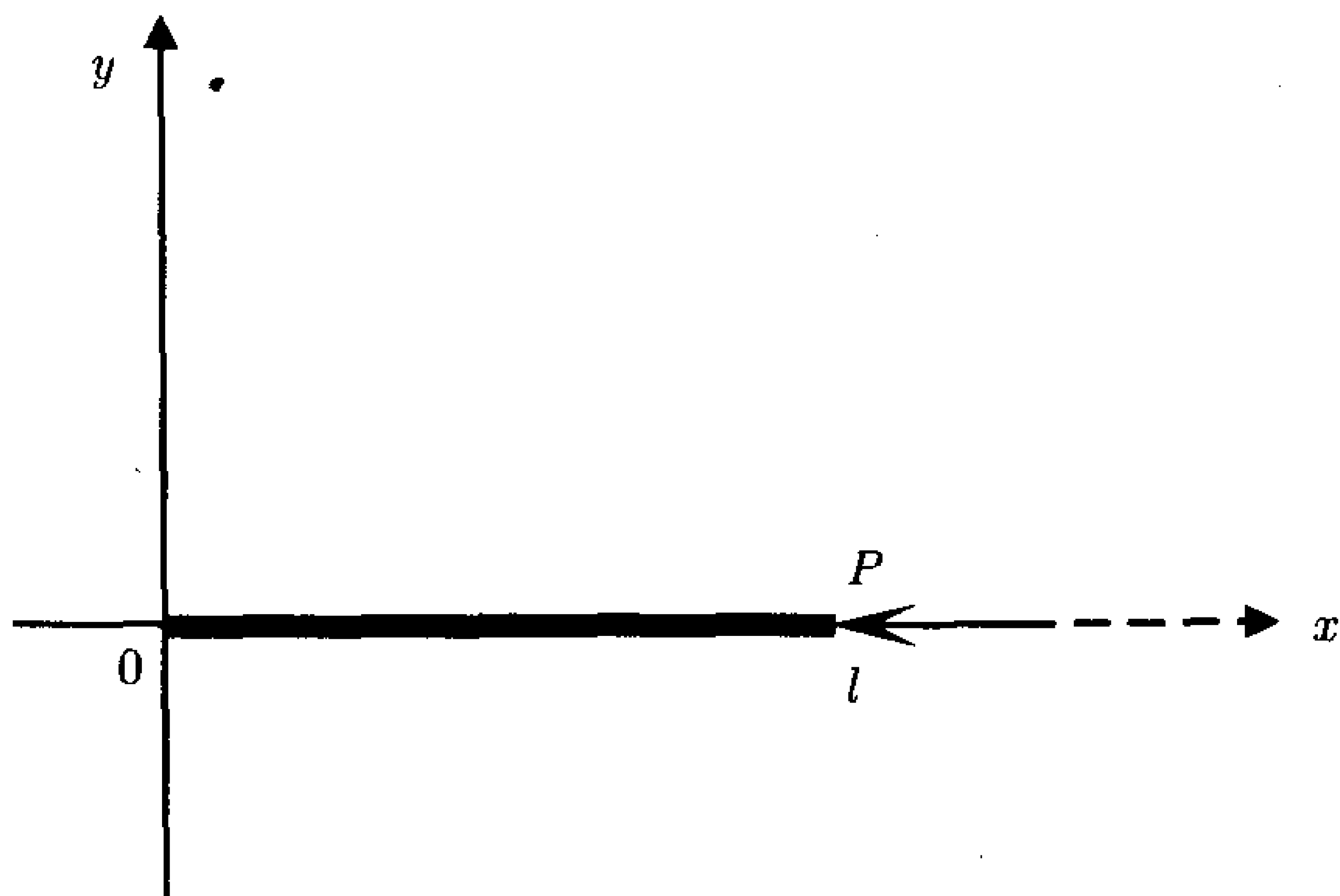


图 4.1

经验表明，当水平压力 p 小于某一值 p_0 时，这个杆在水平位置上不会发生弯曲. 而当 $p > p_0$ 时，杆会发生如图 4.2 所示的弯曲现象. 这一物理现象转化成数学问题就是定态分歧.

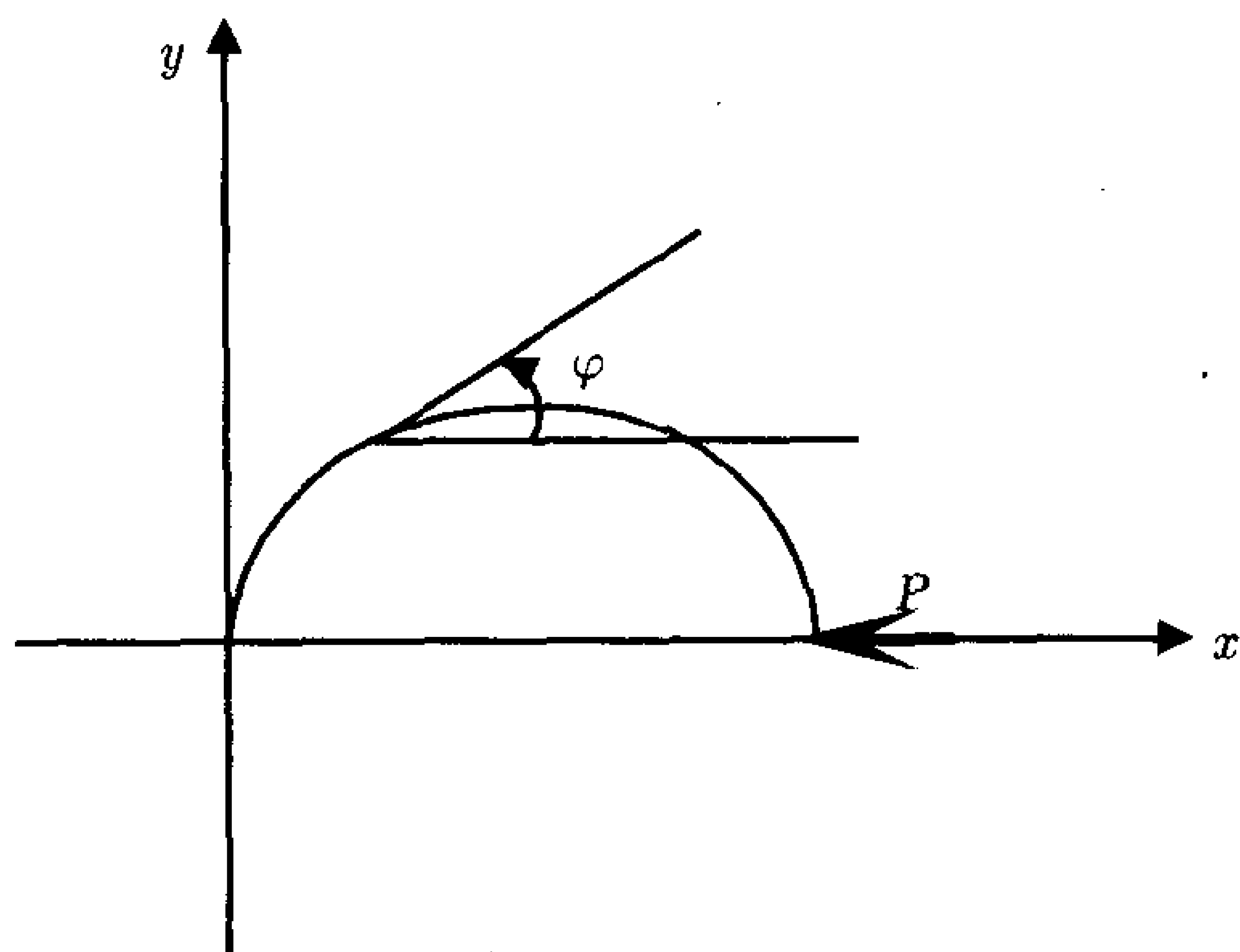


图 4.2

现在将这一现象转化为数学问题. 令 s 代表杆的弧长， $0 \leqslant s \leqslant l, \varphi(s)$ 代表杆在 s 点的切向量与 x 轴之间的夹角 (如图 4.2). 杆的 φ 角变化率是杆弯曲的曲率，它正比于该点所受的力矩

$$py = -k\frac{d\varphi}{ds}, \quad k > 0\text{为常数}. \tag{4.2.1}$$

此外曲线导数为

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\varphi.$$

假设杆的屈曲很小， $x \simeq s, \varphi \ll 1$, 则上式近似为

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi. \tag{4.2.2}$$

杆的两端满足边界条件

$$y(0) = y(l) = 0. \tag{4.2.3}$$

因而，从 (4.2.1)~(4.2.3) 可得到描述受压杆的屈出方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{ds^2} + \lambda \sin\varphi = 0, \\ \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

其中 $\lambda = p/k$ 是参变量. 它反映了压力 p 的强度.

这样，Euler-Bernoulli 杆的屈出现象就转化为方程 (4.2.4) 的分歧问题：当 λ 小于某一临界值 λ_0 时，即 $\lambda < \lambda_0$, 方程只有唯一解 $\varphi = 0$, 这代表杆没有发生屈曲，而当 $\lambda_0 < \lambda$ 时，杆发生弯曲意味着方程 (4.2.4) 产生出非零解 $\varphi_\lambda(s) \neq 0$, 并且 $\varphi_\lambda \to 0$, 当 $\lambda \to \lambda_0$, 这就是分歧.

这些自然现象的激发，促使人们从更一般的角度去研究非线性方程的分歧问题. 下面就从数学角度给出定态分歧的严格定义.

令 X, Y 是两个 Banach 空间，$L_\lambda : Z \times R^1 \to Y$ 是一个线性有界算子，$G : X \times R^1 \to Y$ 是一个连续映射，满足

$$G(u) = o(\|u\|), \quad u \in X.$$

考虑下面算子方程

$$L_\lambda u + G(u, \lambda) = 0. \tag{4.2.5}$$

显然 $(u, \lambda) = (0, \lambda)$ 是方程 (4.2.5) 的一个平凡解. 方程 (4.2.5) 的分歧问题就是寻求一个从某点 $(0, \lambda_0)$ 产生出的一个非平凡解 $(u_\lambda, \lambda) \neq (0, \lambda)$, 使得

$$u_\lambda \to 0, \quad 当\lambda \to \lambda_0,$$

如图 4.3 所示.

在下面给出更严格地分歧的定义.

定义 4.3 称方程 (4.2.5) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处分歧出一个解 $(u_\lambda, \lambda) \in X \times R^1$, 如果存在 (4.2.5) 的一个解序列 $(u_n, \lambda_n), u_n \neq 0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0, \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 0.$$

此时，$(0, \lambda_0)$ 称为方程 (4.2.5) 的一个分歧点.

由隐函数定理 (定理 2.2), 立刻可以推出方程 (4.2.5) 发生分歧的必要条件.

定理 4.6 如果方程 (4.2.5) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处发生分歧，那么线性算子 $L_{\lambda_0} : X \to Y$ 是不可逆的. 特别地，如果 $L_\lambda : X \to Y$ 是一个线性全连续场，则存在 $u_0 \in X, u_0 \neq 0$, 使得 $L_{\lambda_0} u_0 = 0$.

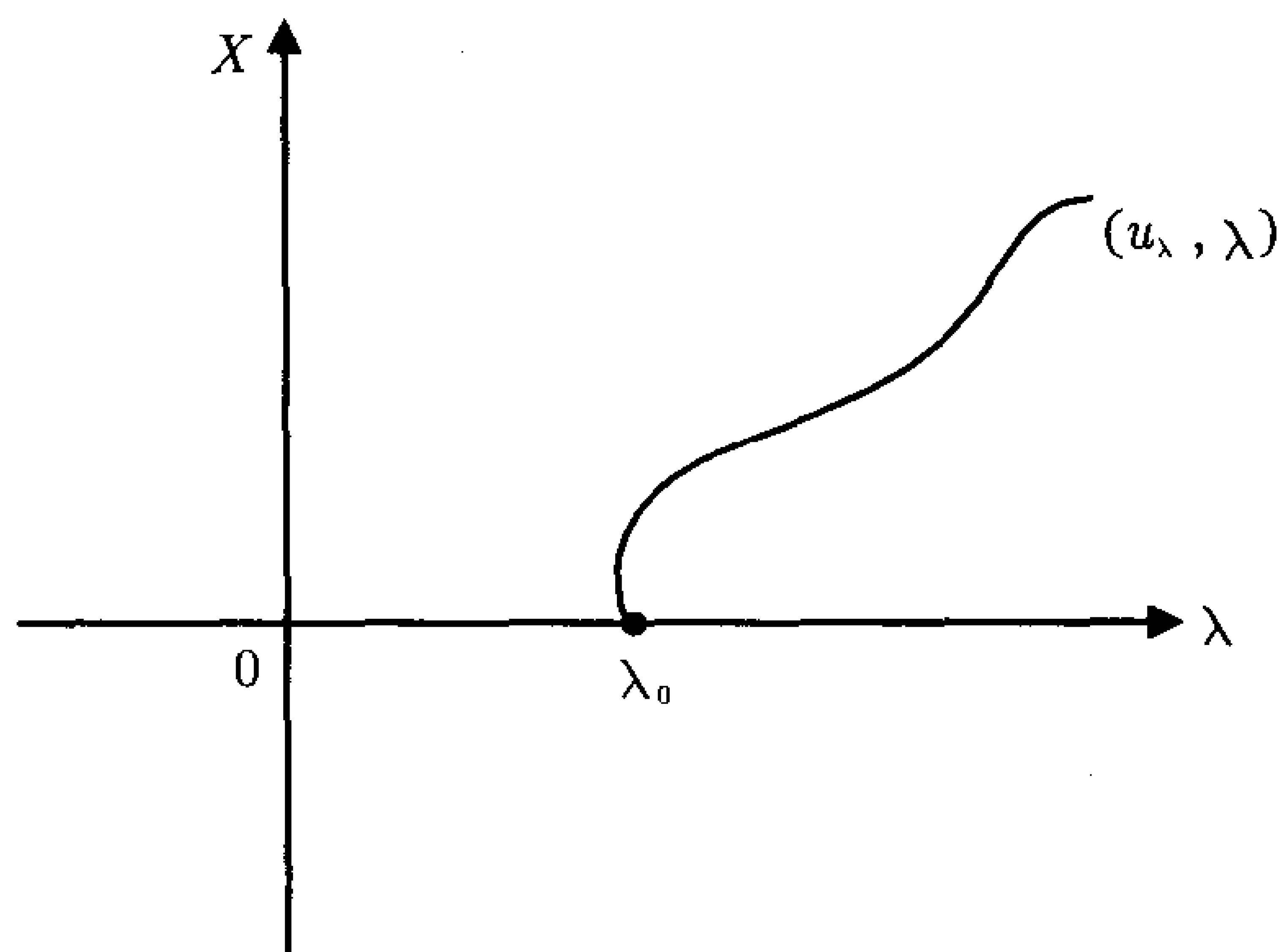


图 4.3

§4.2.2 Lyapunov-Schmidt 过程

从一个简单的例子开始来介绍 Lyapunov-Schmidt 约化方法. 考虑一个二维代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(x_1, x_2) = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(x_1, x_2) = 0, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

其中 $a_{ij} = a_{ij}(\lambda)$ 是参变量 λ 的连续函数, f_1 和 f_2 是 C^∞ 函数, 满足

$$(f_1(x), f_2(x)) = o(|x|).$$

显然 $(x, \lambda) = (0, \lambda)$ 是方程 (4.2.6) 的一个平凡解. 以下将使用 Lyapunov-Schmidt 过程讨论 (4.2.6) 的分歧, 以便人们能够清楚地了解 Lyapunov-Schmidt 过程的实质.

为了简单, 假设下面矩阵

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

在 λ_0 的邻域内有两个实特征值

$$\beta_1 = \lambda - \lambda_0, \quad \beta_2 = 1.$$

正如谱定理 (定理 4.3), 存在一个坐标变换, 使得方程 (4.2.6) 在该变换下成为如下形式

$$(\lambda - \lambda_0)x_1 + F_1(x_1, x_2) = 0, \tag{4.2.7}$$

$$x_2 + F_2(x_1, x_2) = 0, \tag{4.2.8}$$

其中 $F_i(x) = o(|x|), i = 1, 2.$

由隐函数定理，方程 (4.2.8) 在 $x_1 = 0$ 的邻域有一个解

$$x_2 = g(x_1), \quad g(x_1) = o(|x_1|).$$

将 $x_2 = g(x_1)$ 代入 (4.2.7), 得到

$$(\lambda - \lambda_0)x_1 + F_1(x_1, g(x_1)) = 0, \tag{4.2.9}$$

其中 $F_1(x_1, g(x_1)) = o(|x_1|)$.

这样，方程 (4.2.6) 的分歧问题就等价于方程 (4.2.9) 的分歧存在性. 由指标定理 (定理 2.13) 看到

$$\begin{aligned}\text{ind}((\lambda - \lambda_0)id + F_1, 0) &= \text{ind}((\lambda - \lambda_0)id, 0) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{当}\lambda > \lambda_0, \\ -1, & \text{当}\lambda < \lambda_0. \end{cases}\end{aligned}$$

这就意味着方程 (4.2.9) 在 $(x_1, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 有一个分歧，因而 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 是 (4.2.6) 的一个分歧点.

现在来介绍一般情况下的 Lyapunov-Schmidt 约化方法，其基本思想就是将一个无穷维方程的分歧问题约化为一个有限维方程的分歧.

令 X 为一 Banach 空间，考虑下面方程

$$u - \lambda Bu + G(u, \lambda) = 0, \tag{4.2.10}$$

其中 $B : X \to X$ 是一个线性紧算子， $G : X \times R^1 \to X$ 是一个连续映射，满足

$$G(u, \lambda) = o(\|u\|), \quad \forall \lambda \in R^1.$$

假设 λ_0^{-1} 是 B 的一个代数重数为 $m \geqslant 1$ 的实特征值, 即存在 $u_0 \in X, u_0 \neq 0$, 使得 $Bu_0 = \lambda_0^{-1}u_0$. 于是，空间 X 能够被分解成 B 的两个不变子空间之和 (由谱定理)：

$$\begin{cases} X = E_0 \oplus E_1, \\ E_0 = \cup_{n \in N}\{x \in X | \ (id - \lambda_0 B)^n x = 0\}, \\ \dim E_0 = m. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

线性算子 $B : X \to X$ 能够被分解成

$$B = B_0 + B_1,$$

$$B_0 = B|_{E_0} : E_0 \to E_0,$$
$$B_1 = B|_{E_1} : E_1 \to E_1.$$

令 $P_0 : X \to E_0$ 及 $P_1 : X \to E_1$ 是规范投影，那么方程 (4.2.10) 被分解成如下形式

$$x - \lambda B_0 x + P_0 G(x, y, \lambda) = 0, \quad x \in E_0, \tag{4.2.12}$$

$$y - \lambda B_1 y + P_1 G(x, y, \lambda) = 0, \quad y \in E_1. \tag{4.2.13}$$

因为 $B : X \to X$ 是紧算子，λ_0^{-1} 不是 B_1 的特征值，故 $id - \lambda_0 B_1 : E_1 \to E_1$ 是可逆的．由隐函数定理，方程 (4.2.13) 在 $(0, \lambda_0)$ 的邻域内有解

$$\begin{cases} y = y(x, \lambda), & |x| < \delta, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \\ y(x, \lambda) = o(|x|). \end{cases} \tag{4.2.14}$$

将 $y(x, \lambda)$ 代入 (4.2.12)，得到

$$x - \lambda B_0 x + P_0 G(x, y(x, \lambda), \lambda) = 0, \tag{4.2.15}$$

这是一个 m 维代数方程，称为 (4.2.10) 的分歧方程．

显然，如果 (4.2.15) 从 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处分歧出一个解

$$(x_\lambda, \lambda), \quad x_\lambda \neq 0, \quad x_\lambda \to 0, \quad \text{当} \lambda \to \lambda_0,$$

则

$$(u_\lambda, \lambda) = (x_\lambda + y(x_\lambda, \lambda), \lambda)$$

就是方程 (4.2.10) 在 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处分歧出的解．反之也然．这样，就得到下面定理，它保证了 Lyapunov-Schmidt 过程的有效性．

定理 4.7 令 λ_0^{-1} 是 B 的一个代数重数为 $m \geqslant 1$ 的特征值，那么方程 (4.2.10) 在 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处的分歧问题是等价于 m 维代数方程 (4.2.15) 的分歧．

特别需要强调指出，这里介绍的 Lyapunov-Schmidt 过程与传统教科书中介绍的略有不同．后者都是将 X 分解为 $id - \lambda_0 B$ 的核空间 X_0 及值域空间 $\widetilde{X}_0$ 与它们的补空间 X_1 及 $\widetilde{X}_1$ 的直和

$$\begin{cases} X = X_0 \oplus X_1, \\ X_0 = \ker(id - \lambda_0 B) = \{x \in X | \ x - \lambda_0 B x = 0\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \widetilde{X}_0 \oplus \widetilde{X}_1, \\ \widetilde{X}_1 = R(id - \lambda_0 B) = \{y \in X | (id - \lambda_0 B)x = y, x \in X\}. \end{cases}$$

而这里采用的是 (4.2.11) 的分解，即广义特征向量空间 E_0 与其补空间 E_1 的直和.

这种差别导致应用上的区别. 采用传统的方法可以将一般的 Fredholm 算子包括进去，即 $B: H_1 \to H$ 可以不必是紧算子，但代价是一般情况下 $X_0 \neq \widetilde{X}_0$，不能将方程 (4.2.10) 分解为 (4.2.12) 和 (4.2.13) 的形式，而只能分解为如下形式

$$P_0[u - \lambda Bu] + P_0 G(u, \lambda) = 0, \tag{4.2.16}$$

$$P_1[u - \lambda Bu] + P_1 G(u, \lambda) = 0, \tag{4.2.17}$$

这里 $P_0: X \to \widetilde{X}_0, P_1: X \to \widetilde{X}_1$ 为规范投影. 当 $u = x + y, x \in X_0, y \in X_1$ 时，一般情况 $P_0 u = P(x + y) \neq x$.

像 (4.2.16) 和 (4.2.17) 这种分解在应用中有许多不方便的地方，特别是在许多偏微分方程的应用中更是如此. 下面分析两种分解在应用中的差异.

首先介绍 (4.2.16),(4.2.17) 分解下的 Lyapunov-Schmidt 过程. 令 $u = x + y, x \in X_0, y \in X_1$, 则 (4.2.17) 可写为

$$P_1(y - \lambda By) + P_1(x - \lambda Bx) + P_1 G(u, \lambda) = 0, \tag{4.2.18}$$

其中 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, 当 $\varepsilon > 0$ 很小时，

$$P_1(x - \lambda Bx) = (1 - \lambda/\lambda_0) P_1 x$$

也很小，而算子 $P_1(id - \lambda B): X_1 \to \widetilde{X}_1$ 是可逆的. 由隐函数定理方程 (4.2.18) 有解

$$y = y(x, \lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon. \tag{4.2.19}$$

注意这里的解 $y(x, \lambda)$ 一般不再像 (4.2.13) 的解 (4.2.14). 那样关于 x 是一个高阶项，即 $y(x, \lambda) \neq o(\|x\|)$, 这是因为 $P_1(x - \lambda Bx) \neq 0$. 将 (4.2.19) 代入 (4.2.16) 即得方程 (4.2.10) 的分歧方程如下

$$(1 - \lambda/\lambda_0) P_0 x + P_0(y(x) - \lambda By(x)) + P_0 G(x + y(x), \lambda) = 0. \tag{4.2.20}$$

这个方程也决定了 (4.2.4) 的分歧.

下面来分析 (4.2.15) 和 (4.2.20) 这两种分歧方程的差异，它们分别代表了两种不同分解方法的本质.

(1) 方程 (4.2.15) 是一个 $m = \dim E_0$ 维的代数方程，m 为特征值 λ_0 的代数重数. 并且 (4.2.15) 的线性部分包含了线性算子 $(id - \lambda B)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 处所有从正变到负值的特征值信息. 这一点对于理解经典的 Krasnoselski 定理非常重要.

而方程 (4.2.20) 是 $r = \dim X_0$ 维的代数方程， r 为 λ_0 的几何重数，其线性部分无法显式表达出来，分歧特征不易看出.

(2) 方程 (4.2.13) 的解 (4.2.14) 与方程 (4.2.17) 的解 (4.2.19) 有一个重要的区别，即 (4.2.14) 不含线性项. 这一点在许多应用中产生根本性的差别.

(3) 由谱定理 (定理 4.4). 在许多情况下方程 (4.2.15) 能够被一个显式表达的分歧方程逼近，而这个显式表达的分歧方程在 $\lambda = \lambda_0$ 点处包含了 (4.2.15) 的全分歧信息. 在下一小节我们将专门讨论这一点.

(4) 由上述三点的特征，采用 (4.2.11) 的分解方式能得到在后面 4.4 节证明的偶数阶非退化奇点的分歧定理，该定理不考虑特征值的代数重数. 并且这是根本的，采用经典分解方法是无法得到该定理.

§4.2.3 约化过程的规范化

令 X_1, X 是 Banach 空间， $X_1 \subset X$ 是稠密的包含，考虑下面非线性方程

$$L_\lambda u + G(u, \lambda) = 0, \tag{4.2.21}$$

其中 $L_\lambda = A + B_\lambda : X_1 \to X$ 是全连续场， $G(\cdot, \lambda) : X_1 \to X$ 是 C^r 映射 $(r \geqslant 2)$ 它们都连续地依赖于参变量 $\lambda \in R^1$.

假设 $\{\beta_k(\lambda) | k = 1, 2, \cdots\}$ 为所有 L_λ 的特征值 (计入重数), 并且在 $\lambda = \lambda_0$ 处满足

$$\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.2.22}$$

$$\beta_j(\lambda_0) \neq 0, \quad \forall j \geqslant m + 1. \tag{4.2.23}$$

映射 $G(u, \lambda)$ 在 $u = 0$ 处有 Taylor 展开

$$G(u, \lambda) = \sum_{n=k}^{r} G_n(u, \lambda) + o(\|u\|_{X_1}^r), \tag{4.2.24}$$

其中 $k \geqslant 2, G_n(u, \lambda)$ 为一个 n 重线性映射，因而

$$G_n(\alpha u, \lambda) = \alpha^n G_n(u, \lambda), \quad \forall \alpha \in R^1.$$

令 $\{e_1(\lambda), \cdots, e_m(\lambda)\}$ 为 L_λ 对应于(4.2.22) 的特征向量, $\{e_1^*(\lambda), \cdots, e_m^*(\lambda)\} \subset X_1^*$ 为对偶算子 L_λ^* 在 (4.2.22) 的特征向量，其中 $X_1^* \subset X^*$ 为一稠密子空间, X^* 为 X 的对偶空间，由谱定理 (见注 4.2), 在 $\lambda = \lambda_0$ 邻域， X 能够被分解为

$$X_1 = E_1^\lambda \oplus E_2^\lambda,$$

$$X = E_1^\lambda \oplus \bar{E}_2^\lambda, \quad \bar{E}_2^\lambda\text{是}E_2^\lambda\text{在}X\text{中闭包},$$
$$E_1^\lambda = \mathrm{span}\{e_1(\lambda), \cdots, e_m(\lambda)\},$$
$$E_2^\lambda = \{u \in X_1 | < u, e_i^*(\lambda) >= 0, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

线性算子 L_λ 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近可分解为

$$L_\lambda = \mathcal{L}_\lambda^0 \oplus \mathcal{L}_\lambda,$$
$$\mathcal{L}_\lambda^0 : E_1^\lambda \to E_1^\lambda,$$
$$\mathcal{L}_\lambda : E_2^\lambda \to \bar{E}_2^\lambda.$$

令 $u \in X_1$, 则 $u = x + y, x \in E_1^\lambda, y \in E_2^\lambda$, 则方程 (4.2.21) 可分解为如下形式

$$\mathcal{L}_\lambda^0 x + P_1 G(x + y, \lambda) = 0, \tag{4.2.25}$$

$$\mathcal{L}_\lambda y + P_2 G(x + y, \lambda) = 0. \tag{4.2.26}$$

在条件 (4.2.22) 和 (4.2.23) 假设下，$\mathcal{L}_\lambda : E_2^\lambda \to \bar{E}_2^\lambda$ 是可逆的，因而有隐函数定理，(4.2.26) 有解

$$\begin{cases} y = \Phi(x, \lambda), \\ \Phi(x, \lambda) = o(\|x\|), \quad \forall \lambda \in R^1. \end{cases} \tag{4.2.27}$$

将 (4.2.27) 代入 (4.2.25) 便得 (4.2.21) 的分歧方程

$$\mathcal{L}_\lambda^0 x + P_1 G(x + \Phi(x, \lambda), \lambda) = 0. \tag{4.2.28}$$

方程 (4.2.28) 就是 Lyapunov-Schmidt 过程的规范化. 在 (4.2.24) 条件下，可以得到 (4.2.28) 的一阶和二阶近似.

方程 (4.2.28) 的一阶近似.

令 $x \in E_1^\lambda, x = \sum_{j=1}^m x_j e_j(\lambda)$, 假设 $x = 0$ 是下面代数方程的孤立零点，

$$g_j(x, \lambda) = \langle G_k(x, \lambda), e_j^*(\lambda) \rangle = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{4.2.29}$$

这里 $G_k(u, \lambda)$ 为 (4.2.24) 中的最低阶 k 重线性算子. 则方程 (4.2.28) 的分歧由下面一阶近似方程决定

$$J_\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_1, \ \cdots, x_m, \lambda) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \ \cdots, x_m, \lambda) \end{pmatrix} = 0, \tag{4.2.30}$$

其中， $g_j(x_1,\cdots,x_m,\lambda)(1\leqslant j\leqslant m)$ 由 (4.2.29) 给出，是关于 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 的 k 齐次函数， J_λ 是 $\mathcal{L}_\lambda^0$ 在 L_λ 和 L_λ^* 的特征向量 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 及 $\{e_1^*,\cdots,e_m^*\}$ 作用下的 Jordan 形矩阵，由谱定理，这样的特征向量存在．即

$$J_\lambda=\begin{pmatrix} J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_k\end{pmatrix},$$

其中 $J_1,\cdots,J_k$ 为 Jordoṅ 块，对角元素为 $\beta_i(\lambda),1\leqslant i\leqslant m$. 方程 (4.2.28) 的二阶近似.

当 $x=0$ 不是 (4.2.29) 的孤立零点时，可以得到方程 (4.2.28) 的二阶近似方程如下

$$J_\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}+g_k(x+\Phi_k(x,\lambda),\lambda)+\sum_{n=k+1}^{2k-1}g_n(x,\lambda)=0, \tag{4.2.31}$$

其中 J_λ 如 (4.2.30), $g_r=(g_{r1},\cdots,g_{rn})^{\mathrm{T}}(k\leqslant r\leqslant 2k-1)$ 为

$$g_{kj}(x+\Phi_k(x,\lambda),\lambda)=\langle G_k(x+\Phi_k,\lambda),e_j^*(\lambda)\rangle,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

$$g_{nj}(x,\lambda)=\langle G_n(x,\lambda),e_j^*(\lambda)\rangle,\quad k+1\leqslant n\leqslant 2k-1.$$

$\Phi_k(x,\lambda)$ 是由 (4.2.26) 给出的一阶近似，其表达为

$$\Phi_k(x,\lambda)=-\mathcal{L}_\lambda^{-1}P_2G_k(x,\lambda).$$

方程 (4.2.31) 称为 (4.2.28) 的二阶近似.

下面给出一个例子来表明约化方程的近似．考虑下面方程

$$\begin{cases}\Delta u_1+\lambda u_1+\displaystyle\sum_{2\leqslant i+j\leqslant 3}a_{ij}u_1^iu_2^j=0,\\ \Delta u_2+\lambda u_2+\displaystyle\sum_{2\leqslant i+j\leqslant 3}b_{ij}u_1^iu_2^j=0,\\ u_i|_{\partial\Omega}=0,\quad i=1,2,\end{cases} \tag{4.2.32}$$

这里 $x\in\Omega\subset R^n(n\leqslant 6),\Omega$ 为有界区域， a_{ij},b_{ij} 为常数.

令 λ_1 和 ψ_1 是 Laplace 算子的第一特征值和特征向量

$$\begin{cases}-\Delta\psi_1=\lambda_1\psi_1,\\ \psi_1|_{\partial\Omega}=0,\quad \displaystyle\int_\Omega\psi_1^2dx=1.\end{cases}$$

建立

$$X = L^2(\Omega, R^2), \quad X_1 = H^2(\Omega, R^2) \cap H_0^1(\Omega, R^2).$$

令 $L_\lambda = -A + B : X_1 \to X$ 及 $G : X_1 \to X$ 定义为

$$\begin{aligned} -Au &= (\Delta u_1, \Delta u_2)^{\mathrm{T}}, \\ B_\lambda u &= (\lambda u_1, \lambda u_2)^{\mathrm{T}}, \\ G(u) &= (G_2^1(u) + G_3^1(u), G_2^2(u) + G_3^2(u))^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} G_r^1(u) &= \sum_{i+j=r} a_{ij} u_1^i u_2^j, \quad r = 2, 3, \\ G_r^2(u) &= \sum_{i+j=r} b_{ij} u_1^i u_2^j, \quad r = 2, 3. \end{aligned}$$

容易看到 L_λ 的第一特征值重数为 2, 表达为

$$\beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda) = \lambda - \lambda_1,$$

特征向量为

$$e_1 = e_1^* = (\psi_1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad e_2 = e_2^* = (0, \psi_1)^{\mathrm{T}}.$$

此时，在 (4.2.29) 式中 $k = 2, x = (x_1\psi_1, x_2\psi_2)$,

$$g_1(x, \lambda) = \int_\Omega \sum_{i+j=2} a_{ij} x_1^i x_2^j \psi_1^3(\widetilde{x}) d\widetilde{x},$$

$$g_2(x, \lambda) = \int_\Omega \sum_{i+j=2} b_{ij} x_1^i x_2^j \psi_1^3(\widetilde{x}) d\widetilde{x}.$$

因而方程 (4.2.32) 的一阶近似约化方程 (4.2.30) 可表达为

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_1)x_1 + \alpha \displaystyle\sum_{i+j=2} a_{ij} x_1^i x_2^j = 0, \\ (\lambda - \lambda_1)x_2 + \alpha \displaystyle\sum_{i+j=2} b_{ij} x_1^i x_2^j = 0, \\ \alpha = \displaystyle\int_\Omega \psi_1^3 dx > 0. \end{cases} \tag{4.2.33}$$

再考察方程 (4.2.32) 的二阶近似约化方程. 令 $\{\lambda_k\}$ 和 $\{\psi_k\}$ 为 Laplace 算子的所有特征值和特征向量. 令 $u = (u_1, u_2) = x + y$,

$$\begin{aligned} x &= (x_1\psi_1, x_2\psi_1), \\ y &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} y_{1k}\psi_k, \sum_{k=2}^{\infty} y_{2k}\psi_k \right). \end{aligned}$$

那么 (4.2.32) 关于 x 和 y 的分解方程 (4.2.25) 和 (4.2.26) 分别可表达为如下形式

$$\begin{cases}(\lambda-\lambda_1)x_1+\displaystyle\int_\Omega(G_2^1(x+y)+G_3^1(x+y))\psi_1 d\widetilde{x}=0,\\(\lambda-\lambda_1)x_2+\displaystyle\int_\Omega(G_2^2(x+y)+G_3^2(x+y))\psi_1 d\widetilde{x}=0,\end{cases}\tag{4.2.34}$$

$$\begin{cases}(\lambda-\lambda_k)y_{1k}+\displaystyle\int_\Omega(G_2^1(x+y)+G_3^1(x+y))\psi_k d\widetilde{x}=0,\\(\lambda-\lambda_k)y_{2k}+\displaystyle\int_\Omega(G_2^2(x+y)+G_3^2(x+y))\psi_k d\widetilde{x}=0.\end{cases}\tag{4.2.35}$$

取 (4.2.35) 的一阶近似可得

$$\begin{cases}(\lambda-\lambda_k)y_k+\displaystyle\int_\Omega G_2^1(x)\psi_k d\widetilde{x}=0,\\(\lambda-\lambda_k)y_k+\displaystyle\int_\Omega G_2^2(x)\psi_k d\widetilde{x}=0.\end{cases}$$

从而可以解出 (4.2.35) 的一阶近似解

$$\Phi(x,\lambda)=\left(\sum_{j=2}^{\infty}\Phi_j^1(x,\lambda)\psi_j,\sum_{j=2}^{\infty}\Phi_j^2(x,\lambda)\psi_j\right),$$

$$\Phi_l^1(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda_l-\lambda}\sum_{i+j=2}\alpha_l a_{ij}x_1^i x_2^j,$$

$$\Phi_l^2(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda_l-\lambda}\sum_{i+j=2}\alpha_l b_{ij}x_2^i x_2^j,\quad l=2,3,\cdots.$$

将 $\Phi(x,\lambda)$ 代入到 (4.2.34)，再取二阶近似得

$$\begin{cases}(\lambda-\lambda_1)x_1+\alpha\displaystyle\sum_{i+j=2}a_{ij}x_1^i x_2^j+\beta\sum_{i+j=3}a_{ij}x_1^i x_2^j+g_1(x,\lambda)=0,\\(\lambda-\lambda_1)x_2+\alpha\displaystyle\sum_{i+j=2}b_{ij}x_1^i x_2^j+\beta\sum_{i+j=3}b_{ij}x_1^i x_2^j+g_2(x,\lambda)=0,\end{cases}\tag{4.2.36}$$

其中

$$g_1(x,\lambda)=2\sum_{l=2}^{\infty}\alpha_l(a_{11}x_1\Phi_l^1+a_{12}x_1\Phi_l^2+a_{21}x_2\Phi_l^1+a_n x_2\Phi_l^2),$$

$$g_2(x,\lambda)=2\sum_{l=2}^{\infty}\alpha_l(b_{11}x_1\Phi_l^1+b_{12}x_1\Phi_l^1+b_{21}x_2\Phi_l^1+b_{22}x_2\Phi_l^2),$$

$$\alpha=\int_\Omega\psi_1^3 dx,\beta=\int_\Omega\psi_1^4 dx,\alpha_l=\int_\Omega\psi_1^2\psi_l dx.$$

这样，就得到 (4.2.32) 的一阶近似的分歧约化方程 (4.2.33) 和二阶近似的分歧约化方程 (4.2.36).

当 $x = 0$ 是下面代数方程孤立零点时,

$$a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

$$b_{11}x_1^2 + (b_{12} + b_{11})x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0,$$

一阶近似方程 (4.2.33) 就包含了 (4.2.32) 在 $\lambda = \lambda_1$ 的全部分岐信息. 在这种情况下, 由 §4.4 的分岐定理可知, 方程 (4.2.32) 在 $\lambda = \lambda_1$ 处一定发生分歧. 当 $x = 0$ 不是上述代数方程的孤立奇点时, 可以考虑 (4.2.32) 的二阶近似方程 (4.2.36).

§4.2.4　分歧解的正则性及 Morse 指数

一般来说, 方程 (4.2.21) 的分歧总是与其相关联的演化方程的动力学性质有关, 也就是说 (4.2.21) 的分歧解是下面非线性演化方程的平衡点

$$\frac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda). \tag{4.2.37}$$

而方程 (4.2.37) 平衡点邻域的动力学性质经常是人们关心的课题. 因此, 有必要考虑 (4.2.21) 分歧解的几何性质.

令非线性算子 $G(\cdot, \lambda) : X_1 \to X$ 是紧的, 那么对任何 $u_0 \in X_1$ 其导算子 $D_uG(u_0, \lambda) : X_1 \to X$ 是一个线性紧算子. 在这一小节, 总是假设 G 是紧的满足 (4.2.24), L_λ 是扇形算子.

定义 4.4　令 $u_\lambda \in X_1$ 是方程 (4.2.21) 从 $\lambda = \lambda_0$ 的分歧解, 称该分歧解是正则的, 或者说是非退化的, 如果 $L_\lambda + G(\cdot, \lambda)$ 在 u_λ 的导算子

$$L_\lambda + D_uG(u_\lambda, \lambda) : X_1 \to X \tag{4.2.38}$$

对所有 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 充分小是线性同构.

定义 4.5　令 $u_\lambda \in X_1$ 是方程 (4.2.21) 的非退化分歧解, 并且对所有 $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ 充分小, 由 (4.2.38) 定义的线性算子的特征值 $\mathrm{Re}\beta_j(\lambda) \neq 0$. 然后定义 u_λ 的 Morse 指数为

$$k = (4.2.38)\text{所有有正实部的特征值数}.$$

这些特征值数是计入代数重数的.

由定理 3.2 和中心流形定理, 当 u_λ 是 (4.2.21) 的一个非退化分歧解, 并且 Morse 指数 $k = 0$ 时, u_λ 是 (4.2.37) 的一个局部渐近稳定平衡点. 如果 Morse 指数 $k \geqslant 1$, 那么 u_λ 就是一个鞍点, 它有一个 k 维不稳定流形和一个在 X 中有余维 k 的稳定流形.

一般来说, 很难直接从算子 (4.2.38) 来判定分歧解 u_λ 的正则性及其 Morse 指数. 然而下面定理保证了 (4.2.21) 的 Lyapunov-Schmidt 规范约化方程分歧解

x_λ 的正则性是等价于 u_λ 的正则性，并且也给出 x_λ 与 u_λ 之间 Morse 指数的关系.

令 L_λ 的实特征值满足条件 (4.2.22) 和 (4.2.23), 然后方程 (4.2.21) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的分歧问题等价于规范约化方程 (4.2.28) 的分歧. 如果 $x(\lambda)$ 是 (4.2.28) 从 $\lambda=\lambda_0$ 的分歧解, 那么 $u_\lambda=x(\lambda)+\Phi(x,\lambda)$ 是 (4.2.21) 从 $\lambda=\lambda_0$ 的分歧解, 其中 $\Phi(x,\lambda)$ 如 (4.2.27) 是方程 (4.2.26) 的解.

下面定理对判定方程 (4.2.21) 分歧解的正则性是有用的.

定理 4.8 令 x_λ 是 (4.2.28) 从 $\lambda=\lambda_0$ 的一个分歧解. 那么 (4.2.21) 的分歧解 $u_\lambda=x_\lambda+\Phi(x_\lambda,\lambda)$ 是非退化的充要条件是 x_λ 关于方程 (4.2.28) 是非退化的.

证明 (4.2.28) 在 x_λ 的导算子由下式给出

$$\mathcal{L}_\lambda+D_xg+D_\Phi g\circ D_x\Phi|_{x=x_\lambda}:E_1^\lambda\to E_1^\lambda, \tag{4.2.39}$$

这里 $g(x,\Phi)=P_1G(x+\Phi,\lambda)$.

另一方面， (4.2.21) 在 $u_\lambda=x_\lambda+\Phi(x,\lambda)$ 的导算子 (4.2.38) 是可逆的充要条件是下面方程没有非零解 $u=x+y$,

$$(\mathcal{L}_\lambda+D_xg)x+D_\Phi g\circ y=0, \tag{4.2.40}$$

$$(\mathcal{L}_\lambda+D_\Phi f)y+D_xf\circ x=0, \tag{4.2.41}$$

其中 $f(x,\Phi)=P_2G(x+\Phi,\lambda),x\in E_1^\lambda,y\in E_2^\lambda$, 并且导算子是在 $u_\lambda=x_\lambda+\Phi(x_\lambda,\lambda)$ 取的.

因为 u_λ 充分小当 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 充分小时，由 (4.2.24), 这一项 $\|D_\Phi f\|$ 也是充分小，因此算子

$$B=\mathcal{L}_\lambda+D_\Phi f:X_1\to X$$

是可逆的. 于是从 (4.2.41) 推出

$$y=-B^{-1}D_xf\circ x,$$

将 y 代入 (4.2.39) 得到

$$(\mathcal{L}_\lambda+D_xg-D_\Phi g\circ B^{-1}\circ D_xf)x=0. \tag{4.2.42}$$

此外，由 (4.2.26) 可推出

$$D_x\Phi\cdot x=(-B^{-1}\circ D_xf)x.$$

因此算子 (4.2.39) 是可逆的充分必要条件为 (4.2.42) 没有非零解 $x\in E_1^\lambda$, 即 (4.2.40) 和 (4.2.41) 没有非零解 $u=x+y$. 这样就证明了该定理.

下面考虑方程 (4.2.21) 与它的约化方程 (4.2.28) 分歧解 u_λ 和 x_λ 之间 Morse 指数关系. 为此目的, 假设 L_λ 的所有特征值为 $\{\beta_k(\lambda) \in C | k = 1, 2, \cdots\}$ 满足 $\beta_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 领域为实特征值, 并且

$$\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4.2.43}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) > 0, & m < j \leqslant m+n \\ \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) < 0, & m+n+1 \leqslant j. \end{cases} \tag{4.2.44}$$

从直观上, 人们很自然认为若 (4.2.28) 分歧解 x_λ 有 Morse 指数 k, 那么 (4.2.21) 分歧解 u_λ 的 Morse 指数为 $n+k$. 然而一般情况要复杂一些. 但是当 x_λ 是 (4.2.28) 的一阶近似方程 (4.2.33) 的非退化分歧解, 并且 Morse 指数为 k, 那么 (4.2.21) 分歧解 u_λ 的 Morse 指数为 $n+k$.

定理 4.9 在 (4.2.43) 和 (4.2.44) 条件下, 每个一阶近似约化方程 (4.2.30) 从 $\lambda = \lambda_0$ 的非退化分歧解 x_λ 都唯一地对应于原方程 (4.2.21) 一个从 $\lambda = \lambda_0$ 的非退化分歧解 u_λ, 并且若 x_λ 有 Morse 指数 k, 那么 u_λ 有 Morse 指数 $n+k$, 这里 n 为 (4.2.44) 所给出的整数.

证明 该定理的证明依赖于中心流形的约化, 这是因为 u_λ 的 Morse 指数等于方程 (4.2.37) 在 u_λ 处的不稳定流形维数, 其值为 n 与 (4.2.37) 在 u_λ 处中心流形中不稳定流形维数之和. 而 (4.2.30) 正是 (4.2.37) 在 u_λ 处中心流形约化的一阶近似方程的稳态方程. 因而定理 4.9 可由此而推出. 但是这里为了避免使用中心流形约化, 而是仅仅使用 Lyapunov-Schmidt 约化, 我们只对这种特殊情况进行证明, 即 (4.2.43) 中的 $\beta_i(\lambda) = \lambda - \lambda_0, 1 \leqslant i \leqslant m$. 这样方程 (4.2.30) 可写为如下形式

$$(\lambda - \lambda_0)x_i + g_i(x, \lambda) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.2.45}$$

因为 $g_i(x, \lambda)$ 关于 x 是 $k \geq 2$ 齐次函数, 方程 (4.2.45) 的分歧解可表达为

$$x_\lambda = (\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{k-1}} x_0,$$

其中 x_0 满足方程 $x_i + g_i(x, \lambda) = 0 (1 \leqslant i \leqslant m)$.

因而方程 (4.2.45) 在 x_λ 的 Jacobi 矩阵为

$$(\lambda - \lambda_0)(id + D_x g^k(x_0, \lambda)), \tag{4.2.46}$$

其特征值为 $|\lambda - \lambda_0|$ 数量级.

另一方面，方程 (4.2.21) 的分歧解为

$$u_\lambda = x_\lambda + o(|x_\lambda|) = (\lambda-\lambda_0)^{\frac{1}{k-1}} x_0 + o(|\lambda-\lambda_0|^{\frac{1}{k-1}}).$$

(4.2.21) 在 u_λ 的导算子

$$L_\lambda + DG(u_\lambda, \lambda) : X_1 \to X \tag{4.2.47}$$

在 $\lambda=\lambda_0$ 邻域至少有 n 个特征值 $\widetilde{\beta}_j(\lambda)(m<j\leqslant m+n)$，使得

$$\mathrm{Re}\widetilde{\beta}_j(\lambda)>0, \quad 且|\beta_j(\lambda)-\widetilde{\beta}_j(\lambda)|\to 0, \quad 当\lambda\to\lambda_0.$$

下面只需证明 (4.2.47) 有严格的 m 个特征值 $\widetilde{\beta}_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant m)$，使得

$$|\widetilde{\beta}_i(\lambda)-\rho_i(\lambda)| = o(|\lambda-\lambda_0|), \tag{4.2.48}$$

这里 $\rho_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant m)$ 为 (4.2.46) 的特征值.

线性算子 (4.2.47) 的特征方程可分解为

$$(\lambda-\lambda_0)(id-Dg^k)x + D_y g\cdot y + o(|\lambda-\lambda_0|)x = \widetilde{\beta}x, \tag{4.2.49}$$

$$(\mathcal{L}_\lambda + D_y f)y + D_x f\cdot x = \widetilde{\beta}y, \tag{4.2.50}$$

这里 g,f 如 (4.2.40) 和 (4.2.41). 因为 $\widetilde{\beta}(\lambda)\to 0$，当 $\lambda\to\lambda_0$，从 (4.2.50) 推出

$$y = -(\mathcal{L}_\lambda + D_y f - \widetilde{\beta})^{-1} D_x f(u_\lambda)x.$$

将 y 代入 (4.2.49) 得

$$\begin{cases} (\lambda-\lambda_0)(id-Dg^k(x_0))x + h_\lambda\cdot x = \widetilde{\beta}x, \\ h_\lambda x = -D_y g(u_\lambda)(\mathcal{L}_\lambda + D_y f - \widetilde{\beta})^{-1} D_x f(u_\lambda)x. \end{cases} \tag{4.2.51}$$

容易看到

$$\begin{aligned} \|D_y g(u_\lambda)\| &= \|D_y g(x_\lambda)\| + o(\|x_\lambda\|^{k-1}) \\ &\sim |\lambda-\lambda_0| + o(|\lambda-\lambda_0|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D_x f(u_\lambda)\| &= \|D_x f(x_\lambda)\| + o(\|x_\lambda\|^{k-1}) \\ &\sim |\lambda-\lambda_0| + o(|\lambda-\lambda_0|). \end{aligned}$$

故有

$$\|h_\lambda\| \sim |\lambda-\lambda_0|^2 + o(|\lambda-\lambda_0|^2). \tag{4.2.52}$$

这样，从 (4.2.51) 和 (4.2.52) 可以推出 (4.2.48). 定理证毕.

注 4.5 在 (4.2.43) 和 (4.2.44) 条件下，如果二阶近似约化方程 (4.2.31) 从 $\lambda=\lambda_0$ 的分歧解 x_λ 是非退化并且有 Morse 指数 k, 那么原方程 (4.2.21) 的分歧解 u_λ 有 Morse 指数 $n+k$. 即定理 4.9 对二阶近似约化方程也是成立的. 这是因为方程 (4.2.31) 与 (4.2.37) 在中心流形上的约化稳态方程相差一个关于 $|\lambda-\lambda_0|$ 的高阶小量.

§4.3　经典的分岐理论

§4.3.1　从奇重特征值处的分岐定理

继续考虑方程 (4.2.21) 的分岐问题. 当 (4.2.22) 和 (4.2.23) 中的 m 是一个奇数时，下面著名的 Krasnoselskii 定理表明，方程 (4.2.21) 在 $\lambda=\lambda_0$ 处发生分岐.

定理 4.10(Krasnoselskii 定理)　在 (4.2.22) 和 (4.2.23) 条件下，如果 m 为奇数，$G: X_1\times R^1\to X$ 连续且满足

$$G(u,\lambda)=o(\|u\|_{X_1}),\quad \forall\lambda\in R^1,$$

那么 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 是方程 (4.2.21) 的一个分岐点.

证明　由 Lyapunov-Schmidt 过程的规范化，方程 (4.2.21) 的约化方程为 (4.2.28)，那么线性算子 $\mathcal{L}_\lambda$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 领域有特征值 $\beta_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant m)$ 满足 (4.2.22). 而非线性算子

$$G_1(x,\lambda)=P_1G(x+\Phi(x,\lambda),\lambda),$$

满足条件

$$G_1(x,\lambda)=o(\|x\|),\quad \forall\lambda\in R^1.$$

因而由指标定理 (定理 2.13)，从 (4.2.22) 推出

$$\operatorname{ind}(\mathcal{L}_\lambda-G_1,0)=\operatorname{ind}(\mathcal{L}_\lambda,0)=\begin{cases}1, & \lambda<\lambda_0,\\ -1, & \lambda>\lambda_0.\end{cases}$$

由拓扑度理论，这意味着 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 是方程 (4.2.28) 的分岐点，因而 $(u,\lambda)=(0,\lambda)$ 是原方程 (4.2.21) 的分岐点. 定理证毕.

注 4.6　传统的 Krasnoselskii 定理是直接由拓扑度理论来证明的，因而总是假设映射 $G: X_1\to X$ 是紧算子. 然而这里采用规范 Lyapunov-Schmidt 约化，只需假设 G 是连续的即可. 这一点在微分方程的应用中产生很大的差别.

当在 (4.2.22) 和 (4.2.23) 中的 $m=1$ 时，即 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 处是一个单特征值时，方程 (4.2.21) 在 $\lambda=\lambda_0$ 处的分岐解有更精细的性质. 这就是下面的 Crandall-Rabinowitz 定理.

定理 4.11　在定理 4.10 条件下，若 $m=1$，并且 G 在 $u=0$ 处解析，则 (4.2.21) 在 $(0,\lambda_0)$ 处分岐出严格两个分支解，表达为

$$\Gamma:(u_\lambda,\lambda),u_\lambda=te+tv(t),\quad \lambda=\lambda_0+\mu(t),$$

其中 e 是 L_λ 在 λ_0 处的特征向量，$v(t)\in X_1,\mu(t)\in R^1$ 连续地依赖于 t，并且满足

$$\lim_{t\to0}\mu(t)=0,\quad \lim_{t\to0}\|v(t)\|_{X_1}=0.$$

证明 当 $m=1$ 时，(4.2.21) 的约化方程 (4.2.28) 写为

$$\beta(\lambda)t + g(t,\lambda) = 0, \tag{4.3.1}$$

其中 $\beta(\lambda)=\beta_1(\lambda)$ 满足

$$\beta(\lambda)\begin{cases} <0, & \lambda<\lambda_0, \\ =0, & \lambda=\lambda_0, \\ >0, & \lambda>\lambda_0. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

函数 $g(t,\lambda)$ 为

$$g(t,\lambda) = \langle G(te+\Phi(te,\lambda),\lambda), e^*\rangle,$$

这里 e^* 为共轭算子 L_λ^* 在 $\lambda=\lambda_0$ 的特征向量，Φ 为 (4.2.26) 的解，由 (4.2.27) 给出.

当 $g(t,\lambda)\equiv 0$ 时，对任何 $t>0$,

$$\Gamma_1 : u_\lambda = te + \Phi(te,\lambda_0),$$

$$\Gamma_2 : u_\lambda = -te + \Phi(-te,\lambda_0)$$

就是 (4.2.21) 的两个分歧解.

如果 $g(t,\lambda)\not\equiv 0$. 那么 $g(t,\lambda)$ 在 $t=0$ 邻域有如下的 Taylor 展开 (因为 G 在 $u=0$ 解析，$g(t,\lambda)$ 也是解析的)

$$g(t,\lambda) = \alpha_\lambda t^k + o(|t|^k), \quad k>1, \quad \alpha_{\lambda_0}\neq 0.$$

然后方程 (4.3.1) 可写为

$$\alpha_\lambda t^{k-1} + o(|t|^{k-1}) = -\beta(\lambda). \tag{4.3.3}$$

该方程有严格的两个解

$$t_1 = t_1(\lambda), \quad t_2 = t_2(\lambda)$$

满足 $t_i(\lambda)\to 0$ 当 $\lambda\to\lambda_0$, 如图 4.4(a)~(c) 所示. 因而

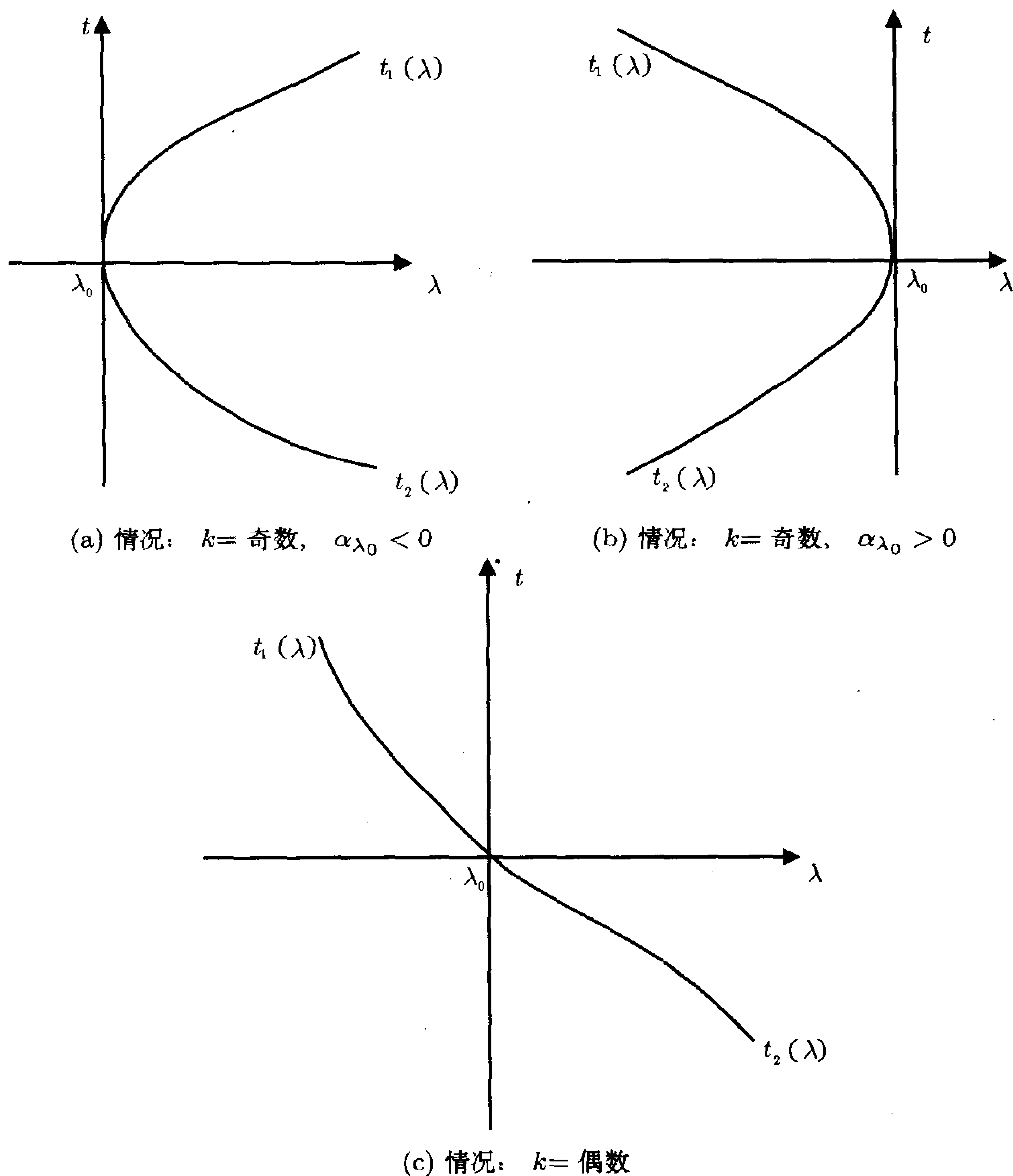
$$\Gamma : u_\lambda = t_i(\lambda)e + \Phi(t_i(\lambda)e,\lambda), \quad i=1,2$$

是方程 (4.2.21) 的两个分歧解. 令 $t=t_i(\lambda)$, 则从 (4.3.2) 和 (4.3.3) 解出

$$\lambda = \lambda_0 + \mu(t), \quad \mu(t)\to 0, \quad 当 t\to 0.$$

而由 $\Phi(x,\lambda) = o,(\|x\|)$ 得

$$\Phi(te,\lambda) = tv(t,\lambda), \quad v(t,\lambda)\to 0, \quad 当 t\to 0.$$



(a) 情况：$k=$ 奇数，$\alpha_{\lambda_0}<0$　　(b) 情况：$k=$ 奇数，$\alpha_{\lambda_0}>0$

(c) 情况：$k=$ 偶数

图 4.4

这样定理得证.

现在应用定理 4.11 来讨论 Euler-Bernoulli 杆的屈曲问题. 建立空间

$$X_1=\{u\in H^2(0,l)|u'(0)=u'(l)=0\},$$

$$X=L^2(0,l).$$

定义映射 $L_\lambda=-A+B_\lambda:X_1\to X$ 及 $G_\lambda:X_1\to X$ 为

$$-Au=\frac{d^2u}{dx^2},\quad B_\lambda u=\lambda u,\quad G_\lambda u=\lambda\sin u-\lambda u.$$

则方程 (4.2.4) 化为抽象形式 (4.2.21). 由 Sturm-Liouville 定理，算子 $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 的所有特征值为

$$-\lambda_k+\lambda,\quad k=1,2,\cdots;$$

$$0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_k<\cdots,\quad \lambda_k\to\infty,\quad 当k\to\infty.$$

因而在 $\lambda_0=\lambda_2$ 处条件 (4.2.22) 和 (4.2.23) 被满足. 其第一特征向量为

$$e(x)=\cos\frac{\pi x}{l}.$$

此外 $G_\lambda u=-\frac{1}{6}\lambda u^3+o(\|u\|^3)$ 是解析的, 并且容易验证 $L_\lambda+G_\lambda$ 在 $\lambda_0=\lambda_2$ 处的约化方程 (4.3.3) 中

$$k=3,\quad \alpha_\lambda=-\frac{1}{6}\lambda.$$

因而, 由定理 4.11 及图 4.4(a), 方程 (4.2.4) 在 $\lambda>\lambda_2$ 处分歧出两个解

$$u_1=\sqrt{\frac{6}{\lambda}}(\lambda-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}+o(|\lambda-\lambda_1|^{\frac{1}{2}}),$$

$$u_2=-\sqrt{\frac{6}{\lambda}}(\lambda-\lambda_1)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}+o(|\lambda-\lambda_1|^{\frac{1}{2}}).$$

因为 (4.2.4) 的解 $u=\varphi$ 为杆弯曲角度 (如图 4.2), 因而分歧出的两个解分别代表杆如图 4.5(a) 和 (b) 所示的两种屈曲状态. 这与自然现象是相吻合的.

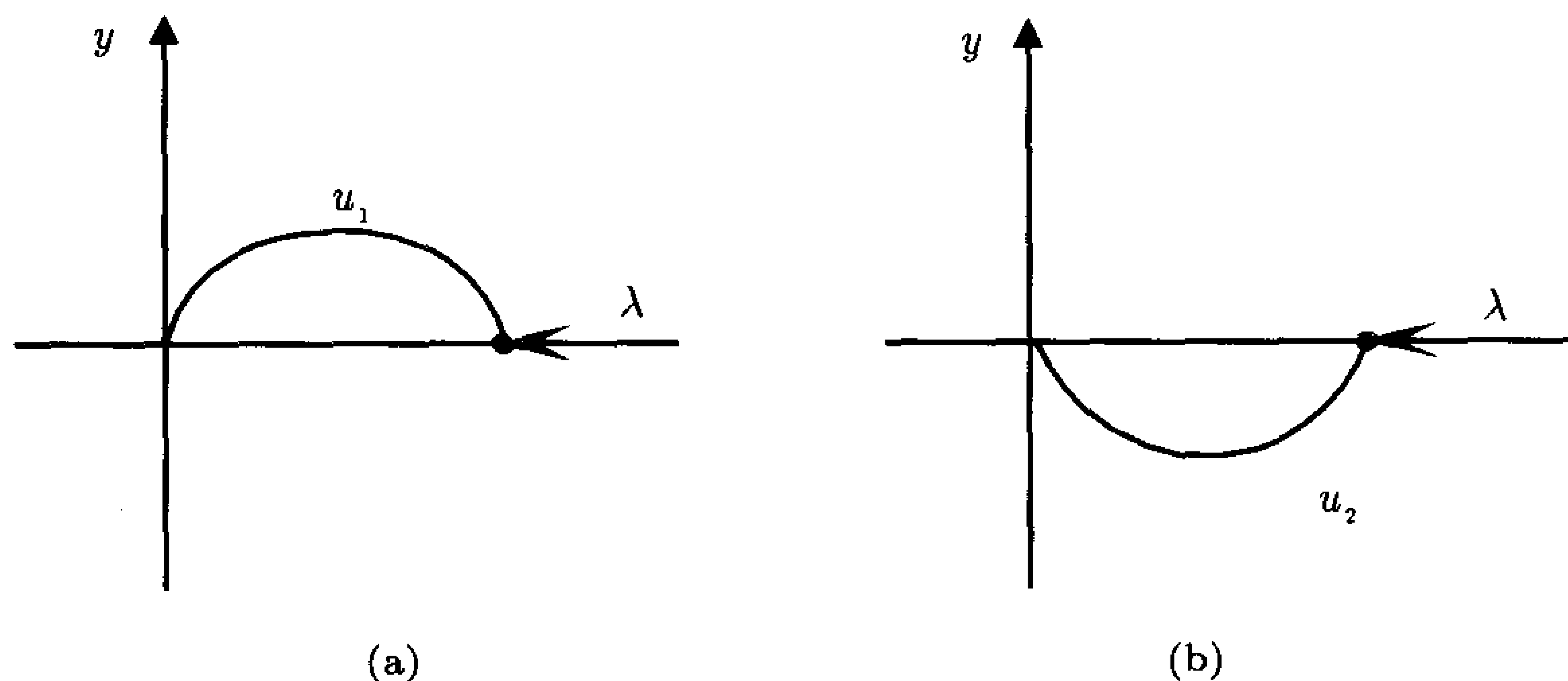


图 4.5 (a) 和 (b) 代表当压力 λ 超过 λ_2 时, 杆的两种可能屈曲状态

§4.3.2 势算子的分歧定理

令 X 是一个 Hilbert 空间, 考虑方程

$$(id-\lambda B)u+G(u,\lambda)=0, \tag{4.3.4}$$

这里 $B:X\to X$ 是一个对称紧算子, $G:X\times R^1\to X$ 是连续的势算子, 即存在一个泛函 $F\in C^1(X\times R^1,R^1)$, 使得

$$D_uF(u,\lambda)=G(u,\lambda),\quad \forall(u,\lambda)\in X\times R^1, \tag{4.3.5}$$

并且 $G(u,\lambda)$ 满足

$$G(u,\lambda)=o(\|u\|_X),\quad \forall\lambda\in R^1. \tag{4.3.6}$$

下面是关于势算子的 Krasnoselskii 分歧定理.

定理 4.12　在 (4.3.5) 和 (4.3.6) 条件下，如果 $\lambda_0 \in R^1$ 是对称紧算子 B 的一个特征值，那么方程 (4.3.4) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 处分歧出至少两个分支解.

证明　为了简单并且能够突出该定理的实质，对下面特殊情况进行证明.

令 $F(u,\lambda)$ 有下面 Taylor 展开

$$F(u,\lambda)=F_k(u,\lambda)+o(\|u\|^k),\quad k\geqslant 3,$$

其中 $F_k(u,\lambda)$ 关于 u 是 k 重线性函数，满足

$$F_k(\alpha u,\lambda)=\alpha^k F_k(u,\lambda).$$

假设 λ_0 是 B 的一个重数为 $m\geqslant 1$ 的特征值，$\{e_1,\cdots,e_m\}\subset X$ 为对应的 m 个特征向量，它们互为正交，即

$$\begin{cases} Be_j=\lambda_0 e_j, & 1\leqslant j\leqslant m,\\ \langle e_j,e_i\rangle=\delta_{ij}. \end{cases}$$

这样，(4.3.4) 的约化方程为如下形式

$$(1-\lambda\lambda_0^{-1})x+\nabla F_k(x,\lambda)+o(\|x\|^k)=0, \tag{4.3.7}$$

这里 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in R^m$,

$$\nabla F_k=\left(\left\langle Df_k\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i\right),e_1\right\rangle,\cdots,\left\langle DF_k\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i\right),e_m\right\rangle\right).$$

只讨论这种情况，即 $x=0$ 是 $\nabla F_k(x,\lambda)$ 的孤立奇点，并且 F_k 在单位球面 $|x|^2=1$ 上极值点孤立. 首先考虑方程

$$(1-\lambda\lambda_0^{-1})x+\nabla F_k(x,\lambda)=0. \tag{4.3.8}$$

容易看出下面函数的临界点 $x_\lambda(\neq 0)$

$$\frac{1}{2}(1-\lambda\lambda_0^{-1})|x|^2+F_k\left(\sum_{i=1}^m x_ie_i,\lambda\right) \tag{4.3.9}$$

是方程 (4.3.8) 的分歧解.

我们来看如何寻找 (4.3.9) 的临界点. 因为 $F_k(x,\lambda)$ 为 x 的 k 齐次函数，因而如果 $x_0\in R^m,|x_0|=1$, 是 F_k 在单位球面 $S_1=\{x\in R^m|1\times 1=1\}$ 上的极值点，那么对任何 $r>0$, rx_0 就是 F_k 在球面 S_r 上的极值点. 注意到函数 (4.3.9)

中 $|x|^2$ 在球面上为常数，因此 $rx_0 \in S_r$ 也是函数 (4.3.9) 在 S_r 上的极值点. 将 rx_0 代入到 (4.3.9) 中可以得到

$$\frac{1}{2}(1-\lambda\lambda_0^{-1})r^2 + F_k(x_0,\lambda)r^k. \tag{4.3.10}$$

如果能找到 $r_0 > 0$ 为 (4.3.10) 的极值点，那么 r_0x_0 一定是函数 (4.3.9) 的临界点.

下面按照这一思路来求出 (4.3.9) 的临界点，令 $x_0 \in S_1$ 满足

$$F_k(x_0,\lambda) = \sup_{|x|=1} F_k(x,\lambda). \tag{4.3.11}$$

因为 $x=0$ 是 $\nabla F_k(x,\lambda)=0$ 的孤立奇点，可以推出

$$F_k(x_0,\lambda) \neq 0. \tag{4.3.12}$$

否则 $F_k(rx_0,\lambda) = r^kF_k(x_0,\lambda) = 0, \forall r \geqslant 0$. 这推出

$$\langle \nabla F_k(rx_0,\lambda), x_0\rangle = 0, \quad \forall r \geqslant 0. \tag{4.3.13}$$

再由条件极值的 Lagrange 乘子定理，从 (4.3.11) 推出，对任 $r>0$, 存在 $\rho(r)>0$, 使得

$$\nabla F_k(rx_0,\lambda) = \rho x_0.$$

由 (4.3.13) 可知 $\rho(r)=0, \forall r \geqslant 0$. 此与 $x=0$ 为孤立奇点的假设矛盾.

不妨假设 $F_k(x_0,\lambda)>0$, 那么对任何 $\lambda>\lambda_0$, (4.3.10) 有一个唯一的极小值点 $r_0>0$ 满足

$$r_0 = \left[\frac{\lambda\lambda_0^{-1}-1}{kF_k(x_0,\lambda)}\right]^{\frac{1}{k-2}}, \quad \lambda>\lambda_0.$$

这样，推出 $x_\lambda = r_0(\lambda)x_0$ 是 (4.3.9) 的一个鞍点. 由假设， F_k 在 S_r 上极值点孤立，因而 $x_0 \in S_1$ 是 (4.3.11) 的孤立极值点，可推出 x_λ 是 (4.3.8) 的孤立分歧解，并且对每个 $\lambda>\lambda_0$ ，有

$$\text{ind}((1-\lambda\lambda_0^{-1})id + \nabla F_k, x_\lambda) = (-1)^{m-1}. \tag{4.3.14}$$

现在回到 (4.3.7), 由于 x_λ 是 (4.3.8) 的孤立奇点， (4.3.7) 是 (4.3.8) 的一个摄动方程对 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 充分小. 由 Brouwer 度的摄动不变性从 (4.3.14) 可以推出 (4.3.7) 在 x_λ 附近存在一个分歧解 $\widetilde{x}_\lambda$, 详见后面的定理 4.19.

用同样的方式，通过下面求极小值点来得到另外一个分歧解：取 $z_0 \in S_1$, 满足

$$F_k(z_0,\lambda) = \min_{|x|=1} F_k(x,\lambda).$$

定理证毕.

注 4.7 定理 4.12 的传统证明方法要点就是首先应用 Lyapunov-Schmidt 过程将方程 (4.3.4) 约化为下面有限维的分歧方程

$$(1-\lambda\lambda_0^{-1})x+PG(x+\Phi(x,\lambda),\lambda)=0,$$

P 为 X 到 B 在 λ_0 特征空间投影. 然后证明非线性算子 $PG(x+\Phi(x,\lambda),\lambda)$ 仍然具有变分结构, 这一步证明较为繁琐. 最后通过对球面 S_r 上求极值点

$$\max_{|x|=r} PG(x+\Phi(x,\lambda),\lambda),$$

$$\min_{|x|=r} PG(x+\Phi(x,\lambda),\lambda),$$

利用 Lagrange 乘子定理可以得到两个分歧解 $x_\lambda^\pm$.

需要强调指出, 这里使用的方法可以用到非变分算子的情况, 只要它的最低阶的非线性齐次项是一个变分算子即可. 具体可见 §4.4.

当非线性算子 $G=DF$ 是奇映射时, 即

$$G(-u,\lambda)=-G(u,\lambda),\quad \forall u\in X,\quad \lambda\in R^1.$$

下面定理由 D.C.Clark 证得.

定理 4.13 在定理 4.12 的假设下, 如果 $G:X\to X$ 是一个奇映射, 那么方程 (4.3.4) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 处分歧出至少有 m 对不同的分支解.

证明 这个定理证明的基本思想与定理 4.12 相似. 主要区别在于对任何整数 $1\leqslant r\leqslant m$, 求出 F_k 的极大极小值点 x_r 如下

$$F_k(x_r,\lambda)=\min_{R^r\subset R^m}\ \max_{x\in R^r,|x|=1}F_k(x,\lambda).$$

因为 $F_k(x,\lambda)$ 关于 x 是偶函数, 这个极大极小值点 x_r 对每个 $1\leqslant r\leqslant m$ 能够被获得. 这样就得到 m 对不同的约化方程分歧解 $x_r(\lambda)=\pm\alpha_r(\lambda)x_r$, 从而证得该定理. 证毕.

§4.3.3 Rabinowitz 全局分歧定理

这一节介绍 Rabinowitz 的全局分歧定理, 该定理从本质上讲就是 Leray-Schauder 拓扑度同伦不变性的一种变形观点.

令 X 是一个 Banach 空间, 考虑下面方程

$$(id-\lambda B)u+G(u,\lambda)=0, \tag{4.3.15}$$

其中 $B:X\to X$ 为线性紧算子, 以及

$$\begin{cases} G(\cdot,\lambda):X\to X\text{为紧映射}, \\ G(u,\lambda)=o(\|u\|_X),\quad \forall\lambda\in R^1. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

记

$$\Gamma = \{(u,\lambda) \in X \times R^1 |\ u \neq 0, (u,\lambda)\text{满足 } (4.3.15)\}.$$

下面给出的是 Rabinowitz 全局分歧定理.

定理 4.14 在 (4.3.16) 条件下，假设 λ_0 是 B 的一个具有奇代数重数 m 的特征值，那么 $\bar{\Gamma}$ 中含有 $(0,\lambda_0)$ 的连通分支 $\Sigma \subset \bar{\Gamma}$ 满足下面两个结论中的一个：

(1) Σ 在 $X_1 \times R^1$ 中是无界的；

(2) Σ 含有奇数个点 $(0,\lambda_i) \neq (0,\lambda_0)$，使得 λ_i 是 B 的具有奇代数重数的特征值.

证明 首先我们简单回忆一下 Leray-Schauder 度同伦不变性质. 显然方程 (4.3.15) 中的算子

$$id - \lambda B + G(\cdot,\lambda) : X \to X$$

关于参变量 $\lambda \in R^1$ 可视为同伦算子，即对任 $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1, id - \lambda_1 B + G(\cdot,\lambda_1)$ 与 $id - \lambda_2 B + G(\cdot,\lambda_2)$ 是同伦的.

对于 $X \times R^1$ 中如图 4.6 所示的连通开集 V

$$V = \{(u_\lambda,\lambda) \in X \times R^1 |\ u_\lambda \in V_\lambda \subset X, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\},$$

其中 V_λ 为 X 中的连通开集，称其为曲形柱体，每个 V_λ 称为 V 在 λ 的截面. 当方程 (4.3.15) 的零点集合 $\mathcal{B} = \Gamma \cup \{(0,\lambda) | \lambda \in R^1\}$ 与 V 的侧边界不相交，即

$$\mathcal{B} \cap \partial V_\lambda \times \{\lambda\} = \varnothing, \quad \forall \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,$$

那么，由 Leray-Schauder 度的基本性质 (定理 2.12) 可推知

$$\deg(id - \lambda_1 B + G, V_{\lambda_1}, 0) = \deg(id - \lambda_2 B + G, V_{\lambda_2}, 0). \tag{4.3.17}$$

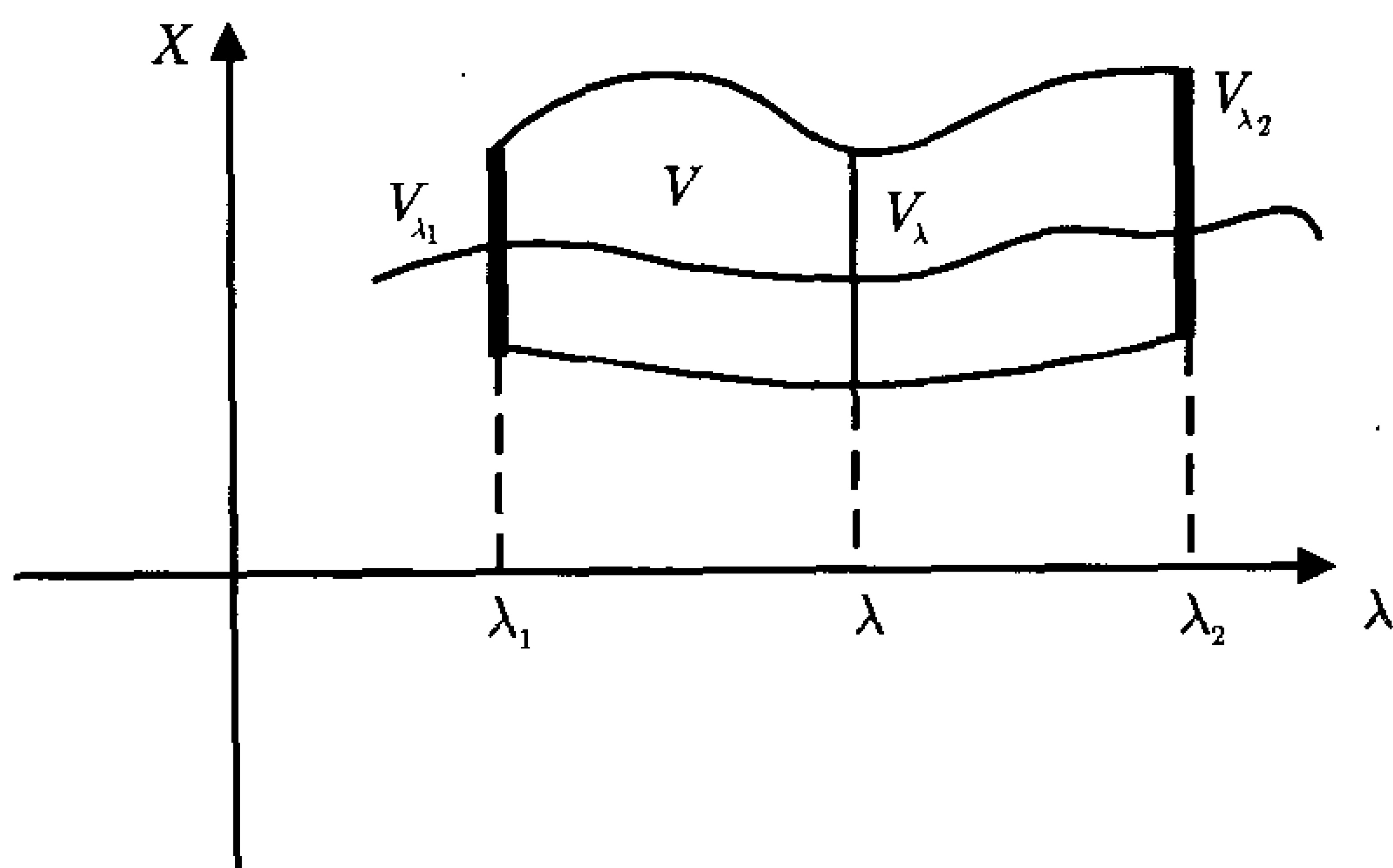
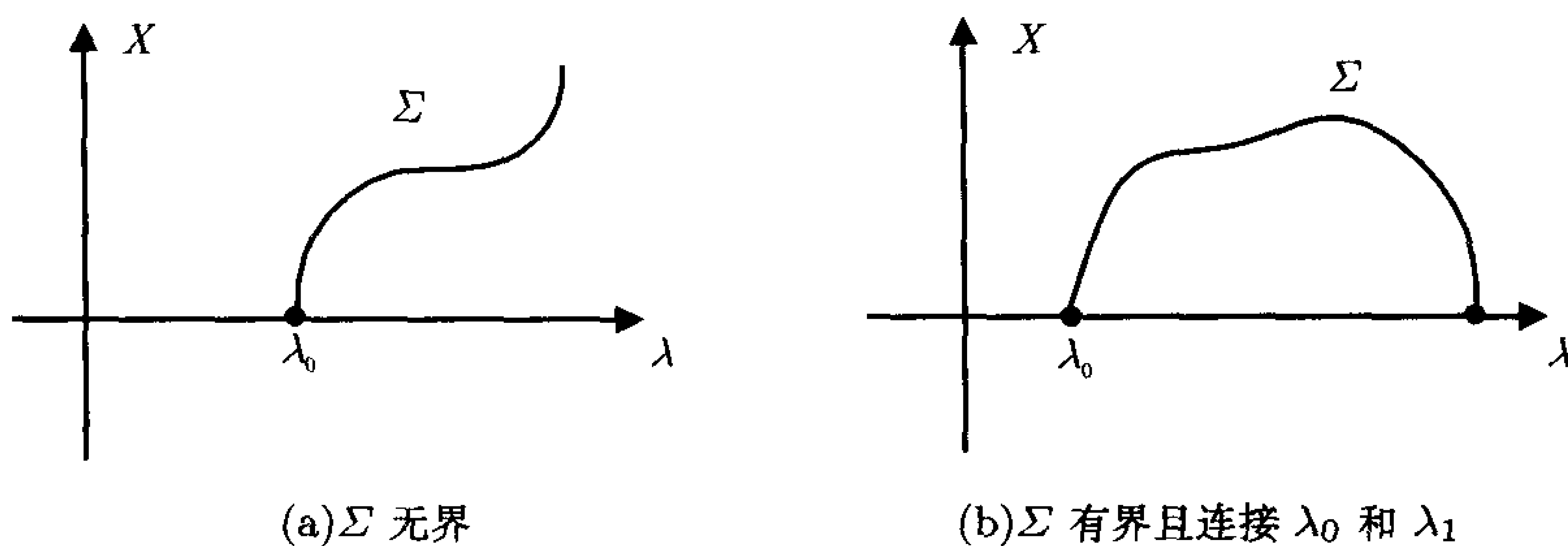


图 4.6 V 是 $X \times R^1$ 中的一个曲形柱体，并且 (4.3.15) 的零点集合与 V 的侧边界不相交

现在回过来证明 Rabinowitz 的全局分歧定理. 直观地讲，该定理的结论 (1) 和 (2) 就是指方程 (4.3.15) 从 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的解连通分支 Σ 一定是如图 4.7(a) 和 (b) 所示的这两种类型之一.



(a)Σ 无界　　(b)Σ 有界且连接 λ_0 和 λ_1

图 4.7

如果定理不真，那么 Σ 一定是有界并且不连接到 $(0,\lambda)$ 上任何一点．我们将应用拓扑度同伦不变性质 (4.3.17) 推出矛盾．

因为 Σ 有界且连通，　$\Sigma\cap\bar{\Gamma}/\Sigma=\varnothing$．则由度量空间闭集可分性知，存在 $X\times R^1$ 中开集 O, 使得

$$\Sigma\subset O,\quad O\cap\Gamma=0 \tag{4.3.18}$$

也就是说 $X\times R^1$ 中的两个开集 O 和 $X\times R^1/\bar{O}$ 将 Σ 和 Γ/Σ 分开．

可以取到 O 为有限个曲形柱体的并集．为方便并且不失本质性，令 O 为两个曲形柱体之积，图 4.8 所示．

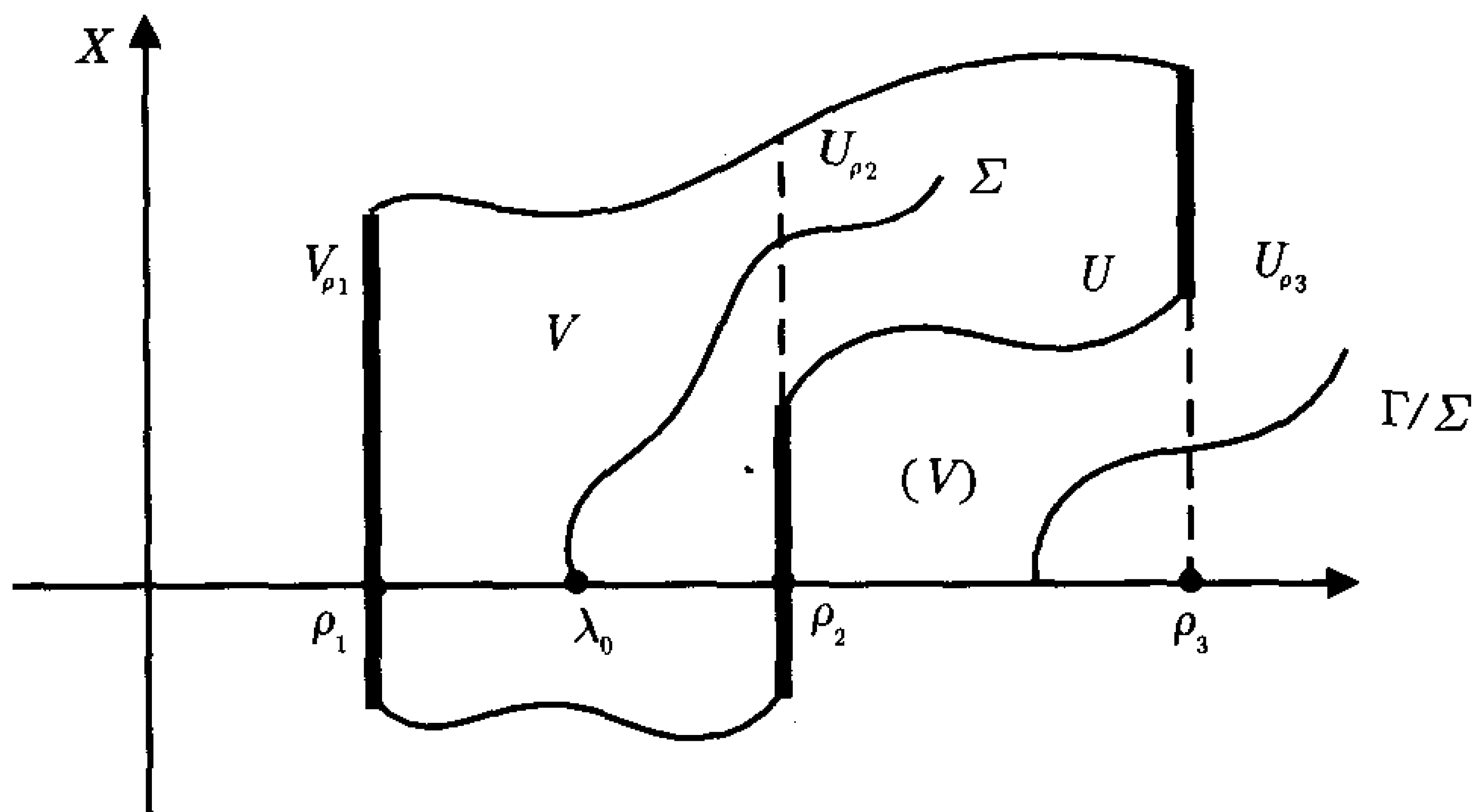


图 4.8　$O=V+U, V_{\rho_2}=\widetilde{V}+U_{\rho_2}$

$$O=V+U,$$
$$V=\{V_\lambda\subset X|\ \ \rho_1\leqslant\lambda\leqslant\rho_2\},$$
$$U=\{U_\lambda\subset X|\ \ \rho_2\leqslant\lambda\leqslant\rho_3\},$$

其中

$$V_{\rho_2}=\widetilde{V}+U_{\rho_2}, \tag{4.3.19}$$

并且 $[\rho_2,\rho_3]$ 中只有一个 B 的特征值 λ_0. 由 (4.3.18) 及指标定理 (定理 2.13), 有 (如图 4.8 所示)

$$\begin{aligned}
&\deg(id-\rho_1B+G,V_{\rho_1},0)=\operatorname{ind}(id-\rho_1B+G,0),\\
&\deg(id-\rho_2B+G,\widetilde{V},0)=\operatorname{ind}(id-\rho_2+G,0),\\
&\operatorname{ind}(id-\rho_1B+G,0)=(-1)^m\operatorname{ind}(id-\rho_2B+G,0),
\end{aligned}$$

这里 m 为 λ_0 的代数重数，是一个奇数. 故有

$$\deg(id-\rho_1B+G,V_{\rho_1},0)=-\deg(id-\rho_2B+G,\widetilde{V},0). \tag{4.3.20}$$

此外，由 (4.3.17) 和 (4.3.18) 可推得

$$\begin{aligned}
&\deg(id-\rho_1B+G,V_{\rho_1},0)\\
=&\deg(id-\rho_2B+G,V_{\rho_2},0)\\
=&\deg(id-\rho_2B+G,\widetilde{V},0)+\deg(id-\rho_2B+G,U_{\rho_2},0)\\
&(\text{由 (4.3.19) 和拓扑度的区域可加性}),\\
&\deg(id-\rho_2B+G,U_{\rho_2},0)\\
=&\deg(id-\rho_3B+G,U_{\rho_3},0)\\
=&\,0\quad(\text{由}U_{\rho_3}\text{中不含方程 (4.3.15) 的零点}).
\end{aligned}$$

因而推出

$$\deg(id-\rho_1B+G,V_{\rho_1},0)=\deg(id-\rho_2B+G,\widetilde{V},0). \tag{4.3.21}$$

在另一方面，由 ρ_1 不是 B 的特征值及 (4.3.16), 有

$$\deg(id-\rho_1B+G,V_{\rho_1},0)=\operatorname{ind}(id-\rho_1B,0)\neq 0.$$

从 (4.3.20) 和 (4.3.21) 导出矛盾. 因而如果结论 (1) 不成立，则 $\sum$ 一定含有点 $(0,\lambda_i)$, 其中 λ_i 是 B 的特征值. 再应用上面的方法可以证明 λ_i 的重数为奇数, 并且 $(0,\lambda_i)$ 的个数为奇数. 定理证毕.

§4.4 从高阶非退化奇点的分歧

令 X_1,X 是 Banach 空间， $X_1\subset X$ 为稠密包含. 在这一节，我们始终考虑下面非线性方程的分歧

$$L_\lambda u+G(u,\lambda)=0, \tag{4.4.1}$$

其中 $L_\lambda = -A + B_\lambda : X_1 \to X$ 为线性全连续场， $G(\cdot,\lambda) : X_1 \to X$ 是 $C^k(k \geqslant 2)$ 连续映射，因而在 $x = 0$ 有 Taylor 展开

$$G(u,\lambda) = G_k(u,\lambda) + o(\|u\|_{X_1}^k), \tag{4.4.2}$$

这里 $G_k : X_1 \times \cdots \times X_1 \to X$ 为 k 重线性算子，以及

$$G_k(u,\lambda) = G_k(u,\cdots,u,\lambda).$$

令 $\{\beta_j(\lambda) \in C | j = 1,2,\cdots\}$ 为 L_λ 的全部特征值 (计入重数). 假设 $\beta_i(\lambda) \in R^1(1 \leqslant i \leqslant m)$, 并且满足

$$\beta_i(\lambda)\begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \tag{4.4.3}$$

$$\beta_j(\lambda_0) \neq 0, \quad \forall j \geqslant m + 1. \tag{4.4.4}$$

§4.4.1　偶数阶非退化奇点

令 $\{e_1,\cdots,e_r\}$ 和 $\{e_1^*,\cdots,e_r^*\}$ 分别为 L_λ 和共轭算子 L_λ^* 在 $\lambda = \lambda_0$ 处的如下特征值

$$L_{\lambda_0} e_j = 0, \quad L_{\lambda_0}^* e_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant r, \tag{4.4.5}$$

这里 $r(\leqslant m)$ 是特征值 $\beta_1(\lambda_0)$ 的几何重数.

记

$$a_{j_1\cdots j_k}^i = \langle G_k(e_{j_1},\cdots,e_{j_k},\lambda_0), e_i^* \rangle,$$

其中 $k \geqslant 2$ 如 (4.4.2) 中给出.

定义 4.6　在 (4.4.2)~(4.4.4) 条件下，方程 (4.4.1) 的解 $u = 0$ 被称为是在 $\lambda = \lambda_0$ 处 k 阶非退化的奇点，如果 $x = (x_1,\cdots,x_r) = 0$ 是下面 r 维代数方程组的孤立零点

$$\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{r} a_{j_1\cdots j_k}^i x_{j_1} \cdots x_{j_k} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{4.4.6}$$

下面给出的是两个从偶数阶非退化奇点分歧的定理. 第一个是关于局部分歧的结果，第二个类似于 Rabinowitz 全局分歧观点给出的定理. 这两个分歧结果一个重要特点是它们都不需考虑特征值重数 m 的奇偶性. 这些定理的证明参见文献 [60,61].

定理 4.15 在条件 (4.4.2)~(4.4.4) 假设下，如果在 (4.4.2) 中的整数 k 是一个偶数，并且 $u=0$ 是方程 (4.4.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 处的一个 k 阶非退化奇点，那么 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 一定是 (4.4.1) 的一个分歧点，并且在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边都至少有一个分歧解的分支.

下面是全局分歧定理. 令

$$\Sigma^+=\{(u,\lambda)\in X_1\times R^1|(u,\lambda)\text{满足}(4.4.1),\quad u\neq 0,\quad \lambda>\lambda_0\},$$

$$\Sigma^-=\{(u,\lambda)\in X_1\times R^1|(u,\lambda)\text{满足}(4.4.1),\quad u\neq 0,\quad \lambda<\lambda_0\}.$$

定理 4.16 在定理 4.15 的假设下，令 $G(\cdot,\lambda):X_1\to X$ 为紧算子，并且 L_λ 为扇形算子，即 $-L_\lambda$ 只有有限个特征值有负实部. 令 $\Sigma\subset\Sigma^-$(或 $\Sigma\subset\Sigma^+$) 是 Σ^-(或 Σ^+) 中含有 $(0,\lambda_0)$ 的连通分支，那么下面结论中的一个成立：

(1) Σ 是无界的；

(2) Σ 含有点 $(0,\lambda_1),\lambda_1<\lambda_0$(或 $\lambda_0<\lambda_1$), 使得 L_λ 有特征值 $\beta(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_1$ 处为零，即 $\beta(\lambda_1)=0$.

(3) 存在一个点 $(u_0,\mu)\in X_1\times R^1, u_0\neq 0,\mu<\lambda_0$(或 $\mu>\lambda_0$) , 使得

$$\Sigma\cap(X_1\times\{\lambda\})=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } \lambda<\mu(\text{或}\lambda>\mu),\\ (u_0,\mu), & \text{当 } \lambda=\mu,\\ \Gamma_1(\lambda)+\Gamma_2(\lambda), & \text{当 } \mu<\lambda\leqslant\lambda_0(\text{或}\lambda_0\leqslant\lambda<\mu),\end{cases}$$

这里 $\Gamma_1(\lambda_0)=(0,\lambda_0),\Gamma_2(\lambda_0)\neq(0,\lambda_0),\Gamma_i(\lambda)\neq\varnothing(i=1,2)$.

注 4.8 定理 4.16 中的结论 (3) 意味着方程 (4.4.1) 从 (u_0,μ) 处发生如图 4.9 所示的分歧，称为鞍结点分歧，即在 $\mu<\lambda$(或 $\lambda<\mu$) 一边从 u_0 点分歧出两个解的分支 $\Gamma_1(\lambda)$ 和 $\Gamma_2(\lambda)$. 许多情况下， $\Gamma_1(\lambda)$ 是由鞍点构成，而 $\Gamma_2(\lambda)$ 是由稳定结点构成，因而称为鞍结点分歧.

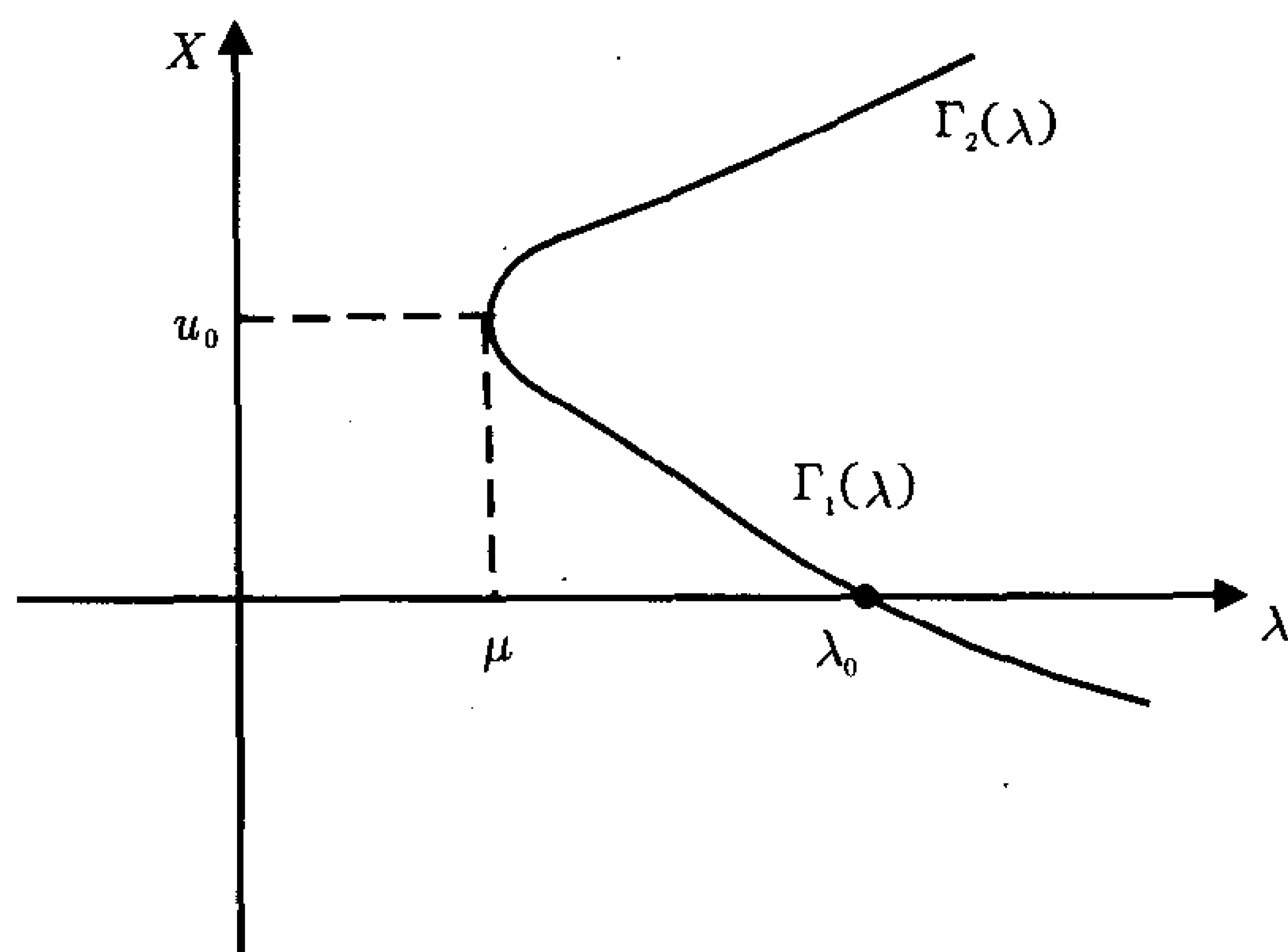


图 4.9 从 (u_0,μ) 处的鞍结点分歧

定理 4.15 的证明　采用 Lyapunov-Schmidt 规范化过程再结合 Brouwer 度来证明该定理.

第一步. 由谱定理, 令 $\{w_1(\lambda),\cdots,w_m(\lambda)\}\subset X_1$ 及 $\{w_1^*(\lambda),\cdots,w_m^*(\lambda)\}\subset X_1^*$ 分别为 L_λ 和共轭算子 L_λ^* 对应于特征值 (4.4.3) 的特征向量, 即

$$(L_\lambda-\beta_i(\lambda))^{n_i}w_i(\lambda)=0,$$
$$(L_\lambda^*-\beta_i(\lambda))^{m_i}w_i(\lambda)=0,$$

对某些 $n_i\geqslant 1, m_i\geqslant 1(1\leqslant i\leqslant m)$, 使得

$$\langle w_i,w_j^*\rangle=\delta_{ij},$$

这里 $X_1^*\subset X^*$ 为 L_λ^* 定义域, X^* 为 X 的对偶空间.

由 Lyapunov-Schmidt 规范约化方程 (4.2.28), 归 (4.4.1) 的分歧到下面方程分歧问题

$$J_\lambda x+F(x,\lambda)=0,\quad x\in R^m, \tag{4.4.7}$$

其中 J_λ 为对应于特征值 $\beta_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant m)$ 的 Jordan 矩阵,

$$F(x,\lambda)=g(x,\lambda)+f(x,\lambda), \tag{4.4.8}$$

$$f(x)=o(|x|^k),\quad k\geqslant 2 \tag{4.4.9}$$

$g(x,\lambda)=(g_1(x,\lambda),\cdots,g_m(x,\lambda))$ 是 (4.2.29) 给出的 k 重线性算子, 更具体地, 它由下式给出

$$g_i(x,\lambda)=\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{n}x_{j_1}\cdots x_{j_k}\langle G_k(w_{j_1},\cdots,w_{j_k},\lambda),w_i^*\rangle.$$

因为 Jordan 矩阵 J_λ 有 $\beta_1(\lambda),\cdots,\beta_m(\lambda)$ 作为其特征值满足 (4.4.3), 因而有下面指标公式

$$\mathrm{ind}(J_\lambda+F(\cdot,\lambda),0)=\begin{cases}(-1)^m, & 当\ \lambda<\lambda_0,\\ 1, & 当\ \lambda>\lambda_0.\end{cases}$$

为了完成定理证明, 只需证明

$$\mathrm{ind}(J_{\lambda_0}+F(\cdot,\lambda_0),0)=偶数. \tag{4.4.10}$$

下面将分三步完成 (4.4.10) 的证明.

第二步. 首先考虑这种情况 $J_{\lambda_0}=0$, 也就是说 $r=m$, 即在 $\lambda=\lambda_0$ 的几何重数等于代数重数.

此时，由假设 $g: R^m \to R^m$ 是非退化的 k 重线性映射，因而存在一个数 $\beta > 0$, 使得

$$|g(\alpha x, \lambda_0)| \geqslant \beta|\alpha|^k, \quad \forall x \in R^m, \quad |x| = 1. \tag{4.4.11}$$

从 (4.4.9) 和 (4.4.11) 可推知，对任 $r > 0$ 充分小，有

$$\begin{aligned} g(rx, \lambda_0) + tf(rx, \lambda_0) &\geqslant \beta r^k + o(r^k) \\ &> 0, \quad \forall |x| = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

由 Brouwer 度的同伦不变性可得

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(J_{\lambda_0} + F(\cdot, \lambda_0), 0) &= \deg(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0}, B_r, 0) \\ &= \deg(g_{\lambda_0}, B_r, 0), \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

这里 $B_r = \{x \in R^m | \ |x| < r\}$.

由定理 2.11, 有

$$\deg(g(\cdot, \lambda_0), B_r, 0) = \text{偶数}, \quad \text{若} k = \text{偶数}. \tag{4.4.13}$$

因此从 (4.4.12) 和 (4.4.13) 可推得 (4.4.10).

第三步. $m = 3, r = 2, k = 2$ 的情况. 为了清楚地表现出证明思想，先考虑这种特殊情况，即特征值 (4.4.3) 在 $\lambda = \lambda_0$ 处的代数重数 $m = 3$, 几何重数 $r = 2$, 以及 $g(x, \lambda)$ 是一个二重线性映射.

令

$$L_{\lambda_0} w_1 = 0,$$

$$L_{\lambda_0} w_2 = 0,$$

$$L_{\lambda_0} w_3 = w_2.$$

由定理 4.4 看到，满足 $\langle w_i, w_j^* \rangle = \delta_{ij}$ 的对偶特征向量 $\{w_1^*, w_2^*, w_3^*\}$ 满足

$$L_{\lambda_0}^* w_1^* = 0,$$

$$L_{\lambda_0}^* w_2^* = w_3^*,$$

$$L_{\lambda_0}^* w_3^* = 0.$$

因而有

$$e_1 = w_1, \quad e_2 = w_2, \quad e_1^* = w_1^*, \quad e_2^* = w_3^*, \tag{4.4.14}$$

并且

$$J_{\lambda_0}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 3. \tag{4.4.15}$$

由 $k=2$ 可知

$$g(x,\lambda) = \left(\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^1 x_i x_j, \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^2 x_i x_j, \sum_{ij}^{3} x_i x_j \right)^{\mathrm{T}}, \tag{4.4.16}$$

其中

$$b_{ij}^l = \langle G_2(w_i, w_j, \lambda_0), w_l^* \rangle.$$

令 $T: R^3 \to R^3$ 是一个线性同胚，由下式给出

$$Tx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

那么从 (4.4.15) 可得

$$T \circ J_{\lambda_0} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

然后，从 (4.4.15),(4.4.16) 和 (4.4.8) 推得

$$T(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0})x = T(J_{\lambda_0} + g_{\lambda_0})x + Tf(x, \lambda_0), \tag{4.4.17}$$

$$T(J_{\lambda_0} + g_{\lambda_0})x = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^1 x_i x_j \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^3 x_i x_j \\ x_3 + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^2 x_i x_j \end{pmatrix}, \tag{4.4.18}$$

$$Tf(x, \lambda_0) = o(|x|^3). \tag{4.4.19}$$

由假设，$(x_1, x_2) = 0$ 是 (4.4.6) 关于 $r = 2, k = 2$ 的一个孤立奇点，这里该方程可写为

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^l x_i x_j = 0, \quad l = 1, 2, \\ &a_{ij}^1 = \langle G_2(e_i, e_j), e_1^* \rangle = b_{ij}^1, \\ &a_{ij}^2 = \langle G_2(e_i, e_j), e_2^* \rangle = b_{ij}^3. \end{aligned}$$

这样，从 (4.4.18) 和 (4.4.19) 可推出，对任何 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x = (x_1, x_2, x_3) = 0$ 是下面方程的一个孤立奇点

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}^1 x_i x_j + t x_3 \sum\limits_{i=1}^{2} (b_{i3}^1 + b_{3i}^1) x_i + t b_{33}^1 x_3^2 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2 x_i x_j + t x_3 \sum\limits_{i=1}^{2} (b_{i3}^3 + b_{3i}^3) x_i + t b_{33}^3 x_3^2 \\ x_3 + t \sum\limits_{i,j=1}^{3} b_{ij}^2 x_i x_j \end{pmatrix} + tTf(x, \lambda_0) = 0. \quad (4.4.20)$$

根据 Brouwer 度同伦不变性，从 (4.4.17)~(4.4.20) 推出

$$\deg(T(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0}), B_r, 0) = \deg(K, B_r, 0), \quad (4.4.21)$$

这里 $r > 0$ 充分小，以及

$$K(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}^1 x_i x_j, \\ \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}^2 x_i x_j, \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

由定理 2.8 和 2.9, 从 (4.4.17)~(4.4.20) 可推得

$$\begin{aligned} \deg(T(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0}), B_r, 0) &= \operatorname{ind}(T, 0) \cdot \deg(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0}, B_r, 0) \\ &= (-1)\deg(J_{\lambda_0} + F_{\lambda_0}, B_r, 0), \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

以及

$$\deg(K, B_r, 0) = \deg(\widetilde{K}, B_r \cap R^2, 0), \quad (4.4.23)$$

其中

$$\widetilde{K}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}^1x_ix_j\\ \sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}^2x_ix_j\end{pmatrix}.$$

由假设 $(x_1,x_2)=0$ 是 $\widetilde{K}$ 的孤立奇点，再由定理 2.11 可得

$$\deg(\widetilde{K},B_r\cap R^2,0)=\text{偶数}. \tag{4.4.24}$$

这样，从 (4.4.21)~(4.4.24) 可得到 (4.4.10).

第四步. 一般情况，令 Jordan 矩阵有下面形式

$$J_{\lambda_0}=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n\end{pmatrix},\quad J_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}.$$

此时空间 R^m 可分解为

$$R^m=R^r\oplus R^{m-r},$$

$$J_{\lambda_0}y=0,\quad \forall(y,0)\in R^m,\quad y\in R^r.$$

令 $P:R^m\to R^r$ 为规范投影，$T:R^m\to R^m$ 由下式给出

$$T=\begin{pmatrix}I & & & 0\\ & T_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_n\end{pmatrix},\quad T_i=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

显然 T 是线性同胚，并且

$$\begin{cases}TJ_{\lambda_0}|_{R^r}=0,\\ TJ_{\lambda_0}|_{R^{m-r}}=I_{m-r}\text{为恒等矩阵},\end{cases} \tag{4.4.25}$$

$$PTg|_{R^r}=\begin{pmatrix}\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{r}a_{j_1\cdots j_k}^1x_{j_1}\cdots x_{j_k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{r}a_{j_1\cdots j_k}^rx_{j_1}\cdots x_{j_k}\end{pmatrix}, \tag{4.4.26}$$

这里 $\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{r} a_{j_1\cdots j_k}^{i} x_{j_1}\cdots x_{j_k} (1\leqslant i\leqslant r)$ 如 (4.4.6).

就像 (4.4.21)~(4.4.24) 的证明一样, 从 (4.4.25) 和 (4.4.26) 可以推得下面等式

$$\begin{aligned}\deg(J_{\lambda_0}+F_{\lambda_0},B_\rho,0) &= (-1)^{m-r}\deg(T(J_{\lambda_0}+F_{\lambda_0}),B_\rho,0)\\ &= (-1)^{m-r}\deg(T(J_{\lambda_0}+g_{\lambda_0}),B_\rho,0)\\ &= (-1)^{m-r}\deg(PTg_{\lambda_0}|_{R^r},B_\rho\cap R^r,0).\end{aligned}$$

因为 $PTg_{\lambda_0}|_{R^r}:R^r\to R^r$ 是偶映射,并且由假设 $y=(y_1,\cdots,y_r)=0$ 是 $PTg_{\lambda_0}|_{R^r}$ 的一个孤立奇点, 因而有

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(PTg|_{R^r},0) &= \deg(PTg|_{R^r},B_\rho\cap R^r,0)\\ &= \text{偶数},\end{aligned}$$

于是 (4.4.10) 被证得. 定理证毕.

定理 4.16 的证明 Leray-Schauder 度理论对全连续场 $L_\lambda+G:X_1\to X$ 也是有效的, 只要 L_λ 的具有正实部特征值是有限的. 令 $L_\lambda:X_1\to X$ 是可逆的, 那么,

$$\mathrm{ind}(-(L_\lambda+G),0)=\deg(-(L_\lambda+G),B_r,0)=(-1)^n, \tag{4.4.27}$$

其中 n 是 L_λ 所有实特征值 $\beta_i(\lambda)<0$ 的代数重数之和.

因为 $L_\lambda+G$ 能够被一个有限维算子 $L_n^\lambda+G_n:X_1\to X_n$ 逼近, 这里 L_n^λ 保留了 L_λ 的满足 (4.4.3) 特征值. 然后应用定理 4.15 的方法可以证明

$$\begin{aligned}&\deg(-(L_{\lambda_0}+G),B_\rho,0)\\ =&\deg(L_n^{\lambda_0}+G_n,B_\rho^n,0)\\ =&(-1)^{n+m-r}\deg(PTg_{\lambda_0}^n,B_\rho^n\cap R^r,0)\\ =&\text{偶数},\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

这里 $B_\rho^n=B_\rho\cap X_n, R^r$ 和 $PTg_{\lambda_0}^n$ 类似于 (4.4.26).

然后定理其余的部分可由类似于 Rabinowitz 全局分歧定理的证明方法从 (4.4.27) 和 (4.4.28) 推出. 定理证毕.

注 4.9 需要强调指出, 在定理 4.15 和 4.16 的证明中, 已经蕴含地对 Leray-Schauder 度证明了下面性质.

令 $L_\lambda+G:X_1\to X$ 是一个全连续场, $G(u,\lambda)=o(\|u\|_{X_1})$. 如果存在 $\{e_1,\cdots,e_m\}\subset X_1$, 使得

$$L_{\lambda_0}^{n_i}e_i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad n_i\geqslant 1,$$

那么有

$$\deg(-(L_{\lambda_0}+G),B_r,0)=(-1)^n\deg(J_{\lambda_0}+g,B_r\cap E,0),$$

这里 n 为 L_{λ_0} 所有负的实特征值 $\beta_j(\lambda_0)<0$ 的代数重数之和, $E=\text{span}\{e_1,\cdots,e_m\}$, J_{λ_0} 为 L_{λ_0} 限制在 E 上的 Jordan 矩阵, $g=PG|_E:E\to E$, $P:X\to E$ 为规范投影. 这个性质的证明在很大程度上依赖于在 §4.1 介绍的谱定理.

§4.4.2 从几何单特征值 (r=1) 的分岐

在这一节, 我们主要关心特征值几何重数为 1, 也就是 $r=1$ 在 (4.4.5) 中的分岐问题.

定理 4.17 假设条件 (4.4.2)~(4.4.4) 成立, 并且在 (4.4.5) 的几何重数 $r=1$. 如果下面的数不为零

$$\alpha=\langle G_k(e_1,\lambda_0),e_1^*\rangle\neq 0,\quad k\geqslant 2, \tag{4.4.29}$$

其中 G_k 由 (4.4.2) 给出, 那么下面结论成立:

(1) 当 (4.4.29) 中 k 是偶数时, 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边都存在 (4.4.1) 的唯一分歧解的分支;

(2) 当 k 为奇数及 m 为偶数时, 若 $\alpha<0$, 则 (4.4.1) 从 $(0,\lambda_0)$ 处没有分岐发生, 若 $\alpha>0$, 则 (4.4.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边都有严格的两个分岐解的分支;

(3) 当 k 为奇数及 m 为奇数时, 若 $\alpha>0$(或者 $\alpha<0$), 则方程 (4.4.1) 在 $\lambda<\lambda_0$(或在 $\lambda>\lambda_0$) 一侧有严格两个分岐分支, 而在 $\lambda>\lambda_0$(或在 $\lambda<\lambda_0$) 一边没有分歧解分支;

(4) 每一个 (4.4.1) 从 $(0,\lambda_0)$ 处的分岐解分支 $\Gamma(\lambda)$ 都是正则的, 并且 $u_\lambda\in\Gamma(\lambda)$ 能够被表达为

$$u_\lambda=\pm|\alpha^{-1}\beta_1(\lambda)\cdots\beta_m(\lambda)|^{\frac{1}{k-1}}e_1+o(|\beta_1(\lambda)\cdots\beta_m(\lambda)|^{\frac{1}{k-1}}). \tag{4.4.30}$$

证明 令 $\{w_1,\cdots,w_m\}\subset X_1$ 及 $\{w_1^*,\cdots,w_m^*\}\subset X_1^*$ 满足下面关系

$$\begin{cases} L_{\lambda_0}w_1=0, & L_{\lambda_0}w_2=w_1, & \cdots, & L_{\lambda_0}w_m=w_{m-1}, \\ L_{\lambda_0}^*w_m^*=0, & L_{\lambda_0}^*w_{m-1}^*=w_m^*, & \cdots, & L_{\lambda_0}^*w_1^*=w_2^*. \end{cases} \tag{4.4.31}$$

由 §4.1.2 的谱定理可知

$$\langle w_i,w_j^*\rangle\begin{cases} =0, & 若 i=j, \\ \neq 0, & 若 i\neq j. \end{cases} \tag{4.4.32}$$

在这种情况下, (4.4.1) 的约化分岐方程 (4.4.7) 可写成如下形式

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\lambda) & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_m(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + F(x,\lambda) = 0. \tag{4.4.33}$$

从 (4.4.31) 可以看出 $e_1 = w_1, e_1^* = w_m^*$. 由 (4.4.8),(4.4.9) 和 (4.4.32), 从 (4.4.33) 可以推出

$$\begin{cases} x_2 = -\beta_1(\lambda)x_1 + O(|x|^k), \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = -\beta_{m-1}(\lambda)x_{m-1} + O(|x|^k), \\ \alpha(\lambda)x_1^k = -\beta_m(\lambda)x_m + O\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=2}^{m}|x_1|^i|x_j|^{k-i}\right), \end{cases} \tag{4.4.34}$$

这里 $\alpha(\lambda_0) = \alpha$. 从 (4.4.34) 可导出，在 $\lambda = \lambda_0$ 邻域有

$$\alpha(\lambda)x_1^{k-1} = (-1)^m\beta_1(\lambda)\cdots\beta_m(\lambda) + o(|\beta_1\cdots\beta_m|). \tag{4.4.35}$$

这样，定理中结论 (1)~(3) 和 (4.4.30) 可以从 (4.4.3),(4.4.29) 和 (4.4.35) 导出，结论 (4) 能够从下面 (4.4.33) 的一阶近似方程的 Jacobi 矩阵行列式以及定理 4.9 推出：

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} \beta_1(\lambda) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2(\lambda) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha k x_1^{k-1} & 0 & 0 & \cdots & \beta_m(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \beta_1(\lambda)\cdots\beta_m(\lambda) - (-1)^m\alpha k x_1^{k-1} \\ &= (1-k)\beta_1\cdots\beta_m + o(|\beta_1\cdots\beta_m|) \quad (\text{由}(4.4.35)) \\ &\neq 0, \quad \text{对}\lambda \neq \lambda_0 \quad (\text{由}(4.4.3)). \end{aligned}$$

定理得证.

§4.4.3 关于 $r = k = 2$ 的分歧

令特征值 (4.4.3) 的几何重数为 2, 即在 (4.4.5) 中 $r = 2$, 并且 G_k 是双线性算子，也就是说 $k = 2$. 记

$$a_{11} = \langle G_2(e_1, e_1, \lambda), e_1^* \rangle,$$

$$a_{22} = \langle G_2(e_2, e_2, \lambda), e_1^* \rangle,$$
$$a_{12} = \langle G_2(e_1, e_2, \lambda) + G_2(e_2, e_1, \lambda), e_1^* \rangle,$$
$$b_{11} = \langle G_2(e_1, e_1, \lambda), e_2^* \rangle,$$
$$b_{22} = \langle G_2(e_2, e_2, \lambda), e_2^* \rangle,$$
$$b_{12} = \langle G_2(e_1, e_2, \lambda) + G_2(e_2, e_1, \lambda), e_2^* \rangle.$$

定理 4.18 假设条件 (4.4.2)~(4.4.4) 成立，并且在 (4.4.5) 和 (4.4.2) 中，$r=2, k=2$. 如果 $u=0$ 是方程 (4.4.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的二阶非退化奇点，并且两个向量 (a_{11}, a_{12}, a_{22}) 和 (b_{11}, b_{12}, b_{22}) 是线性独立的，那么下面结论成立：

(1) 方程 (4.4.1) 从 $(0, \lambda_0)$ 处在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一侧最多有三个分歧解分支；

(2) 如果在 $\lambda>\lambda_0$ 或 $\lambda<\lambda_0$ 一侧的分歧解分支都是正则的，那么在那一侧的分歧解分支数只能是 1 或者 3;

(3) 如果在 $\lambda=\lambda_0$ 的任一侧分歧解的分支数为 3, 那么这三个分支解都是正则的；

(4) 如果在 $\lambda=\lambda_0$ 某一侧分支解数为 2, 那么其中一个分支解是正则的.

证明 证明分为四步进行.

第一步. 只需证明这种情况，即代数重数等于几何重数： $m=r=0$. 对于 $m>r=2$ 的情况，就如定理 4.17 的证明那样，可将这个 m 维分歧方程 (4.4.7) 进一步约化为一个 $r=2$ 维的分歧方程，该约化方程本质上与下面所讨论的 $m=r=2$ 的约化方程没有区别. 从而下面方法可有效地应用到 $m>r$ 的情况.

当 $m=r=2$ 时，约化的分歧方程 (4.4.7) 能够被具体的写成如下形式

$$\begin{cases} \beta_1(\lambda)x_1 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + o(|x|^2) = 0, \\ \beta_2(\lambda)x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + o(|x|^2) = 0, \end{cases} \tag{4.4.36}$$

其中 $x=(x_1, x_2)$.

第二步. 要证明存在一个 $\varepsilon>0$, 使得对任何 C^∞ 函数 $f=(f_1, f_2), \|f\|_{C^r}$ 对任 $r\geqslant 1$ 在 $x=0$ 领域充分小，下面方程组

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + f_1(x) + o(|x|^2) = 0, \tag{4.4.37}$$

$$b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + f_2(x) + o(|x|^2) = 0 \tag{4.4.38}$$

在 $|x|<\varepsilon$ 内最多有四个解.

因为 (4.4.37) 和 (4.4.38) 的二次项是二阶非退化的，因而在这四个系数 a_{11}, a_{22}, b_{11} 和 b_{22} 中至少有一个不为零. 不失一般性，假设 $a_{22}\neq 0$. 然后从

(4.4.37) 得到

$$x_2^{\pm} = -\frac{a_{12}}{2a_{22}}x_1 \pm \frac{1}{2a_{22}}\sqrt{(a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22})x_1^2 - 4a_{22}f_1 + o(|x|^2)}.$$

从上式可解出

$$x_2^{\pm} = -\frac{a_{12}}{2a_{22}}x_1 \pm \frac{1}{2a_{22}}\Delta, \tag{4.4.39}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{(a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22})x_1^2 + g(x_1) + o(|x_1|^2)},$$

$$g(x_1) \to 0, \quad 当 f_1(x) \to 0.$$

将 (4.4.39) 代入 (4.4.38) 中可得

$$\alpha x_1^2 + b_{22}g(x_1) + 4a_{22}^2 f_2(x) + o(|x|^2) = \mp\beta x_1\Delta, \tag{4.4.40}$$

其中

$$\alpha = 4a_{22}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22}) + 2a_{12}(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}),$$

$$\beta = 2(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22}).$$

然后从 (4.4.39) 和 (4.4.40) 推出

$$\rho x_1^4 + h_1(x_1)x_1^2 + h_2(x_1) + o(|x_1|^4) = 0, \tag{4.4.41}$$

其中

$$\rho = \alpha^2 - \beta^2(a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}),$$

$$h_1(x_1), h_2(x_1) \to 0, \quad 若 f_1(x), f_2(x) \to 0.$$

不难验证，条件 $\rho \neq 0$ 是等价于下面条件

$$\begin{cases} b_{22}z_{\pm}^2 + b_{12}z_{\pm} + b_{11} \neq 0, \\ z_{\pm} = \dfrac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{22}}. \end{cases} \tag{4.4.42}$$

由定理假设,两个向量 (a_{22}, a_{12}, a_{11}) 与 (b_{22}, b_{12}, b_{11}) 是线性无关,并且 $(x_1, x_2) = 0$ 是 (4.4.36) 中二次项的孤立奇点，因而 (4.4.42) 成立. 于是 $\rho \neq 0$, 从而可推出方程 (4.4.41) 最多有四个解，这是因为若 (4.4.41) 在 $x_1 = 0$ 邻域解的个数大于 4, 则由中值定理，对于函数 $h(x_1) = \rho x_1^4 + h_1(x_1)x_1^2 + h_2(x_1) + o(|x_1|^4)$, 下面方程在 $x_1 = 0$ 邻域至少有一个解

$$\frac{d^4 h(x_1)}{dx_1^4} = \rho + g(x_1) = 0,$$

$$\|g(x_1)\|_{C^r}\text{充分小在}x_1=0\text{的邻域}.$$

这是一个矛盾，因为上面方程在 $x_1=0$ 充分小的邻域内无解．因而 (4.4.41) 最多有四个实数解 x_1 满足 $x_1\to 0$, 当 $f=(f_1,f_2)\to 0$.

另一方面，(4.4.37) 和 (4.4.38) 的每个实数解都对应着 (4.4.40) 和 (4.4.39) 中的 $\pm$ 号中的一个．因此，方程 (4.4.37) 和 (4.4.38) 在 $x=0$ 附近最多有四个实数解，即方程 (4.4.36) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边最多有三个分歧解的分支．结论 (1) 得证.

第三步．结论 (2) 的证明．令 $F_\lambda: R^2\to R^2$ 定义为

$$F_\lambda(x)=\begin{pmatrix}\beta_1(\lambda)x_1+a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+o(|x|^2)\\ \beta_2(\lambda)x_2+b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2+o(|x|^2)\end{pmatrix}.$$

由定理 4.8, 方程 (4.4.36) 从 $(0,\lambda_0)$ 的一个分歧解 z_λ 正则性等价于原方程 (4.4.1) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 的对应分歧解的正则性．因此由假设， z_λ 是正则的，因而有

$$\operatorname{ind}(F_\lambda,z_\lambda)=\pm1 \tag{4.4.43}$$

对任何 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 充分小．此外，如果 $\lambda\neq\lambda_0$,

$$\operatorname{ind}(F_\lambda,0)=\operatorname{sign}\beta_1(\lambda)\beta_2(\lambda)=1, \tag{4.4.44}$$

以及由 (4.4.10) 有

$$\sum_{|z_i|<\varepsilon}\operatorname{ind}(F_\lambda,z_i)=\deg(F_{\lambda_0},B_\varepsilon,0)=\text{偶数}, \tag{4.4.45}$$

对某个 $\varepsilon>0$ 很小和任何 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 充分小.

这样，结论 (2) 可从结论 (1) 及 (4.4.43)~(4.4.45) 推出.

第四步．结论 (3)~(4) 的证明．从第二步知道 (4.4.37) 和 (4.4.38) 在 $x=0$ 附近的解是一一的对应于方程 (4.4.41) 的解．令 $x_0\in R^1$ 是 (4.4.41) 在 $x=0$ 附近的解，那么 (4.4.41) 能够被表达为

$$(x-x_0)^k g(x)=0,\quad k\geqslant 1. \tag{4.4.46}$$

我们将证明 (4.4.37) 和 (4.4.38) 的一个对应于 x_0 的解 z_0 是非退化的充要条件为 $k=1$ 在 (4.4.46) 中.

显然，如果在 (4.4.46) 中 $k\geqslant 2$, 那么在一个小摄动下在 z_0 附近将有 (4.4.37) 和 (4.4.38) 的更多解出现，这说明 z_0 是退化的．下面将证明，如果 z_0 退化，那么 $k\geqslant 2$.

现在假设 z_0 是退化的，即

$$\det DF(z_0) = 0, \tag{4.4.47}$$

这里 F 为

$$F(x) = \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + f_1(x) + o(|x|^2), \\ b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 + f_2(x) + o(|x|^2). \end{cases}$$

在一个适当的坐标系中，$DF(z_0)$ 一定是下面三种形式之一.

$$DF(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.48}$$

$$DF(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.49}$$

$$DF(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4.50}$$

对某个 $\alpha \neq 0$.

因为 f_1 和 f_2 为 C^∞ 充分小的函数，并且 F 的二次型是二阶非退化的，对 (4.4.48) 和 (4.4.49) 这两种情况我们知道，在一个线性摄动下，方程 (4.4.37) 和 (4.4.38) 在 z_0 附近将产生出不止一个解. 这就意味着在 (4.4.46) 中，$k \geqslant 2$.

只需对 (4.4.50) 情况进行证明. 在 z_0 附近函数 F 能够被表达为如下形式

$$\widetilde{F}(y) = \begin{cases} \alpha y_2 c_{11}y_1^2 + c_{12}y_1y_2 + c_{22}y_2^2 + o(|y|^2), \\ d_{11}y_1^2 + d_{12}y_1y_2 + d_{22}y_2^2 + o(|y|^2), \end{cases} \tag{4.4.51}$$

其中 $y = x - z_0$.

(4.4.51) 的零点 $y = 0$ 代表了 F 的零点 z_0. 现在考虑下面的摄动方程

$$\alpha y_2 = -(c_{11}y_1^2 + c_{12}y_1y_2 + c_{22}y_2^2) + o(|y|^2), \tag{4.4.52}$$

$$\varepsilon y_1 = -(d_{11}y_1^2 + d_{12}y_1y_2 + d_{22}y_2^2) + o(|y|^2), \tag{4.4.53}$$

这里 $\varepsilon \neq 0$ 充分小. 由隐函数定理，从 (4.4.52) 可得到一个解 $y_2 = h(y_1)$, 代入 (4.4.53) 可得到如下方程

$$\varepsilon y_1 = -(d_{11}y_1^2 + d_{12}y_1h(y_1) + d_{22}h^2(y)) + o(|y_1|^2). \tag{4.4.54}$$

由于 F 是二阶非退化的，存在 $a \neq 0$ 和 $m \geq 2$, 使得 (4.4.54) 变为如下形式

$$\varepsilon y_1 = a y_1^m + o(|y_1|^m). \tag{4.4.55}$$

从 (4.4.55) 可推出方程 (4.4.52) 和 (4.4.53) 有两个解

$$(y_1, y_2) = (0, 0)$$

及

$$(y_1, y_2) = (\widetilde{y}_1, h(\widetilde{y}_1)),$$

其中

$$\widetilde{y} = (\varepsilon/a)^{\frac{1}{m-1}} + o(|\varepsilon|^{\frac{1}{m-1}}),$$

这里取 ε 使得 $\varepsilon a > 0$, 并且 $(\widetilde{y}_1, h(\widetilde{y}_1)) \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$. 这就意味着当 z_0 是 (4.4.37) 和 (4.4.38) 的退化奇点时，其对应解 x_0 在 (4.4.46) 中指数 $k \geqslant 2$.

现在来证明结论 (3)~(4). 如果 (4.4.36) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的某一侧有三个分歧解 (或两个分歧解), 那么 (4.4.41) 在对应解 $x_0 \neq 0 (i = 1, 2, 3)$(或 $x_j \neq 0, j = 1, 2$) 处可表达为

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) x g_1(x) = 0,$$

$$\text{或} (x - x_1)(x - x_2)^2 x g_1(x) = 0,$$

其中 $g_1(x)$ 在 $x = 0$ 附近没有零点. 这样，指数 $k = 1$ 的奇点都是非退化的. 因而结论 (3)~(2) 成立. 定理证毕.

§4.4.4　约化方程的一阶近似为势算子

考虑这种情况，即方程 (4.4.1) 规范约化的一阶近似是一个梯度算子.

假设 L_λ 在 (4.4.3) 的特征值满足

$$\beta_1(\lambda) = \cdots = \beta_m(\lambda) = \beta(\lambda), \quad \text{在} \lambda = \lambda_0 \text{附近}, \tag{4.4.56}$$

并且代数重数等于几何重数 $m = r$.

此时 (4.4.1) 的约化方程 (4.4.7) 有如下形式

$$\beta(\lambda) x_i + g_i(x) + o(|x|^k) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{4.4.57}$$

其中 $g(x) = \{g_1(x), \cdots, g_m(x)\}$ 如 (4.4.8) 给出，它是一个 k 重线性算子. 进一步假设 $g(x)$ 是一个势算子，即存在一个函数 $V(x)$, 使得

$$g_i(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_i}. \tag{4.4.58}$$

由 Krasnoselskii 定理 (定理 4.12),$(x,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 一定是下面方程的一个分歧点

$$\beta(\lambda)x_i + g_i(x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.4.59}$$

然后有下面定理:

定理 4.19 在条件 (4.4.3),(4.4.4) 和 (4.4.56)~(4.4.58) 假设下, 如果 (4.4.59) 从 $(x,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 处有 r 个分歧分支 $\Gamma_i(\lambda)(1 \leqslant i \leqslant r)$ 满足下面条件

$$\mathrm{ind}(\beta(\lambda)id + g, z_\lambda) \neq 0, \quad z_\lambda \in \Gamma_i(\lambda), \tag{4.4.60}$$

那么方程 (4.4.1) 从 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 处至少有 r 个分歧解.

证明 因为 $g(x)$ 是 k 重线性算子, (4.4.59) 的解 $z_\lambda \in \Gamma_i(\lambda)$ 有如下形式

$$z_\lambda = x_0\beta^{\frac{1}{k-1}}(\lambda), \quad x_0 \in R^m, \tag{4.4.61}$$

$|x_0| = 1$ 满足

$$x_0 + g(x_0) = 0. \tag{4.4.62}$$

由假设, $z_\lambda \in \Gamma_i(\lambda)$ 为 (4.4.59) 的孤立零点, 于是 x_0 是 (4.4.62) 的孤立奇点. 因而存在 $\delta > 0$ 和 $\alpha > 0$, 使得

$$|x + g(x)| \geqslant \alpha, \quad \forall x \in \partial B_\delta(x_0),$$

$B_\delta(x_0) = \{x \in R^m||x - x_0| < \delta\}$, 并且 x_0 是 (4.4.62) 在 $B_\delta(x_0)$ 中的唯一奇点. 这样, 推出

$$|\beta(\lambda)x + g(x)| \geqslant \alpha|\beta(\lambda)|^{\frac{k}{k-1}}, \quad \forall x \in \partial B_{\delta_\lambda}(z_\lambda), \tag{4.4.63}$$

$\forall|\lambda - \lambda_0| > 0$, 这里

$$B_{\delta_\lambda}(z_\lambda) = \{x \in R^m| \ |x - z_\lambda| < \delta|\beta(\lambda)|^{\frac{1}{k-1}}\}.$$

从 (4.4.61) 和 (4.4.63) 可推出, 对方程 (4.4.57) 有

$$\beta(\lambda)x + g(x) + tf(x) \neq 0, \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in \partial B_{\delta_\lambda}(z_\lambda)$$

对任何 $|\lambda - \lambda_0| > 0$ 充分小, 这里 $f(x) = o(|x|^k)$. 由 Brouwer 度的同伦不变性, 得到

$$\deg(\beta(\lambda)id + g + f, B_{\delta_\lambda}(z_\lambda), 0) = \mathrm{ind}(\beta(\lambda)id + g, z_\lambda).$$

再从条件 (4.4.60) 可以得到, 方程 (4.4.57) 至少有一个解在 z_λ 附近对所有 $|\lambda - \lambda_0| > 0$ 充分小. 定理证毕.

注 4.10 在定理 4.19 中，并没有假设 $x=0$ 是 $g(x)$ 的孤立零点，即 $u=0$ 可以是 (4.4.1) 的一个 k 阶退化奇点. 另外对 $k\geqslant 2$ 的奇偶性也没有限制. 事实上，只要 g 的函数 $V(x)$ 在单位球面 S_1 上有孤立极大极小值点 x_0，那么 $z_\lambda=x_0\beta^{\frac{1}{k-1}}(\lambda)$ 一定满足方程 (4.4.59) 和公式 (4.4.60).

这样，从定理 4.19 立刻推得下面定理.

定理 4.20 假设条件 (4.4.3),(4.4.4) 和 (4.4.56)~(4.4.58) 成立，那么下面结论成立：

(1) 若由 (4.4.58) 所给的函数 $V(x)$ 在单位球面 S_1 上的极大极小点有 r 个是孤立的，则方程 (4.1.10) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 处至少有 r 个分歧解分支；

(2) 若 $u=0$ 是 (4.4.1) 的一个 k 阶非退化奇点， $k\geqslant 3$ 是一个奇数，并且 (4.4.59) 分歧解的分支是有限，那么方程 (4.4.1) 从 $(0,\lambda_0)$ 处至少有 $2m$ 个分歧解分支，这里 m 如 (4.4.3) 给出.

§4.4.5 在椭圆方程组中的应用

现在我们来看这一节所得到的抽象结果如何应用到偏微分方程中去. 考虑下面椭圆方程组

$$\begin{cases} -\Delta u_1=\lambda_1 u_1+au_2+g_1(u_1,u_2), \\ -\Delta u_2=\lambda u_2+g_2(u_1,u_2), \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{4.4.64}$$

其中 $\Omega\subset R^n(n\geqslant 1)$ 是一有界区域， $a\in R^1$ 为常数， $u=(u_1,u_2),g_1$ 和 g_2 为光滑函数，由下式给出

$$g_1=\sum_{i+j=2}a_{ij}u_1^iu_2^j+o(|u|^2),$$

$$g_2=\sum_{i+j=2}b_{ij}u_1^iu_2^j+o(|u|^2).$$

令 λ_1 和 h_1 是 Laplace 算子的第一特征值及特征向量

$$\begin{cases} -\Delta h_1=\lambda_1 h_1, \\ h_1|_{\partial\Omega}=0, \end{cases}$$

由椭圆算子的特征值理论知，第一特征向量是正函数

$$h_1(x)>0,\quad \forall x\in\Omega.$$

记

$$X=L^p(\Omega,R^2),\quad X_1=W^{2,p}(\Omega,R^2)\cap W_0^{1,p}(\Omega,R^2),$$

其中 $p \geqslant n$. 令 $L_\lambda = -A + B : X_1 \to X$ 和 $G : X_1 \to X$ 定义为

$$-Au = (\Delta u_1, \Delta u_2)^{\mathrm{T}},$$
$$B_\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$
$$Gu = (g_1(u), g_2(u))^{\mathrm{T}}.$$

这样, 方程 (4.4.64) 化为抽象形式 (4.4.1), 并且在 $\lambda_0 = \lambda_1$ 处条件 (4.4.3) 和 (4.4.4) 成立, 这里 $m = 2$.

情况 1. $a = 0, u = 0$ 为二阶非退化奇点.

在这种情况下, $\beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, 即代数重数 m 与几何重数 r 相等 $m = r = 2$. 对应的特征函数为

$$e_1 = e_1^* = (h_1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad e_2 = e_2^* = (0, h_1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $G_2(u)$ 是 G 的二重线性部分

$$G_2(u_1, u_2) = \left(\sum_{i+j=2} a_{ij} u_1^i u_2^j, \sum_{i+j=2} b_{ij} u_1^i u_2^j \right)^{\mathrm{T}},$$

那么对应于 (4.4.8) 的二重线性算子 g 为

$$g(x) = \alpha \left(\sum_{i+j=2} a_{ij} x_1^i x_2^j, \sum_{i+j=2} b_{ij} x_1^i x_2^j \right)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\alpha = \int_\Omega h_1^3 dx > 0$.

由定理 4.15, 如果 $x = (x_1, x_2) = 0$ 是下面方程的一个孤立奇点.

$$\begin{cases} \sum_{i+j=2} a_{ij} x_1^i x_2^j = 0, \\ \sum_{i+j=2} b_{ij} x_1^i x_2^j = 0, \end{cases}$$

那么方程 (4.4.64) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_1)$ 处在 $\lambda = \lambda_1$ 的每一侧都至少分歧出一个解的分支.

情况 2. $a = 0, u = 0$ 为二阶退化奇点.

令 G 中的二重线性项 $G_2(u)$ 为

$$G_2(u) = (u_1^2, 0),$$

则

$$g(x) = (\alpha x_1^2, 0).$$

$x=0$ 是 g 的一个二阶退化奇点．然而 g 是一个势算子

$$g = \nabla F(x), \quad F(x) = \frac{1}{3}\alpha x_1^3.$$

显然 $F(x)$ 在圆周 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 上有一个孤立的极大值点 $x^+ = (1,0)$ 和极小值点 $x^- = (-1,0)$. 因而由定理 4.20, 方程 (4.4.64) 从 $(u,\lambda) = (0,\lambda_1)$ 处分歧出至少两个分支解.

情况 3. $a \neq 0$ 及 $b_{11} \neq 0$.

在这种情况下，有 $\beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda) = \lambda - \lambda_1$, 及

$$\begin{aligned} &e_1 = (h_1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad && e_2 = (0, a^{-1}h_1)^{\mathrm{T}}, \\ &L_{\lambda_0} e_2 = e_1, && (\lambda_0 = \lambda_1), \\ &e_1^* = (0, h_1)^{\mathrm{T}}, && e_2^* = (a^{-1}h_1, 0)^{\mathrm{T}}, \\ &L_{\lambda_0}^* e_1^* = e_2^*, && (\lambda_0 = \lambda_1). \end{aligned}$$

因此 $\lambda_0 = \lambda_1$ 的代数重数 $m=2$, 几何重数为 1. 在这种情况下方程 (4.4.6) 变为

$$b_{11}x_1^2 = 0, \tag{4.4.65}$$

当 $b_{11} \neq 0$ 时，$x_1 = 0$ 是 (4.4.65) 的孤立奇点．在这种情况下，定理 4.15 和定理 4.17 都可有效地应用到方程 (4.4.64). 因而 (4.4.64) 在 $\lambda = \lambda_1$ 的每一边都唯一地有一个分歧解.

注意到, 算子 $G: X_1 \to X$ 是紧的. 因而类似于定理 4.16 这样的全局分歧定理对上述三种情况都是有效的，也就是说定理 4.16 的全局分歧结论 (1)~(3) 中的一个对上述三种情况成立.

最后需要强调的是，上述讨论都是在特征值代数重数 $m=2$ 的条件下，因而经典的分歧理论不再有效.

§4.5　选择性方法

§4.5.1　介绍

令 X 是一个 Banach 空间，$L: X \to X$ 是一个线性紧算子，$h, G: X \to X$ 是连续映射．考虑下面类型方程的分歧问题

$$x - \lambda(L+h)x + G(x) = 0, \tag{4.5.1}$$

$$x - \lambda h(x) - Lx + G(x) = 0, \tag{4.5.2}$$

$$x - \lambda L(x) - h(x) + G(x) = 0, \tag{4.5.3}$$

$$x - \lambda h(x) + G(x) = 0. \tag{4.5.4}$$

当 $h: X \to X$ 在 $x = 0$ 处不是高阶的非线性算子时，传统的分歧理论不再有效. 这一节，介绍一种方法，称为选择性方法，来处理这些方程 (4.5.1)~(4.5.4) 的分歧问题.

为了表明选择性方法的实质，我们用下面特殊情况进行分析，即假设 $h: X \to X$ 也为线性紧算子. 更准确地，假设

$$L : h : X \to X \text{为线性紧算子},$$
$$G : X \to X \text{为紧算子},$$
$$G(x) = o(\|x\|_X).$$

考虑下面参数化线性算子

$$id - \lambda_1 L - \lambda_2 h : X \times I \times I \to X, \quad I = [0, 1].$$

假设 $\lambda_1 = 1$ 不是 L 的特征值，而 $\lambda_1 = \rho^{-1} \in (1, \infty)$ 是 L 在 $(1, \infty)$ 中唯一的具有奇代数重数的特征值. 在参数空间 $(\lambda_1, \lambda_2) \in I \times I$ 中，算子 $id - \lambda_1 I - \lambda_2 h$ 在 $x = 0$ 的指标被表示在图 4.10 中.

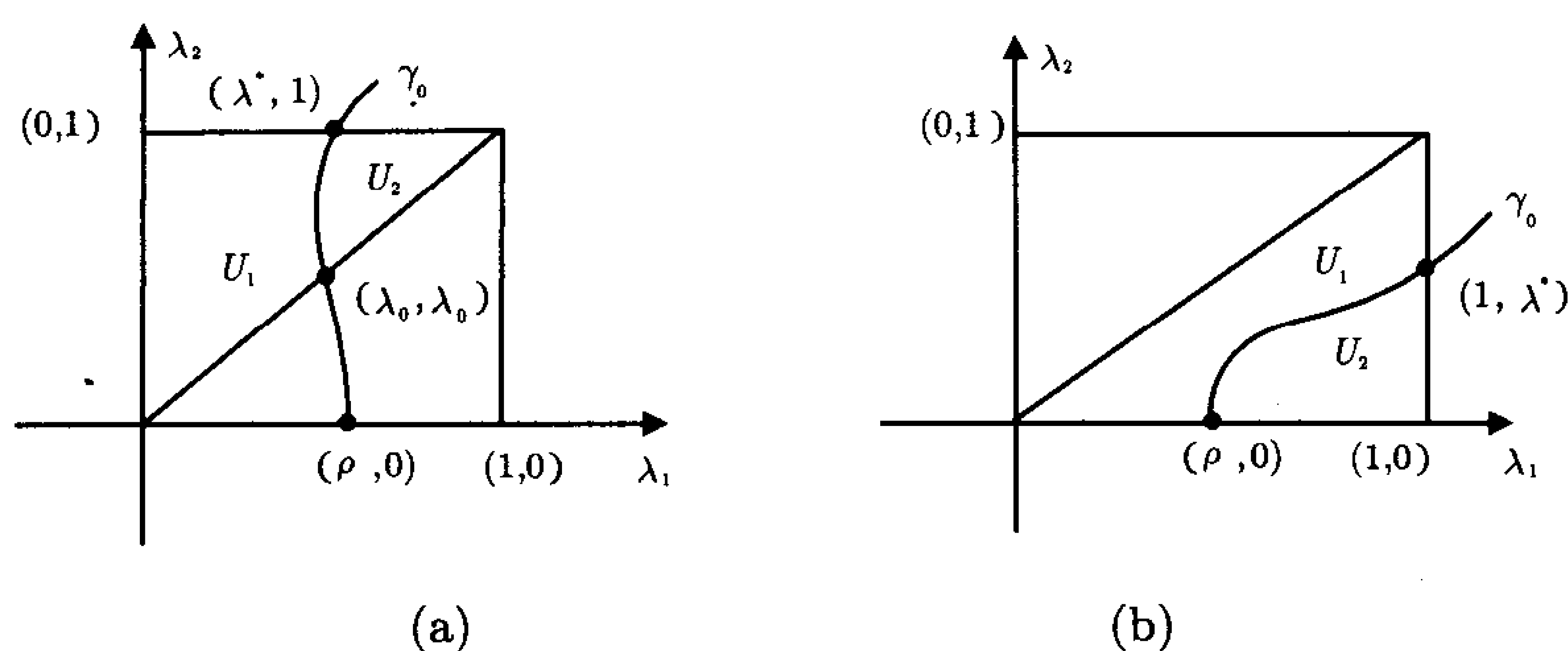


图 4.10

由 Leray-Schauder 度的同伦不变性，存在有一个曲线 γ_0 以 $(\lambda_1, \lambda_2) = (\rho, 0)$ 为起点，分方形区域 $I \times I$ 为两个部分 U_1 和 U_2, 使得

$$\operatorname{ind}(id - \lambda_1 L - \lambda_2 h, 0) = \begin{cases} 1, & \text{当}(\lambda_1, \lambda_2) \in U_1, \\ -1, & \text{当}(\lambda_1, \lambda_2) \in U_2. \end{cases}$$

这就意味着

$$\operatorname{ind}(id-\lambda_1 L-\lambda_2 h+G,0)=\begin{cases}1, & 当(\lambda_1,\lambda_2)\in U_1,\\ -1, & 当(\lambda_1,\lambda_2)\in U_2.\end{cases}$$

这样，如果曲线 γ_0 是如图 4.10(a) 所示的那样，那么 γ_0 与对角线的交点 (λ_0,λ_0)，其参数值 λ_0 就是方程 (4.5.1) 的一个分歧点. 如果 γ_0 是如图 4.10(b) 所示的那样，则 γ_0 与 $I\times I$ 的边界 $\{(1,\lambda)|0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 交于点 $(1,\lambda^*)$，其参数值 λ^* 一定是方程 (4.5.2) 的一个分歧点. 显然，曲线 γ_0 一定要与 $I\times I$ 的对角线 $\{(\lambda,\lambda)|0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 及边界 $\{(1,\lambda)|0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 中的一个相交. 这样可得出结论：(i) 这两个方程 (4.5.1) 和 (4.5.2) 中必有一个在 [0,1] 之间有一个分歧点 $\lambda_0\in[0,1]$;(ii) 三个方程 (4.5.2)~(4.5.4) 中至少有一个在 [0,1] 中有分歧点.

在下面小节中，我们将对 $h:X\to X$ 可以是一般非线性紧算子的情况讨论选择性方法.

§4.5.2 选择性分歧定理

考虑下面方程

$$x+L(x,\lambda)+h(x,\lambda)+G(x)=0, \tag{4.5.5}$$

$$x+L(x,1)+h(x,\lambda)+G(x)=0, \tag{4.5.6}$$

$$x+L(x,\lambda)+h(x,1)+G(x)=0, \tag{4.5.7}$$

$$x+h(x,\lambda)+G(x)=0. \tag{4.5.8}$$

假设

$L(\cdot,\lambda):X\to X$ 为一线性紧算子， $L(x,0)=0$,

$h(\cdot,\lambda):X\to X$ 为一紧算子， $h(x,0)=h(0,\lambda)=0$,

$G:X\to X$ 为一紧算子， $G(x)=o(\|x\|)$.

称 $\lambda_0\in R^1$ 是 $L:X\times R^1\to X$ 的一个特征值，如果存在 $x\in X,x\neq 0$, 使得

$$x+L(x,\lambda_0)=0.$$

定理 4.21 若 $\lambda=1$ 不是 L 的特征值，并且 L 在 (0,1) 中所有特征值代数重数之和为奇数，那么下面结论成立：

(1) 两个方程 (4.5.5) 和 (4.5.6) 中至少一个在 [0,1] 中有一个分歧点；

(2) 三个方程 (4.5.6)~(4.5.8) 中至少一个在 [0,1] 中有一个分歧点；

(3) 如果 $\lambda=0$ 是如上述的一个分歧点，那么在 $\lambda>0$ 的一侧有一个分歧解的分支.

下面定理给出一个全局分歧的结果. 记

$$\Sigma = \{(x,\lambda) \in X \times (0,\infty) | \ x + L(x,1) + h(x,\lambda) + G(x) = 0, x \neq 0\}.$$

定理 4.22 令定理 4.21 的条件成立. 假设对任何 $R \geqslant 1$ 下面方程在 [0,1] 中设有分歧点

$$x + L(x,\lambda) + h(x,R\lambda) + G(x) = 0, \tag{4.5.9}$$

并且方程 (4.5.6) 在 $[0,\infty)$ 中分歧点有界, 那么存在 (4.5.6) 的一个分歧点 $\lambda_0 \geqslant 0$ 使得下面两个结论中的一个成立:

(1) $\bar{\Sigma}$ 中含有 $(0,\lambda_0)$ 的连通分支 Σ_0 在 $X \times [0,\infty)$ 中无界;

(2) Σ_0 含有下面方程的一个非零解

$$x + L(x,1) + G(x) = 0. \tag{4.5.10}$$

注 4.11 当 $\lambda_0 = 0$ 时, 定理 4.22 的结论 (2) 也可等价地陈述为: 存在一个点 $(u_0,\mu) \in X \times R^1, u_0 \neq 0, \mu > 0$, 使得方程 (4.5.6) 从 (u_0,μ) 在 $\lambda < \mu$ 一侧发生鞍结点分歧, 正如定理 4.16 的结论 (3) 那样. 在第六章中, 将专门讨论非线性演化方程的鞍结点分歧, 因为它与全局吸引子理论相关.

定理 4.21 的证明 由定理的假设, 存在一个很小常数 $R > 0$, 使得对 $0 < r < R$, 有

$$\deg(id + L_1 + G, B_r, 0) = \deg(id + L_1, B_r, 0) = (-1)^{\beta},$$

其中 $L_1 = L(\cdot,1), \beta$ 为 $L(\cdot,\lambda)$ 在 (0,1) 中所有特征值代数重数之和, 由假设它是一个奇数. 因此

$$\deg(id + L_1 + G, B_r, 0) = -1, \quad \forall 0 < r < R. \tag{4.5.11}$$

在另一方面,

$$\deg(id + G, B_r, 0) = 1. \tag{4.5.12}$$

假设

$$x + L(x,1) + h(x,1) + G(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial B_r, \quad 0 < r < R,$$

否则 $\lambda = 1$ 是 (4.5.5) 的一个分歧点. 又假设

$$\deg(id + L_1 + h_1 + G, B_r, 0) = 1, \quad \forall 0 < r < R. \tag{4.5.13}$$

令 $H_t = id + L_1 + h(\cdot,t) + G$, 那么

$$H_0 = id + L_1 + G,$$

$$H_1 = id + L_1 + h_1 + G.$$

由拓扑度的同伦不变性，从 (4.5.11) 和 (4.5.13) 可推出，对任 $0 < r < R$, 存在 $x_r \in \partial B_r$ 及 $0 < \lambda_r \leqslant 1$, 使得

$$x_r + L(x_r, 1) + h(x_r, \lambda_r) + G(x_r) = 0.$$

显然，下面的数

$$\lambda_0 = \varliminf_{r\to 0} \lambda_r, \quad \lambda_1 = \varlimsup_{r\to 0} \lambda_r$$

是方程 (4.5.6) 在 [0,1] 中的分歧点, 并且如果 $\lambda_0 = 0$, 那么 (4.5.6) 从 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 的分歧解有一个分支是在 $\lambda > 0$ 一侧.

如果 (4.5.13) 不成立，那么

$$\deg(id + L_1 + h_1 + G, B_r, 0) \neq 1, \quad \forall 0 < r < R. \tag{4.5.14}$$

令

$$\begin{cases} H_t = id + L(\cdot, t) + h(\cdot, t) + G, \\ H_0 = id + G, \\ H_1 = id + L_1 + h_1 + G. \end{cases}$$

这样，用同样的方式从 (4.5.12) 和 (4.5.14) 可推出方程 (4.5.5) 在 [0,1] 中一定有一个分歧点 λ_0, 并且若 $\lambda_0 = 0$, 则 (4.5.5) 从 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 的分歧解有一个分支在 $\lambda > 0$ 的一边. 从而定理的结论 (1) 和 (3) 被证明.

如果 (4.5.6) 在 [0,1] 中没有分歧点，那么 (4.5.14) 成立. 若 (4.5.8) 在 [0,1] 中没有分歧点，就可从 (4.5.12) 推出

$$\deg(id + h_1 + G, B_r, 0) = 1, \quad \forall 0 < r < R. \tag{4.5.15}$$

于是，从 (4.5.14) 和 (4.5.15) 可以推出方程 (4.5.7) 在 [0,1] 中一定有一个分歧点 λ_0, 并且若 $\lambda_0 = 0$, 则在 $\lambda > 0$ 一侧有分歧解的分支. 这样，定理得证.

定理 4.22 的证明　由假设，从定理 4.21 可以看到，方程 (4.5.6) 在 [0,1] 中有一个分歧点. 令 $\{\lambda_k\} \subset [0, \infty)$ 是方程 (4.5.6) 的分歧点集合. 根据定理的条件，有一个数 $\Lambda > 0$, 使得 $\{\lambda_k\} \subset [0, \Lambda)$.

记 C_k 为 $\bar{\Sigma}$ 中含有 $(x, \lambda) = (0, \lambda_k)$ 的连通分支，并且

$$C_0 = \cup_k C_k,$$
$$C = C_0 \cup (\{0\} \times [0, R]),$$
$$Q_R = \bar{B}_R \times [0, R].$$

如图 4.11 所示.

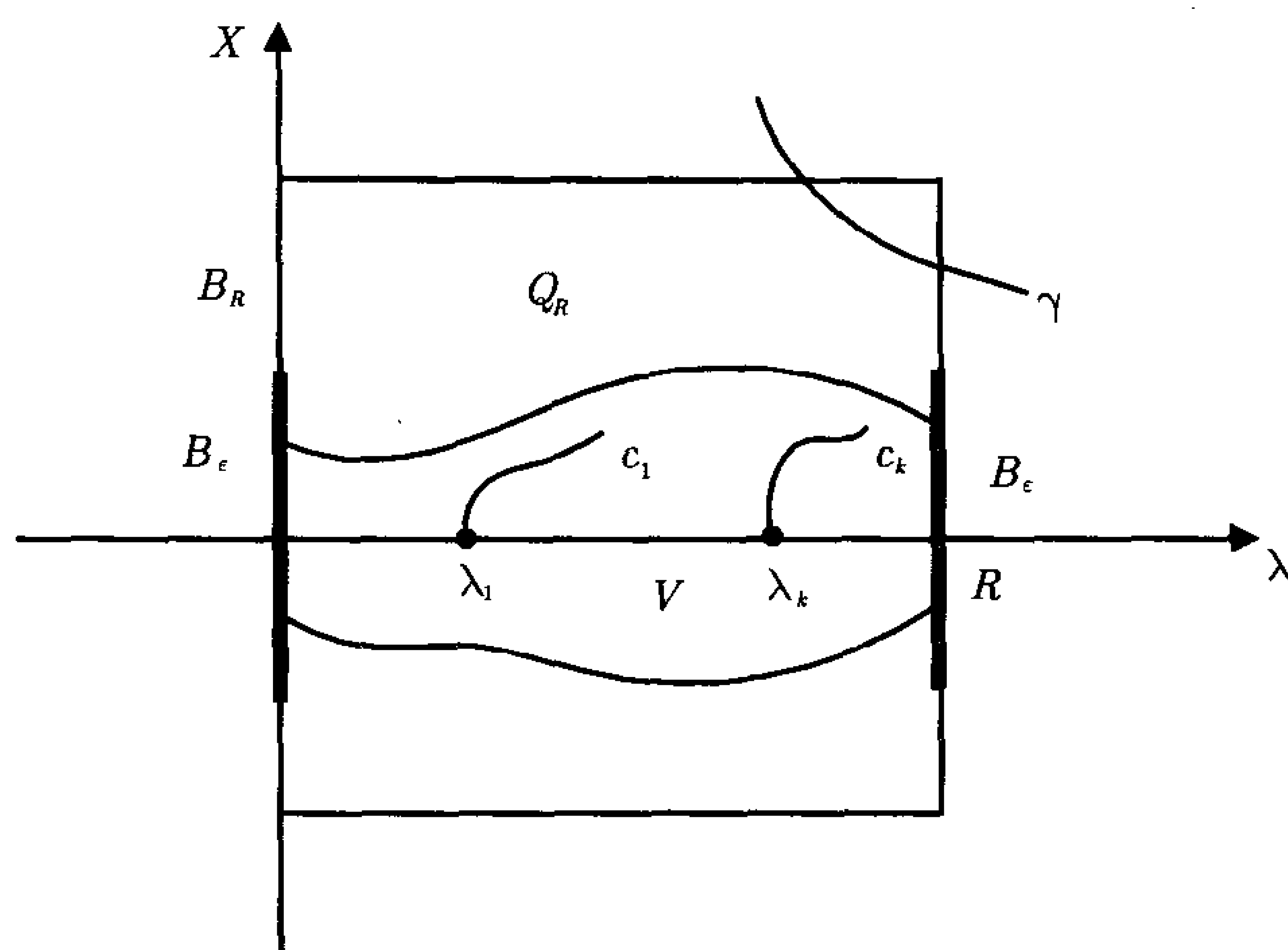


图 4.11 $C\subset V,\bar{V}\cap\gamma(=\bar{\Sigma}/C_0)=\varnothing$

假设 C_0 在 $X\times[0,\infty)$ 中是有界的，即定理中的结论 (1) 不成立，那么存在一个数 $R>1$, 使得 $C_0\subset Q_R, C_0\cap\partial Q_R=\varnothing$.

因为 (4.5.9) 在 [0,1] 中没有分歧点，取 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $id+L_1+G$ 和 $id+L_1+h(\cdot,R)+G$ 在 $\bar{B}_\varepsilon$ 没有非零奇点. 令

$$D=\partial Q_R\setminus[B_\varepsilon\times\{0\}\cup B_\varepsilon\times\{R\}].$$

如果结论 (2) 不真，那么 C 和 $D\cup r(r=\bar{\Sigma}/C_0)$ 是两个不相交的闭集. 因而存在一个相对开集 $V\subset Q_R$, 使得

$$C\subset V,\quad \bar{V}\cap[D\cup r]=\varnothing.$$

这意味着

$$V_0,V_R\subset\bar{B}_\varepsilon,\quad \partial V\cap(\Sigma\cup(\{0\}\times(0,R)))=\varnothing,\tag{4.5.16}$$

其中 V_λ 是 V 在 $\lambda\in[0,R]$ 的截面.

由同伦不变性及切除性质，从 (4.5.11) 和 (4.5.16) 可得

$$\begin{aligned}&\deg(id+L_1+h(\cdot,R)+G,V_R,0)\\=&\deg(id+L_1+G,V_0,0)\\=&-1.\end{aligned}\tag{4.5.17}$$

因为 $V_R\subset B_\varepsilon$ 及 $id+L_\lambda+h(\cdot,R)+G$ 在 B_ε 内没有非零奇点，因而有

$$\deg(id+L_1+h(\cdot,R)+G,V_R,0)$$

$$= \deg(id + L_1 + h(\cdot, R) + G, B_\varepsilon, 0). \tag{4.5.18}$$

另一方面，由假设

$$\deg(id + L(\cdot, \lambda) + h(\cdot, \lambda R) + G, B_\varepsilon, 0) = \text{常数}.$$

对任何 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$\deg(id + L_1 + h(\cdot, R) + G, B_\varepsilon, 0) = \deg(id + G, B_\varepsilon, 0) = 1.$$

此与 (4.5.17) 和 (4.5.18) 矛盾. 定理证毕.

§4.5.3 一般原理

令 X, Y 是 Banach 空间. 考虑下面方程

$$Ax + h(x, \lambda) = 0. \tag{4.5.19}$$

其中

$$A = L + G : X \to Y\text{为一全连续场},$$
$$L : X \to Y\text{为一线性同胚},$$
$$G : X \to Y\text{为紧算子并且}G(x) = o(\|x\|),$$
$$h : X \times R^1 \to Y\text{为紧算子且}h(0, \lambda) = h(x, 0) = 0.$$

下面定理给出选择性方法的一般原理.

定理 4.23 在上面假设下，下述两个结论中至少一个成立:

(1) 方程 (4.5.19) 在 [0,1] 中有一个分歧点 λ_0, 而且若 $\lambda_0 = 0$ 是一个分歧点，则在 $\lambda > 0$ 一侧有一个分歧解分支;

(2) 对任何紧算子 $f : X \to Y$ 且 $f(0) \neq 0$, 有一个常数 $\delta > 0$, 使得对任何 $|\varepsilon| < \delta$ 下面方程

$$A(x) + h(x, 1) = \varepsilon f(x)$$

有一个解 $x(\varepsilon) \in X, x(\varepsilon) \to 0$ 当 $\varepsilon \to 0$.

证明 首先假设

$$\deg(A + h(\cdot, 1), B_r, 0) = 0, \quad \forall r > 0\text{充分小}. \tag{4.5.20}$$

由假设

$$\deg(A, B_r, 0) = \deg(L, B_r, 0) \neq 0, \tag{4.5.21}$$

从 (4.5.20) 和 (4.5.21) 可推得结论 (1).

如果 (4.5.20) 不成立，那么

$$\deg(A + h(\cdot, 1), B_r, 0) \neq 0, \quad \text{对某个}r > 0.$$

这意味着结论 (2) 成立．定理证毕．

下面再给出一个全局分歧的定理．后面将应用该定理讨论一类非线性二阶椭圆方程的正解分歧，对这类问题，经典理论是无效的．

又假设

(1) 存在一个实数 Λ 和一个关于 $\lambda > \Lambda$ 的非减函数 $r_\lambda > 0$, 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $f \in Y, \|f\| = \varepsilon$, 下面方程

$$A(x) + h(x,\lambda) = f, \quad \lambda > \Lambda$$

在 B_{r_λ} 内无解．

(2) 存在一个实数 $\lambda_0 < \Lambda$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$, 下面方程

$$A(x) + \mathrm{th}(x,\lambda_0) = 0$$

在 B_ε 内没有非零解．

令

$$\sum = \{(x,\lambda) \in X \times R | \ \ Ax + h(x,\lambda) = 0, \quad x \neq 0\}.$$

定理 4.24 在 (1) 和 (2) 的假设下，方程 (4.5.19) 在 $[\lambda_0, \Lambda]$ 内有一个分歧点．进一步，如果 (4.5.19) 的分歧点集合在 $[\lambda_0, \infty)$ 中有界，则存在 (4.5.19) 的一个分歧点 $\lambda^* \in [\lambda_0, \infty)$ 使得 Σ 中含有 $(x,\lambda) = (0,\lambda^*)$ 的连通分歧 C 满足下述两个结论中的一个：

(1) C 在 $X \times [\lambda_0, \infty)$ 是无界的；

(2) C 中含有下面方程的一个解 (x_0, λ_0)

$$A(x_0) + h(x_0, \lambda) = 0, \quad x_0 \neq 0.$$

定理 4.24 的证明是类似于定理 4.22, 这里从略

§4.5.4 含次线性项的椭圆方程分歧

为了表明选择性方法如何应用，我们将讨论下面含次线性项椭圆方程的分歧．这种分歧已经与传统的从线性项特征值处发生分歧的现象有了很大差别，此时在零点邻域方程中次线性项起到决定性控制作用，因而分歧点不再是从线性项的特征值处发生．

考虑下面问题

$$\begin{cases} (-1)^m \Delta^m u - \rho u + \lambda |u|^{\delta-1} u + G(x, u, \cdots, D^{m-1}u) = 0, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1, \end{cases} \tag{4.5.22}$$

其中 $0<\delta<1, \rho>0, \Omega\subset R^n (n\geqslant 1)$ 为有界区域， G 满足

$$G(x,\lambda\xi)=o(|\xi|), \quad \forall x\in\Omega.$$

问题 (4.5.22) 的线性项特征值方程为

$$\begin{cases}(-1)^m\Delta u=\lambda u,\\ D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0, \quad |\alpha|\leqslant m-1.\end{cases} \tag{4.5.23}$$

(4.5.3) 具有无穷实特征值序列 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, 并且对几乎所有有界开集 $\Omega\subset R^n, \lambda_1$ 是单特征值，特别地当 $m=1$ 时， λ_1 是单的．下面假设

(1) 在 (4.5.22) 中，实数 $\rho>0$ 不是 (4.5.23) 的特征值，并且 (4.5.23) 在 $(0,\rho)$ 中的所有特征值代数重数之和为奇数；

(2) 有一个常数 $C>0$, 使得

$$|G(x,\xi)|\leqslant C[|\xi|^p+1], \quad \forall\xi\in R^k,$$

其中 $k=1+n+\cdots+n^{m-1}$, 及

$$1<p<\begin{cases}n/n-2, & 若n>2,\\ \infty, & 若n\leqslant 2.\end{cases}$$

记

$$\Sigma=\{(u,\lambda)\in H_0^m(\Omega)\times(0,\infty)|(u,\lambda)满足(4.5.22),\neq 0\}$$

$$\Sigma_0=\Sigma中含有(u,\lambda)=(0,0)的连通分支.$$

定理 4.25 令假设 (1) 和 (2) 成立．那么 $\lambda_0=0$ 是方程 (4.5.22) 在 $[0,\infty)$ 中唯一的分歧点，并且在 $\lambda>0$ 一侧有一个分歧解分支．进一步，下面两个结论中至少一个成立：

(1) Σ_0 在 $H_0^m(\Omega)\times[0,\infty)$ 是无界的；

(2) Σ_0 含有 $(u_0,0)$, 这里 $u_0\neq 0$ 满足

$$(-1)^m\Delta^m u-\rho u+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)=0,$$

在这种情况下， (4.5.22) 在 $(u^*,\lambda^*)\in H_0^m(\Omega)\times(0,\infty)$ 有一个鞍结点分歧，这里 $0<\lambda^*$.

证明 应用定理 4.21 和 4.22 来证明该定理．令 $X=H_0^m(\Omega)$. 定义映射 $L,h,G:X\to X$ 如下

$$\langle Lu,v\rangle=\int_\Omega \rho u\cdot vdx, \qquad \forall v\in X,$$

$$\langle hu, v\rangle = \int_\Omega |u|^{\delta-1}u\cdot vdx, \quad \forall v\in X,$$

$$\langle Gu, v\rangle = \int_\Omega G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)vdx, \quad \forall v\in X.$$

于是方程 (4.5.22) 可等价地写为

$$u+Lu+\lambda hu+Gu=0. \tag{4.5.24}$$

由 Sobolev 嵌入定理容易看到 $L,h,G:X\to X$ 为紧算子.

为了应用定理 4.21, 首先要证明下面方程在 $\lambda\in(0,1]$ 没有分歧点，在 $\lambda>0$ 一侧也没有分歧解分支.

$$\begin{cases}(-1)^m\Delta^m u-\lambda\rho(u-|u|^{\delta-1}u)+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)=0,\\ D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0, \quad |\alpha|\leqslant m-1.\end{cases} \tag{4.5.25}$$

记 $\Omega_1=\{x\in\Omega||u(x)|\leqslant 1\}$ 及 $\Omega_2=\Omega/\Omega_1$. 有

$$\int_{\Omega_1} u^2dx\leqslant\int_\Omega |u|^{1+\delta}dx,$$

$$\int_{\Omega_2} u^2dx\leqslant\int_\Omega |u|^4dx.$$

于是从 (4.5.25) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [|\Delta^{\frac{m}{2}}u|^2+\lambda\rho(|u|^{1+\delta}-u^2)+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)u]dx\\ \geqslant&\int_\Omega[|\Delta^{\frac{m}{2}}u|^2-\lambda\rho u^4+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)u]dx\\ \geqslant&\int_\Omega|\Delta^{\frac{m}{2}}u|^2dx+o(\|u\|_{H^m}^2).\end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式，上式意味着 (4.5.25) 在 (0,1] 内无分歧点，并且如果 $\lambda=0$ 是 (4.5.25) 的分歧点时，在 $\lambda>0$ 一侧没有分歧解分支. 因而由定理 4.21, 方程 (4.5.22) 在 $[0,\rho]$ 中至少有一个分歧点，并且如果 $\lambda=0$ 是 (4.5.22) 的分歧点，则在 $\lambda>0$ 一侧有分歧解分支.

现在，由定理 4.22, 仅仅需要证明存在一个 $\lambda>0$ 的非减函数 $r_\lambda>0$, 使得 (4.5.22) 在 B_{r_λ} 中无非平凡解.

事实上，对任 $\lambda>0$, 有一个 $\varepsilon_\lambda(0<\varepsilon_\lambda\leqslant 1)$, 使得

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_\lambda}} u^2dx<\lambda\rho^{-1}\int_\Omega|u|^{1+\delta}dx, \quad \forall u\neq 0, \tag{4.5.26}$$

其中 $\Omega_{\varepsilon_\lambda}=\{x\in\Omega||u(x)|\leqslant\varepsilon_\lambda\}$. 显然 ε_λ 是一个 $\lambda>0$ 的非减函数. 另一方面，有

$$\int_{\Omega/\Omega_{\varepsilon_\lambda}} u^2dx<\varepsilon_\lambda^{-2}\int_\Omega u^4dx, \quad \forall u\neq 0. \tag{4.5.27}$$

进一步，对任何 ε_λ 有一个 r_λ(r_λ 是 ε_λ 的非减函数，因而 r_λ 是 $\lambda>0$ 的非减函数), 使得对任 $u\in B_{r_\lambda}$, 有

$$\int_\Omega [|\Delta^{\frac{m}{2}}u|^2+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)u]dx\geqslant C[\|u\|^2_{H^m}+o(\|u\|^2_{H^m})]$$
$$\geqslant \rho\varepsilon_\lambda^{-2}\int_\Omega u^4dx. \tag{4.5.28}$$

从 (4.5.26)~(4.5.28) 可得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [|\Delta^{\frac{m}{2}}u|^2-\rho u^2+\lambda|u|^{1+\delta}+G(x,u,\cdots,D^{m-1}u)u]dx\\ >&\ \rho\int_\Omega[\lambda\rho^{-1}|u|^{1+\delta}+\varepsilon_\lambda^{-2}u^4-u^2]dx\\ >&\ 0,\quad \forall u\in B_{r_\lambda},\quad u\neq 0.\end{aligned}$$

这就意味着 (4.5.22) 在 B_{r_λ} 内无非平凡解. 定理证毕.

§4.5.5 二阶椭圆方程正解的全局分歧

这一节将应用定理 4.24 讨论一类拟线性二阶椭圆方程正解的全局分歧. 给定一个拟线性椭圆算子

$$Lu=-a_{ij}(x,u,\nabla u)D_{ij}u+b_i(x,u,\nabla u)D_iu+c(x,u,\nabla u)u.$$

考虑下面问题的全局分歧问题

$$\begin{cases}Lu=g(x,u,\nabla u)+\lambda(u^\alpha+f(x,u,\nabla u)),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\\ u>0,\quad 在\Omega中,\end{cases} \tag{4.5.29}$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1, a_{ij},b_i,C,f,g\in C^r(\Omega\times R^1\times R^n), 0<r\leqslant\alpha$.

假设

(1) 椭圆性条件: $a_{ij}(x,z,\xi)=a_{ji}(x,z,\xi)$, 及

$$\beta|\eta|^2\leqslant a_{ij}(x,z,\xi)\eta_i\eta_j,\quad \forall(x,z,\xi)\in\bar\Omega\times R\times R^1,$$

这里 $\beta>0$ 为一常数.

(2) 对任何 $z\geq 0, x\in\bar\Omega$ 及 $\xi\in R^n$, 有

$$\begin{cases}f(x,z,\xi),g(x,z,\xi),c(x,z,\xi)\geqslant 0,\\ f(x,0,0),g(x,\lambda z,\lambda\xi)=o(|\lambda|).\end{cases}$$

记

$$\Sigma = \{(u,\lambda) \in C^{2,r}(\Omega) \times (0,\infty) |\ \ (u,\lambda)\text{满足}(4.5.29)\}.$$

对于次线性情况， $0<\alpha<1$, 有下面全局分歧定理.

定理 4.26 在 (C_1) 和 (C_2) 假设下，若 $0<\alpha<1$, 则 $\lambda_0=0$ 是问题 (4.5.29) 的唯一分歧点，并且对任 $(u_\lambda,\lambda) \in \sum$, 有如下的估计

$$C\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \|u_\lambda\|_{C^0}, \quad C>0\text{为常数}. \tag{4.5.30}$$

进一步，下面两个结论必有一个成立：

(1) Σ 中含有 $(u,\lambda)=(0,0)$ 的连通分支 C 在 $C^{2,r}(\Omega)\times(0,\infty)$ 中是无界的；

(2) 存在 $u \in C^{2,r}(\Omega)$ 满足下面方程

$$\begin{cases} Lu = g(x,u,\nabla u), \\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ u>0, \quad \text{在}\Omega\text{中}, \end{cases} \tag{4.5.31}$$

并且在这种情况下， (4.5.29) 一定有一个鞍结分歧点 (u^*,λ^*), 其分歧分支在 $\lambda<\lambda^*$ 一侧，这里 $\lambda^*>0$.

对于线性情况，即 $\alpha=1$, 有下面结果.

定理 4.27 在 (C_1) 和 (C_2) 假设下，若 $\alpha=1$, 那么存在一个实数 $\Lambda>0$, 使得问题 (4.5.29) 在 $[0,\Lambda]$ 中至少有一个分歧点．进一步，存在 (4.5.29) 的一个分歧点 $x^* \in [0,\Lambda]$, 使得 $\bar{\Sigma}$ 中含有 $(u,\lambda)=(0,\lambda^*)$ 的连通分支 C 满足下面两个结论中一个：

(1) C 在 $C^{2,r}(\Omega)\times[0,\infty)$ 中是无界的；

(2) C 中含有点 $(u_0,0), u_0$ 满足 (4.5.31).

定理 4.26 的证明 由线性椭圆方程理论可知，对任何 $h \in C^r(\Omega\times R\times R^n)$ 和 $v\in C^{1,r}(\Omega)$, 下面问题存在一个唯一解 $u\in C^{2,r}(\Omega)$:

$$\begin{cases} L_v u = h(x,v,\nabla v), \\ u|_{\partial\Omega}=0, \end{cases} \tag{4.5.32}$$

其中

$$L_v u = a_{ij}(x,v,\nabla v)D_{ij}u + b_i(x,v,\nabla v)D_i u + c^+(x,v,\nabla v)u,$$

$$c^+(x,z,\xi) = \begin{cases} c(x,z,\xi), & \text{当}z>0, \\ c(x,0,\xi), & \text{当}z\leqslant 0, \end{cases}$$

定义映射 $Th: C^{1,r}(\Omega)\to C^{1,r}(\Omega)$ 如下

$$Th(v)=u.$$

由 Gilbarg 和 Trudinger [26] 中的定理 10.4,Th 是一个紧映射. 容易看出，对 $h_1, h_2 \in C^r(\Omega \times R \times R^n)$ 有

$$T(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 Th_1 + \lambda_2 Th_2.$$

另一方面，对每一个 $v \in C^{1,r}(\Omega)$, 有一个 Green 函数 $G_v(x,y)$, 使得方程 (4.5.32) 的解 u 能够被表达为

$$u = \int_\Omega G_v(x,y)h(y,v,\nabla v)dy,$$

其中 $G_v(x,y)$ 是一个非负对称函数 [39]. 由 (4.5.32) 的唯一性，有

$$Th(v) = \int_\Omega G_v(x,y)h(y,v,\nabla v)dy.$$

这样方程 (4.5.29) 的存在性等价于下面方程在 $C^{1,r}(\Omega)$ 中非平凡解的存在性

$$u = Tg^+(u) + \lambda Tf_1(u) + \lambda Tf_2(u), \tag{4.5.33}$$

这里

$$\begin{cases} f_1(x,u,\nabla u) = |u|^\alpha, \\ f_2(x,u,\nabla u) = f^+(x,u,\nabla u) = \begin{cases} f(x,u,\nabla u), & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0. \end{cases} \end{cases}$$

由定理 4.24, 只需证明有一个 $\lambda > 0$ 的非减函数 $r_\lambda > 0$, 使得对任 $t > 0$, 下面方程在 $\bar{B}^+_{r_\lambda}$ 中无解.

$$u = \lambda Tf_1(u) + TP(u) + tTK, \tag{4.5.34}$$

并且当 $t = 0$ 时，(4.5.34) 在 $\bar{B}^+_{r_\lambda}$ 中没有非零解，那么，$k \in C^r(\Omega)$ 和 $P \in C^r(\bar{\Omega} \times R \times R^n)$ 分别为任意正函数和非负函数，

$$B^+_{r_\lambda} = \{u \in C^{1,r}(\Omega) | \|u\|_{C^{1,r}} < r_\lambda, \quad u \geqslant 0 \text{在}\Omega\text{中}\}.$$

假设 $u_\lambda \in \bar{B}^+_{r_\lambda} (u_\lambda \neq 0)$ 满足 (4.5.34), 那么从 $TP(u) \geqslant 0$ 和 $TK > 0$ 得到

$$u_\lambda(x) > \lambda \int_\Omega G_{u_\lambda}(x,y)u^\alpha_\lambda(y)dy, \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.5.35}$$

另一方面，(4.5.34) 也意味着

$$\begin{cases} Lu_\lambda = \lambda u^\alpha_\lambda + P(x,u_\lambda,\nabla u_\lambda) + tK(x) \geqslant 0, \\ u_\lambda|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4.5.36}$$

由强极值原理，从 (4.5.36) 可得到

$$u_\lambda(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.5.37}$$

由 (4.5.35), 对任何开集 $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, 有

$$\int_{\widetilde{\Omega}} u_\lambda dx \geqslant \lambda \int_{\Omega} u_\lambda^\alpha(x) \left[\int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)dy\right] dx \tag{4.5.38}$$

$$\geqslant \lambda \inf_{x\in\widetilde{\Omega}} \left[\int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)dy\right] \int_{\widetilde{\Omega}} u_\lambda^\alpha dx.$$

令 $\|u_\lambda\|_{C^{1,r}} = \varepsilon$. 需要证明，有一个 $\beta_\delta > 0$, 使得

$$\inf_{x\in\widetilde{\Omega}} \int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)dy \geqslant \beta_\varepsilon. \tag{4.5.39}$$

取 $e \in C_0^\infty(\Omega)$ 使得 $0 \leqslant e \leqslant 1, e \neq 0$ 及 $\text{supp } e \subset \widetilde{\Omega}$. 那么下面方程的解

$$\begin{cases} -a_{ij}(x,u_\lambda,\nabla u_\lambda)D_{ij}u_e + b_i(x,u_\lambda,\nabla u_\lambda)D_i u_e + C(x,u_\lambda,\nabla u_\lambda)u_e = e(x), \\ u_e|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

能够被表达为如下形式

$$u_e(x) = \int_\Omega G_{u_\lambda}(x,y)e(y)dy = \int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)e(y)dy.$$

因此有

$$\int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)dy \geqslant \int_{\widetilde{\Omega}} G_{u_\lambda}(x,y)edy = u_e(x). \tag{4.5.40}$$

由强极值原理，从 $\widetilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ 可推出，存在 $\beta_\varepsilon > 0$, 使得

$$\inf_{x\in\widetilde{\Omega}} u_e(x) \geqslant \beta_\varepsilon. \tag{4.5.41}$$

从 (4.5.40) 和 (4.5.41) 得到 (4.5.39).

另一方面，令 $u_\lambda \to 0(\lambda \to 0)$ 在 $C^{1,r}(\Omega)$ 中. 从文献 [27] 定理 10.4 的证明中看到

$$u_e = Te(u_\lambda) \to Te(0)(\lambda \to 0), \quad \text{在}C^{1,r}(\Omega)\text{中}, \tag{4.5.42}$$

其中 $u_0 = Te(0)$ 是下面方程的解

$$\begin{cases} -a_{ij}(x,0,0)D_{ij}u + b_i(x,0,0)D_i u + C(x,0,0)u = e(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

容易看出

$$\inf_{x\in\widetilde{\Omega}}\int_{\widetilde{\Omega}}G_0(x,y)dy\geqslant\inf_{x\in\widetilde{\Omega}}u_0(x)\geqslant\beta_0>0.$$

再由 (4.5.39) 和 (4.5.42), 可以知道，有一个与 λ 无关的常数 $\beta>0$, 使得

$$\inf_{x\in\widetilde{\Omega}}G_{u_\lambda}(x,y)dy\geqslant\beta>0.$$

从 (4.5.37) 和 (4.5.38) 可推出

$$\int_{\widetilde{\Omega}}u_\lambda dx\geqslant\lambda\beta\int_{\widetilde{\Omega}}u_\lambda^\alpha dx\geqslant\lambda\beta\|u_\lambda\|^{\alpha-1}\int_{\widetilde{\Omega}}u_\lambda dx.$$

由 (4.5.37)

$$\int_{\widetilde{\Omega}}u_\lambda dx>0.$$

因而得到

$$\beta_1\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant\|u_\lambda\|_{C^0},\quad\beta_1=\beta^{\frac{1}{1-\alpha}}.\tag{4.5.43}$$

因此 (4.5.43) 是方程 (4.5.34) 和 (4.5.33) 有非零解存在的一个必要条件. 令 $r_\lambda=\beta_2\lambda^{\frac{1}{1-\alpha}}(0<\beta_2<\beta_1)$, 那么 $r_\lambda>0$ 是 $\lambda>0$ 的一个单增函数满足定理 4.24 的条件 (1) 和 (2). 定理得证.

定理 4.27 的证明　仍然应用定理 4.24 来证明该定理. 整个证明分两步进行.

第一步. 验证定理 4.24 中条件 (2).

正如定理 4.26 的证明一样，对一个函数 $h\in C^r(\Omega\times R\times R^n)$, 可以定义一个映射 $Th:C^{1,r}(\Omega)\to C^{1,r}(\Omega)$. 此时关于 $\alpha=1$ 的方程 (4.5.29) 可表达为如下形式

$$u=Tg^+(u)+\lambda Tu^++\lambda Tf^+(u).$$

其中

$$Tu^+=\int_\Omega G_u(x,y)u^+(y)dy.$$

取 (2) 中 $\lambda_0=0$, 由假设 (2),

$$g(x,z,\xi)=o(|z|+|\xi|).$$

因而存在 $\varepsilon>0$, 对任何 $0\leqslant t\leqslant1$, 下面方程

$$u=tTg^+(u)$$

在 $B_\varepsilon=\{v\in C^{1,r}(\Omega)|\|v\|_{C^{1,r}}<\varepsilon\}$ 中无非零解. 因而条件 (2) 成立.

第二步. 验证条件 (1).

令 $\lambda_1(v)$ 是下述问题的第一特征值

$$\begin{cases} -a_{ij}(x,v,\nabla v)D_{ij}u+b_i(x,v,\nabla v)D_iu+C^+(x,v,\nabla v)u=\lambda u, \\ u|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{4.5.44}$$

$\lambda_1(0)$ 是 (4.5.44) 关于 $v=0$ 的第一特征值.

首先证明对任何 $\lambda>\lambda_1(v)$ 和 $q(x)\geqslant 0, x\in\Omega$, 下面方程在 $C^{2,r}(\Omega)$ 中没有解.

$$\begin{cases} -a_{ij}(x,v,\nabla v)D_{ij}u+b_i(x,v,\nabla v)D_iu+C^+(x,v,\nabla v)u-\lambda u=q, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ u>0, \quad 在\Omega中. \end{cases} \tag{4.5.45}$$

方程 (4.5.45) 的解 u 可表达为

$$u=\lambda\int_\Omega G_v(x,y)u(y)dy+\int_\Omega G_v(x,y)qdy.$$

因为 Green 函数 $G_v(x,y)$ 是对称非负的, 对 (4.5.44) 的第一特征函数 $u_1(x)>0, \forall x\in\Omega$, 有

$$\int_\Omega u_1udx=\lambda\int_\Omega u\left[\int_\Omega G_v(x,y)u_2dy\right]dx+\int\int_\Omega G_vqdxdy.$$

由

$$u_1=\lambda_1(v)\int_\Omega G_v(x,y)u_1dy,$$

$$\int_\Omega\int_\Omega G_v(x,y)q(x)dxdy\geqslant 0,$$

可推得

$$\int_\Omega u_1udx\geqslant\lambda\cdot\lambda_1^{-1}(v)\int_\Omega u_1udx.$$

而 $\lambda\cdot\lambda_1^{-1}(v)>1$, 此为矛盾. 故当 $\lambda>\lambda_1(v)$ 时方程 (4.5.45) 无解.

因为 (4.5.44) 的特征值都连续地依赖于 $v\in C^{1,r}(\Omega)$. 因而当取定理 4.24 中条件 (1) 的 Λ 满足 $\Lambda>\lambda_1(0)$ 时, 对任何 $\lambda>\Lambda$, 存在 $r_\lambda>0$, 使得

$$\lambda_1(v)<\lambda, \quad \forall v\in B_{r_\lambda}, \tag{4.5.46}$$

并且 r_λ 为 $\lambda>\Lambda$ 的非减函数. (4.5.46) 意味着下面方程

$$\begin{cases} Lu=g(x,u,\nabla u)+\lambda(u+f(x,u,\nabla u))+k(x), \\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ u>0, \quad 在\Omega中, \end{cases}$$

对任何 $k \in C^r(\Omega)(k(x) \geqslant 0)$ 当 $\lambda > \Lambda$ 时在 B_{r_λ} 内无解. 这样条件 (1) 成立. 从定理 4.24 该定理得证.

从定理 4.26 和 4.27 可得到如下推论.

推论 4.1　令 $\Omega \subset R^n (n \geqslant 3)$ 是一个星形区域. 那么 $\lambda_0 = 0$ 是下面问题的唯一分歧点

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda(u^\alpha + f(x, u, \nabla u)), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u > 0, \quad 在\Omega中, \end{cases} \tag{4.5.47}$$

其中 $p \geqslant \dfrac{n+2}{n-2}, 0 < \alpha \leqslant 1, f \in C^r(\Omega \times R \times R^n)$. 此外 $\bar{\Sigma}$ 中含有 $(u, \lambda) = (0, 0)$ 点的连通分支 C 在 $C^{2,r}(\Omega) \times [0, \infty)$ 中是无界的, 这里 Σ 为

$$\Sigma = \{(u, \lambda) \in C^{2,r}(\Omega) \times (0, \infty) | \quad (u, \lambda)满足(4.5.47)\}.$$

证明　由 Pohezaev 不等式可知, 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, \quad p \geqslant \dfrac{n-2}{n+2}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x) > 0 \end{cases}$$

没有解. 因而从定理 2.26 和 2.27 立刻可得该推论.

例 4.1　考虑下面方程

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u + \lambda |\nabla u|^\beta, 0 < \beta, 1 < p, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.5.48}$$

由定理 4.27 可知方程 (4.5.48) 在 $[0, \lambda_1]$ 内一定有一个分歧点 λ^*, 这里 λ_1 为 $-\Delta$ 的第一特征值, 当 $0 < \beta \leqslant 1$ 时该结论不能从经典分歧理论得到.

§4.6　从非线性齐次项的分歧

§4.6.1　分歧定理

在 §4.5 中介绍的选择性分歧方法可以处理一类从非线性项的分歧问题. 在这一节我们继续考虑这一问题, 讨论从非线性齐次项的分歧. 事实上, 非线性方程的分歧总是从齐次项处发生. 经典的分歧理论所涉及的只是从线性项的分

歧，当然这也是最重要的情况．然而在这一节建立的理论能够帮助我们从更广的角度加深对非线性分歧现象的理解.

令 X, Y 是两个 Banach 空间，考虑下面给出的分歧方程

$$Ax + \lambda Bx + G(x, \lambda) = 0, \quad x \in X, \tag{4.6.1}$$

这里 $A, B, G_\lambda : X \to Y$ 是连续映射，满足

$$\begin{cases} A(\lambda x) = \lambda^k A(x), & \text{对}\lambda > 0\text{和某个}k > 0, \\ B(\lambda x) = \lambda^p B(x), & \text{对}\lambda > 0\text{和某个}p > 0, \quad p \neq k, \end{cases} \tag{4.6.2}$$

$$\begin{cases} G(\lambda^{1/(k-p)}\lambda) = o(|\lambda|^{\frac{k}{k-p}}), & \text{当}k > p, \\ G(\lambda^{1/(p-k)}x, \lambda^{-1}) = o(|\lambda|^{\frac{k}{p-k}}), & \text{当}p > k, \end{cases} \tag{4.6.3}$$

对一固定的 $x \in X, x \neq 0$.

从一个简单的现象开始讨论．令 $x_0 \in X, x_0 \neq 0$ 是下面方程的一个解

$$A(x_0) + B(x_0) = 0. \tag{4.6.4}$$

容易验证， $x(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{k-p}} x_0 (\lambda > 0)$ 是下述方程的解

$$A(x) + \lambda B(x) = 0. \tag{4.6.5}$$

进一步，我们能看到，当 $p > k$ 时， $x(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{p-k}} x_0$ 是方程 (4.6.5) 从 $(x, \lambda) = (0, +\infty)$ 处的一个分歧解，而当 $k > p$ 时， $x(t)$ 是从 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 处的一个分歧解.

这个简单的事实启发我们去证明下面更一般的结果.

定理 4.28 令 $x_0 \neq 0$ 是方程 (4.6.4) 的一个解，在条件 (4.6.2) 和 (4.6.3) 假设下，如果 $A, B : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 是可微的，并且其导算

$$DA(x_0) + DB(x_0) : X \to Y$$

是一个线性同胚，那么下面结论成立：

(1) 如果 $p < k$，则方程 (4.6.1) 从 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 处有一个分歧解分支 $(x_\lambda, \lambda) \in X \times (0, \infty)$，并且在 $\lambda = 0$ 附近 x_λ 能够被表达为如下形式

$$\begin{cases} x(\lambda) = \lambda^{1/(k-p)} x_0 + \lambda^{1/(k-p)} z(\lambda), \quad \forall \lambda > 0, \\ z(\lambda)\text{关于}\lambda\text{是连续的，并且}z(0) = 0. \end{cases}$$

(2) 如果 $p > k$, 则 (4.6.1) 从 $(x,\lambda) = (0,+\infty)$ 处分歧出一个解的分支 $(x_\lambda,\lambda) \in X \times (0,\infty)$, 并且在 $\lambda = +\infty$ 附近 x_λ 能够表达为如下形式

$$\begin{cases} x(\lambda) = \lambda^{-1/(p-k)}x_0 + \lambda^{-1/(p-k)}z(\lambda), \quad \lambda > 0, \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} z(\lambda) = 0. \end{cases}$$

证明 首先对 $0 < p < k$ 的情况进行证明. 令方程 (4.6.1) 的解在 $\lambda = 0$ 附近被表达为

$$x(\lambda) = \lambda^{1/(k-p)}(x_0 + z(\lambda)). \tag{4.6.6}$$

将 (4.6.6) 代入 (4.6.1) 中, 由 (4.6.2) 得到

$$A(x_0+z) + B(x_0+z) + \lambda^{-k/(k-p)}G(\lambda^{1/(k-p)}(x_0+z),\lambda) = 0. \tag{4.6.7}$$

由 A 和 B 在 x_0 的可微性, 在 $z = 0$ 的附近方程 (4.6.7) 能够表达为如下形式

$$(DA(x_0) + DB(x_0))z + g(z,\lambda) + o(\|z\|) = 0, \tag{4.6.8}$$

其中

$$g(z,\lambda) = \lambda^{-k/(k-p)}G(\lambda^{1/(k-p)}(x_0+z),\lambda).$$

根据条件 (4.6.3) 可知 $g(z,0) = 0, \forall z \in X$. 这意味着 $g : X \times R \to Y$ 关于 z 在 $(z,\lambda) = (0,0)$ 点是可微的, 并且

$$D_z g(0,0) = 0. \tag{4.6.9}$$

由隐函数定理, 从 (4.6.8) 和 (4.6.9) 可以推出存在唯一的连续函数 $z = z(\lambda)$, 使得 $z(0) = 0$, 并且满足 (4.6.8). 因此 (4.6.6) 是方程 (4.6.1) 从 $(x,\lambda) = (0,0)$ 处在 $\lambda > 0$ 一侧分歧出的唯一解分支.

现在, 考虑这种情况 $k < p$. 令 $\beta = \lambda^{-1}$, 那么方程 (4.6.1) 是等价于下面形式

$$\beta A(x) + B(x) + \beta G(x,\beta^{-1}) = 0. \tag{4.6.10}$$

令 (4.6.1) 的解在 $\beta = 0$ 附近具有如下形式

$$x(\beta) = \beta^{1/(p-k)}(x_0 + z(\beta)), \tag{4.6.11}$$

将 (4.6.11) 代入方程 (4.6.10) 中可得

$$A(x_0+z) + B(x_0+z) + \beta^{-k/(p-k)}G(\beta^{1/(p-k)}(x_0+z),\beta^{-1}) = 0. \tag{4.6.12}$$

用上面同样的方式从 (4.6.12) 可推出结论 (2). 定理得证.

注 4.12 如果 $G: X \to Y$ 与 λ 无关, 则条件 (4.6.3) 意味着

$$G(x) = o(\|x\|).$$

对于 $p = k$ 的情况, 方程 (4.6.1) 的分歧问题没有像 $p \neq k$ 那样简单, 除了线性情况外. 我们知道, 如果 $A + \lambda B$ 是一个线性全连续场, 那么 (4.6.1) 的分歧点 λ_0 一定是 $A + \lambda B$ 的特征值, 即 $Ax + \lambda_0 Bx = 0$ 有非零解 $x \neq 0$. 对于一般 $p = k$ 的非线性情况, 相似的结果成立.

一个算子 $K : X \to Y$ 称为在 $x = 0$ 处是固有的, 如果对任何有界序列 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $K(x_n) \to 0 (n \to \infty)$, 则 $\{x_n\}$ 中存在收敛子列. 显然若 k 为全连续场, 则 K 是固有的.

定理 4.29 令条件 (4.6.2) 成立并且 $p = k$. 假设算子 $A + \lambda B$ 对任 $\lambda \in R^1$ 是在 $x = 0$ 处是固有的, 而且 $G(x, \lambda) = o(\|x\|^k)$. 如果 $\lambda_0 \in R^1$ 是 (4.6.1) 的一个分歧点, 则方程

$$Ax + \lambda_0 Bx = 0 \tag{4.6.13}$$

在 X 中有一个非平凡解.

证明 令 $(x(\lambda_0 + t), \lambda_0 + t)$ 是 (4.6.1) 从 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处的一个分歧解. 那么有

$$\lim_{t \to 0} x(\lambda_0 + t) = 0.$$

记

$$\beta(t) = \|x(\lambda_0 + t)\|,$$

$$z(t) = x(\lambda_0 + t)/\|x(\lambda_0 + t)\|.$$

从 (4.6.1) 可得

$$A(z) + \lambda_0 B(z) + tB(z) + \beta^{-k} G(\beta z, \lambda) = 0.$$

因为 $A + \lambda B$ 是固有的, 并且 $\|z(t)\| = 1$, 可推出 $z(t) \to z_0 \neq 0$ 当 $t \to 0$. 显然 z_0 是 (4.6.13) 的一个解. 定理证毕.

例 4.2 考虑下面问题

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u + \lambda |\nabla u|, p > 1, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x) > 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.6.14}$$

由例 4.1 知，方程 (4.6.14) 在 $[0,\lambda_1]$ 内一定有一个分歧点 λ_0^*, 显然 $0<\lambda^*<\lambda_1$. 由定理 4.29, 对于 λ^* 下面方程有解

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda^* u+\lambda^*|\nabla u|, \\ u|_{\partial\Omega}=0, \\ u(x)>0, \quad \forall x\in\Omega. \end{cases}$$

§4.6.2 一些应用

作为定理 4.28 应用的一个例子，考虑下面方程

$$\begin{cases} (-1)^m\Delta^m u-\lambda|u|^{p-1}u+G(x,u,\cdots,D^{2m}u)=0, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0, \quad |\alpha|\leqslant m-1, \end{cases} \tag{4.6.15}$$

其中 $p>1, m\geqslant 1, \Omega\subset R^n$ 为一有界光滑区域，$G(x,z,\cdots,\zeta)$ 为一个 C^∞ 函数，并且满足

$$G(x,\lambda z,\cdots,\lambda\zeta)=o(|\lambda|), \quad \lambda\in R^1. \tag{4.6.16}$$

令

$$X=\{u\in C^{2m,r}(\Omega)|\ \ D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0, \quad \forall|\alpha|\leqslant m-1\},$$

$$Y=C^r(\Omega), \quad 0<r<1.$$

下面方程

$$\begin{cases} (-1)^m\Delta^m u-|u|^{p-1}u=0, \\ D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0, \quad \forall|\alpha|\leqslant m-1. \end{cases} \tag{4.6.17}$$

在 X 中有一个非平凡解 $u_0\in X$, 如果 p 满足

$$1\leqslant p<\begin{cases} \dfrac{2n}{n-2m}, & 当n>2m, \\ \infty, & 当2m\geqslant n. \end{cases}$$

下面的定理是定理 4.28 的一个直接推论.

定理 4.30 令 $u_p\in X(u_p\neq 0)$ 是 (4.6.17) 的一个解. 在 (4.6.16) 条件下，若下面线性方程

$$\begin{cases} (-1)^m\Delta^m v-p|u_p|^{p-1}v=0, \\ D^\alpha v|_{\partial\Omega}=0, \quad \forall|\alpha|\leqslant m-1 \end{cases} \tag{4.6.18}$$

没有非零解，那么方程 (4.6.15) 从 $(u,\lambda)=(0,\infty)$ 处有一个分歧，并且其分歧解 $(u(x,\lambda),\lambda)$ 能够表达为

$$u(x,\lambda)=\lambda^{-1/(p-1)}u_p(x)+\lambda^{-1/(p-1)}v(x,\lambda),\quad \lambda>0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}v(x,\lambda)=0.$$

注 4.13 实际上，除可数离散个 $p_i(i=1,2,\cdots),1<p_i<p(p=2n/n-2m$ 当 $n>2m,p=\infty$ 当 $2m\geq n)$, 对所有的 $p(1<p<P)$ 和 (4.6.17) 的解 $u_p\neq 0$, 线性方程 (4.6.18) 没有非零解.

定理 4.28 的另一个应用就是关于二阶椭圆方程正解分歧问题. 结合一些先验估计利用该定理可以得到下面结果.

考虑下面问题

$$\begin{cases}-\Delta u=g(x,u,\nabla u,\nabla^2u)+\lambda(u^p+f(x,u,\nabla u,\nabla^2u)),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\\ u(x)>0,\quad \forall x\in\Omega,\end{cases}\tag{4.6.19}$$

其中 $\Omega\subset R^n$ 为一个有界 $C^{2,r}(0<r<1)$ 区域， p 满足

$$0<p<\begin{cases}\infty, & n\leqslant 2,\\ \dfrac{n+2}{n-2}, & n>2.\end{cases}$$

假设 $f,g\in C^1(\Omega\times R\times R^n\times R^{n^2})$, 并且

$$\begin{cases}g(x,\lambda z,\lambda\xi,\lambda\zeta)=o(|\lambda|),\\ f(x,\lambda z,\lambda\xi,\lambda\zeta)=o(|\lambda|^p).\end{cases}\tag{4.6.20}$$

令 u_1^* 满足下面问题

$$\begin{cases}-\Delta u=u^p, & p\neq 1,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\\ u(x)>0, & \forall x\in\Omega.\end{cases}$$

记

$$r_1(\lambda)=\max_{x\in\bar\Omega,|\xi|=1,|\zeta|=1}g(x,\lambda,\lambda\xi,\lambda\zeta),$$
$$r_2(\lambda)=\max_{x\in\bar\Omega,|\xi|=1,|\zeta|=1}f(x,\lambda,\lambda\xi,\lambda\zeta),$$
$$r(\lambda)=\max\{\lambda^{-1}r_1(\lambda),\lambda^{-p}r_2(\lambda)\}.$$

由 (4.6.20) 可知 $\lim_{\lambda\to 0} r(\lambda) = 0$.

应用定理 4.28 可证得下面定理.

定理 4.31　在 (4.6.20) 的假设下，当 $0 < p < 1$ 时，方程 (4.6.19) 从 $(u,\lambda) = (0,0)$ 处分歧出唯一的一个解分支 $(u_\lambda,\lambda),\in C^{2,p}(\Omega)\times(0,\infty)$, 并且 u_λ 能够表达为

$$\begin{cases} u_\lambda(x) = \lambda^{1/(1-p)}u_1^*(x) + \lambda^{1/(1-p)}v(x,\lambda), \\ \|v(x,\lambda)\|_{C^{2,p}} = O(r(\lambda^{1/(1-p)})), \end{cases}$$

此外 $v(x,\lambda)$ 在 $C^2(\Omega)$ 拓扑下关于 λ 是 C^1 的.

定理 4.32　在 (4.6.20) 的假设下，当 $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$(或者 $1 < p < \infty$ 对 $n = 1,2$), 下面结论成立:

(1) 存在一个数 $p_0 > 1$, 使当 $1 < p < p_0$ 时，方程 (4.6.19) 从 $(u,\lambda) = (0,\infty)$ 处分歧出一个唯一解分歧;

(2) 如果下面线性方程

$$\begin{cases} -\Delta v = pu_1^{*p-1}v, \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

没有非零解，那么 (4.6.19) 从 $(u,\lambda) = (0,+\infty)$ 处分歧出一个解分支 $(u_\lambda,\lambda) \in C^{2,r}(\Omega)\times(0,\infty)$, 且 u_λ 满足

$$\begin{cases} u_\lambda(x) = \lambda^{-1/(p-1)}u_1^*(x) + \lambda^{-1/(p-1)}v(x,\lambda), \\ \|v(x,\lambda)\|_{C^{2,r}} = O(r(\lambda^{-1/(p-1)})), \quad 对\lambda \to +\infty. \end{cases}$$

此外，　$v(x,\lambda)$ 在 $C^2(\Omega)$ 拓扑下关于 λ 是 C^1 的.

因此定理 4.31 和 4.32 的证明还需要一些较繁杂的先验估计. 这里省去证明细节. 有兴趣的读者可参见文献 [49,50,52].

注 4.14　方程 (4.6.19) 在条件 (4.6.20) 的假设下，包括了如下面类型的完全非线性方程

$$\begin{cases} -a_{ij}(x,u,\nabla u,\nabla^2 u)D_{ij}u = \lambda u^p + F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.6.21}$$

实际上方程 (4.6.21) 可写成下面形式

$$\begin{cases} -a_{ij}(x)D_{ij}u = \lambda u^p + G(x,u,\nabla u,\nabla^2 u), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x) > 0, \forall x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.6.22}$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij}(x) = a_{ij}(x,0,0), \\ G(x,\xi,\zeta) = F(x,\xi,\zeta) + a_{ij}(x,\xi,\zeta)\zeta_{ij} - a_{ij}\zeta_{ij}. \end{cases}$$

很清楚，(4.6.22) 本质上属于 (4.6.19) 一类且满足条件 (4.6.20).

§4.7 评 注

§4.1 这一节的内容主要是 Ma 和 Wang 的工作 [52,60,61]. 谱定理 (定理 4.4) 在分歧理论中是一个非常重要的工具，它与 Lyapunov-Schmidt 约化、中心流形函数的构造及动态分歧理论一起构成由作者新建立的分歧与跃迁理论的基石.

§4.2 传统的 Lyapunov-Schmidt 约化可参见文献 [9,75,120]. 关于 Euler-Bernoulli 杆的例子可参见文献 [10]. 建立在谱定理 4.4 基础上的 Lyapunov-Schmidt 规范约化方法及分歧解的正则性来自 Ma 和 Wang 的研究 [52,60].

§4.3 定理 4.10 及 4.12 是 Krasnoselskii 先驱性的工作 [38], 定理 4.11 归于 Crandall 和 Rabinowitz [13]. 定理 4.13 是由 Clark 证明 [11], 并且被 Rabinowitz 所推广 [85], 全局分歧定理归于 Rabinowitz[84].

§4.4 这一节是取自 Ma 和 Wang 最近的工作 [52,60]. 主要结果是定理 4.15 和 4.16, 它们建立了从任一重数的特征值临界穿越定态分歧存在定理. 这些结果对传统的从奇重数特征值临界穿越分歧理论是一个重要的补充. 该理论的方法本质上依赖于在 §4.1 建立的谱定理 4.4. 关于椭圆方程组的应用进一步可参见文献 [52].

§4.5 这一节的内容归于 Yu 和 Ma[48~50,107~102]. 特别地，定理 4.26 以及定理 4.31 和 4.32 是本书第一作者在法国巴黎第九大学的 P.L.Lious 教授指导下的博士论文部分结果.

§4.6 这一节是由 Ma 和 Wang [52] 的工作组成.

第五章　有限维系统的动态分歧理论

这一章主要介绍有限维系统的动态分歧理论. 该理论是由作者最近新发展起来的，它主要建立在一个新的分歧概念基础之上，称之为吸引子分歧. 这一理论的无穷维观点将放在下一章专门介绍. 有限维的动态分歧理论再结合中心流形的约化，即能够被应用到有限维动力系统中，又可以应用到无穷维动力系统中. 具体应用可见第七、八两章.

§5.1　吸引子分歧

§5.1.1　吸引子分歧的基本原理

在介绍吸引子分歧理论之前，有必要对吸引子分歧现象的实质性给予简要地说明. 为了这个目的，考虑下面的常微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + G_1(x, y), \tag{5.1.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + G_2(x, y), \tag{5.1.2}$$

其中 $x \in R^m, y \in R^{n-m}(1 \leqslant m \leqslant n)$, 并且

$$G_i(x, y) = o(|x|, |y|), \quad i = 1, 2.$$

由稳定流形定理，方程 (5.1.1) 和 (5.1.2) 在 $z = (x, y) = 0$, 点有一个 $(n-m)$ 维的稳定流形 Γ. 这意味着在 $\lambda = 0$ 附近，系统 (5.1.1) 和 (5.1.2) 的流在 $z = (x, y) = 0$ 的一个小邻域内被挤压到一个 m 维曲面 Σ_λ 上，称为中心流形，如图 5.1 所示.

这个 m 维曲面 Σ_λ 能够被一个函数 $y = h(x, \lambda)$ 所表达. 因为 Σ_λ 在 $z = 0$ 点与 R^m 空间相切. 因而在 Σ_λ 上流的拓扑结构是相同于下面方程在 R^m 中流的拓扑结构，该流实际上是 Σ_λ 上的流到 R^m 中投影

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + G_1(x, h(x, \lambda)), \tag{5.1.3}$$

其中

$$G_1(x, h(x, \lambda)) = o(|x|). \tag{5.1.4}$$

然后系统 (5.1.1) 和 (5.1.2) 在 $z = 0$ 邻域的动态分歧问题被归结到方程 (5.1.3) 的分歧. 当 $\lambda < 0$ 时，在 $x = 0$ 的小邻域内由于非线性项 (5.1.4) 是一个

高阶项，因而线性部分 λx 控制了 (5.1.3) 的动力学行为，这使得 (5.1.3) 的流收敛到 $x=0$. 当 $\lambda=0$ 时，假设 $x=0$ 是 (5.1.3) 局部渐近稳定的平衡点，即 $x=0$ 是下面方程在 $\lambda=0$ 的附近的局部渐近稳定平衡点

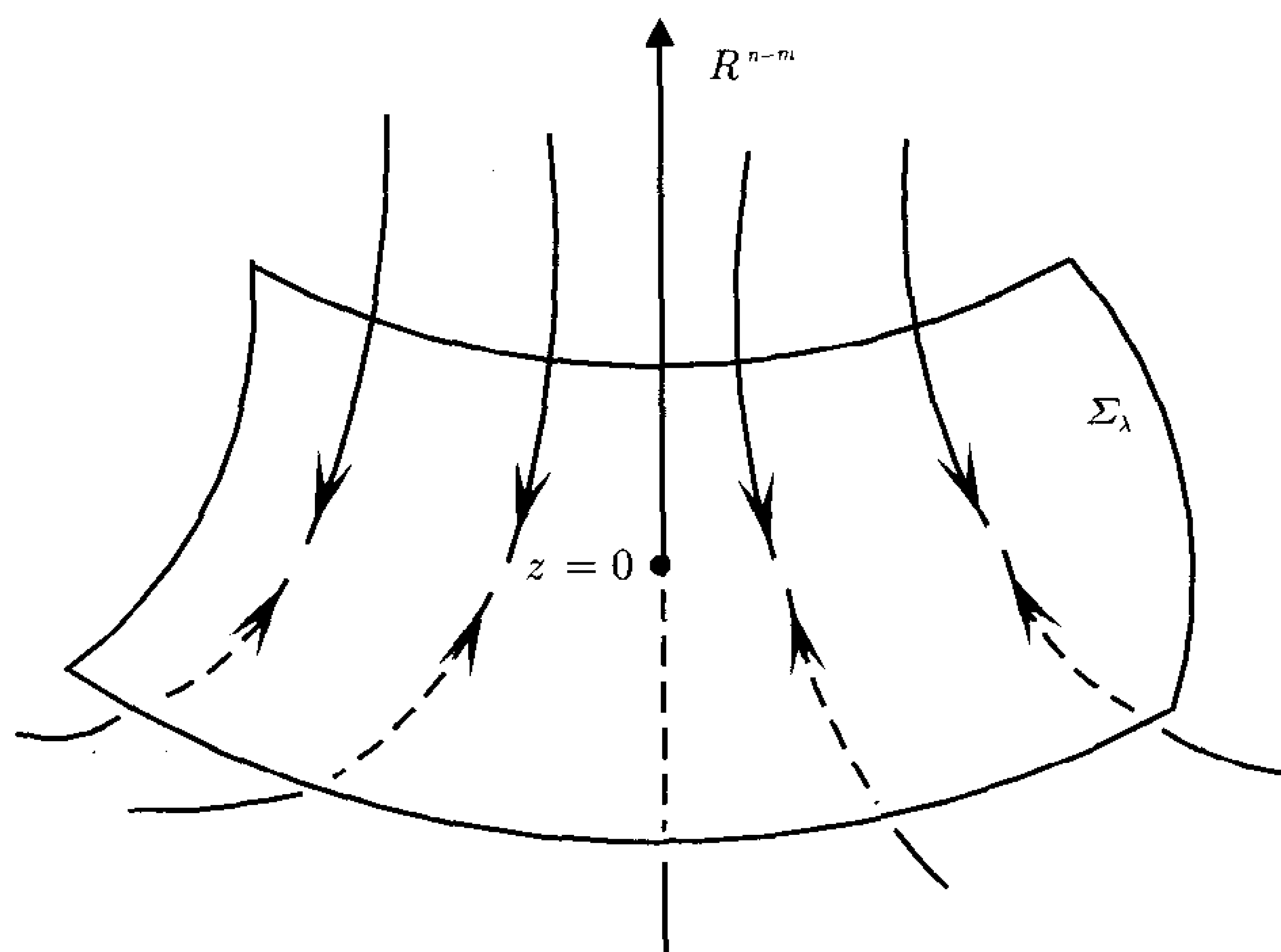


图 5.1 在 z=0 点附近的中心流形 Σ_λ

$$\frac{dx}{dt}=G_1(x,h(x,\lambda)). \tag{5.1.5}$$

那么，当 $\lambda>0$ 充分小时，(5.1.3) 的流是 (5.1.5) 的流与下面线性系统流的叠加

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x, \quad \lambda 0. \tag{5.1.6}$$

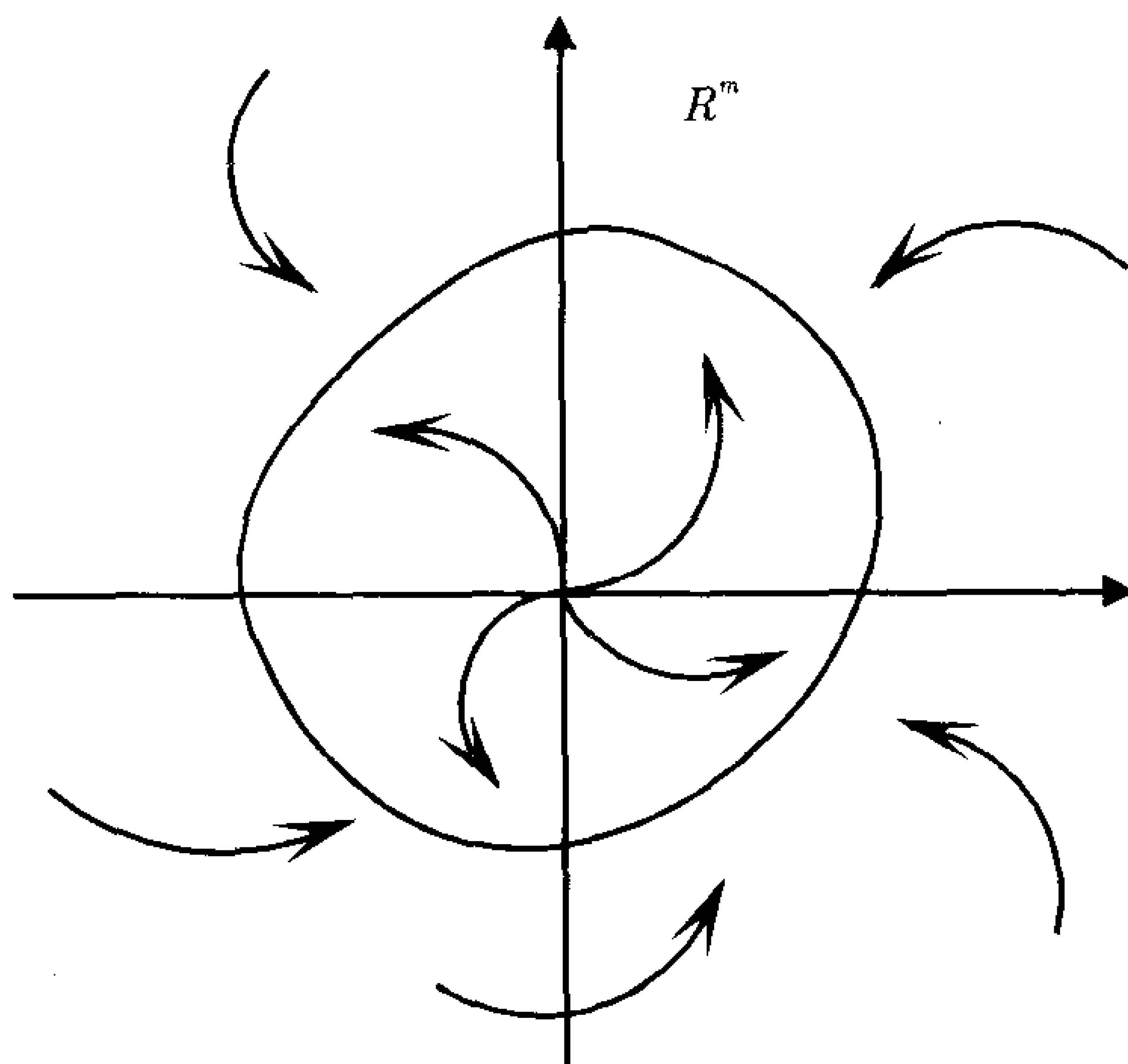


图 5.2

系统 (5.1.6) 的流是从 $x=0$ 朝外流出的，而 (5.1.5) 的流由假设是从外流入 $x=0$ 的. 靠近 $x=0$ 处线性项 λx 起决定性作用，而在远离 $x=0$ 处非线性高

阶项 G_1 控制了流的结构. 这样, 朝外的流与朝内的流在 $x=0$ 的附近挤出一个 R^m 中类似球面的吸引子, 并且这个吸引子当 $\lambda\to 0^+$ 时收缩到 $x=0$ 点, 如图 5.2 所示. 这就是下面要介绍的吸引子分歧理论的基本原理.

§5.1.2 主要定理

考虑下面有限维系统的动态分歧

$$\frac{dx}{dt}=A_\lambda x+G(x,\lambda),\quad \lambda\in R,\quad x\in R^n,\quad n\geqslant 1, \tag{5.1.7}$$

其中 $G(\cdot,\lambda):R^n\to R^n$ 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 的, 连续依赖于 $\lambda\in R^1$, 并且在 $x=0$ 邻域为高阶项

$$G(x,\lambda)=o(|x|),\quad \forall\lambda\in R^1. \tag{5.1.8}$$

算子 A_λ 是一个 $n\times n$ 阶矩阵

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}(\lambda)$ 是 λ 的连续函数.

令 A_λ 的所有特征值 (计 λ 重数) 由下面给出

$$\beta_\lambda(\lambda),\cdots,\beta_n(\lambda).$$

这些特征值 $\beta_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant n)$ 关于 λ 是连续的.

定义 5.1 下面给出的是关于方程 (5.1.7) 动态分歧一些基本概念的定义. 它也适用于一般非线性演化方程.

(1) 称系统 (5.1.7) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出一个不变集 Ω_λ, 如果有 (5.1.7) 的一个不变集序列 $\{\Omega_{\lambda_n}\}$, 使得 $0\notin\Omega_{\lambda_n}$, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda_0,$$

$$\lim_{n\to\infty}d(\Omega_{\lambda_n},0)=\lim_{n\to\infty}\max_{x\in\Omega_{\lambda_n}}\|x\|=0.$$

(2) 如果这个分歧出的不变集 Ω_λ 是系统 (5.1.7) 的一个吸引子, 则称其为一个吸引子分歧.

(3) 如果 (5.1.7) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出的吸引子 Ω_λ 与 m 维球面 S^m 有相同的同调群, 则称 (5.1.7) 从 $(0,\lambda_0)$ 处有一个 S^m 吸引子分歧, 并称 Ω_λ 为分歧出的 m 维同调球, 特别地若 Ω_λ 与球面 S^m 同胚, 则称 Ω_λ 为分歧出的 S^m 球面吸引子.

现在对方程 (5.1.7) 的特征值作如下假设

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases}<0, & 若\lambda<\lambda_0,\\ =0, & 若\lambda=\lambda_0, \quad 当1\leqslant i\leqslant m,\\ >0, & 若\lambda>\lambda_0,\end{cases} \tag{5.1.9}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)<0, \quad 当m+1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.1.10}$$

A_λ 在 λ_0 的特征空间由下式给出

$$E_0=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in R^n|\ \ (A_{\lambda_0}-\beta_i(\lambda_0))^k x=0\}.$$

知道, $\dim E_0=m$.

这一节的主要结果就是下面给出的关于有限维系统 (5.1.7) 的 S^m 吸引子分歧定理.

定理 5.1 假设条件 (5.1.8)~(5.1.10) 成立, 并且 $x=0$ 是 (5.1.7) 在 $\lambda=\lambda_0$ 处局部渐近稳定的平衡点, 那么下面结论成立.

(1) 方程 (5.1.7) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出一个吸引子 Ω_λ 在 $\lambda>\lambda_0$ 一侧, 其维数为 $m-1\leqslant \dim\Omega_\lambda\leqslant m$. 当 $m\geqslant 2$ 时, Ω_λ 是连通的;

(2) 存在 $x=0$ 的一个邻域 $U\subset R^m$, 使得 Ω_λ 吸引 $U\setminus\Gamma$, 这里 Γ 为 $x=0$ 的稳定流形其维数为 $\dim\Gamma=n-m$;

(3) 分歧出的吸引子 Ω_λ 是一个 $(m-1)$ 维同调球, 更精确地说, $\Omega_\lambda=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k$, 其中 M_k 为 m 维环形流形且 $M_{k+1}\subset M_k$. 特别地, 若 Ω_λ 为有限单复形, 则 Ω_λ 是 m 维环形流形的形变收缩, 即 Ω_λ 与球面 S^{m-1} 同伦型;

(4) 对任何 $x_\lambda\in\Omega_\lambda, x_\lambda$ 能够表达为

$$x_\lambda=z_\lambda+o(|z_\lambda|), \quad z_\lambda\in E_0;$$

(5) 若 (5.1.7) 在 Ω_λ 中的奇点数是有限的, 那么有如下的指标公式

$$\sum_{x\in\Omega_\lambda}\mathrm{ind}(-(A_\lambda+G),x)=\begin{cases}2, & 当m=奇数,\\ 0, & 当m=偶数.\end{cases}$$

定理 5.2 假设 (5.1.8)~(5.1.10) 成立, 如果 $x=0$ 是 (5.1.7) 的全局渐近稳定平衡点, 则对任何有界开集 $U\subset R^m$, 存在一个 $\varepsilon>0$, 使当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$, 方程 (5.1.7) 从 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的吸引子 Ω_λ 吸引 $U\setminus\Gamma$, 其中 Γ 为 $x=0$ 的稳定流形. 特别地, 若在 $\lambda=\lambda_0$ 附近 (5.1.7) 有一个全局吸引子, 则 Ω_λ 吸引 $R^m\setminus\Gamma$.

注 5.1　定理 5.1 可以将经典的 Krasnoselskii 定理与 Hopf 分歧定理统一在一个框架下来理解. 当 $m=$ 奇数时, 方程 (5.1.7) 分歧出的吸引子 Ω_λ 中一定含有向量场 $A_\lambda + G$ 的奇点 (由指标公式), 这就是 Krasnoselskii 分歧定理. 而当 $m = 2, \beta_1(\lambda_0) = \bar{\beta}_2(\lambda) = i$ 为虚数时, Ω_λ 中一定含有 (5.1.7) 的周期轨道, 这就是 Hopf 分歧定理.

注 5.2　定理 5.1 和 5.2 与传统的分歧理论一个重要的区别在于吸引子分歧理论的结果自然地包含了分歧解的稳定性及吸引区域, 而这一点在物理、化学、生物及工程中出现的分歧问题中是非常重要并且是困难的课题. 另一个重要的区别在于吸引子分歧定理的条件简单和自然, 它们不需要判定特征值的奇偶性及实数与复数的区别. 正是由于这两个特点, 使得吸引子分歧理论能够帮助我们解决和理解流体动力学中一些重要问题, 如 Rayleigh-Benard 对流问题, Taylor 问题等的稳定性与跃迁现象, 详见第八章, 同时, 又能在超导与相变理论中发现一些新的物理性质 (见第七、八章), 虽然这些性质有待物理实验的进一步检验. 而上述这些问题若应用传统的分歧理论则会遇到根本性的困难.

注 5.3　一般来讲, 在定理 5.2 中的吸引子 Ω_λ, 如果不加全局吸引子存在性条件, 并不是全局的, 也就是说, Ω_λ 不能吸引 $R^n \setminus \Gamma$. 例如下面系统

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - x^3(1 - e^{-\frac{1}{x^4}}), \quad x \in R^1 \tag{5.1.11}$$

满足定理 5.2 的条件在 $\lambda_0 = 0$. 然后对任何 $\lambda > 0$ 充分小, 方程 (5.1.11) 除了分歧出两个奇点 $\Omega_\lambda = \{x_1, x_2\}(x_{1,2} \sim \pm\lambda^{\frac{1}{2}})$ 外, 从无穷远 $(x, \lambda) = (+\infty, \lambda)$ 处也分歧出两个奇点 $x^*_{1,2} \simeq \pm\lambda^{-\frac{1}{2}}$. 因而 Ω_λ 并不吸引 $R^1 \setminus \{0\}$.

§5.1.3　吸引子的稳定性

为了证明吸引子分歧定理, 首先介绍一个吸引子的稳定性定理. 该定理不仅在定理 5.1~5.2 的证明中起到关键作用, 而且在第六章将介绍的无穷维系统的摄动稳定性定理的证明中也是如此. 这个定理也是定理 3.5 的一个补充, 在那里吸引子的存在性是作为假设给出的.

在给出吸引子稳定性定理之前, 先从一个技术性的引理开始, 该引理是关于向量场延拓轨道的稳定性.

令 $U \subset R^n$ 是一个有界开集, $v \in C^r(U, R^n)$ 为一个向量场. 一个曲线 $r \subset V$ 被称为是 v 的一个延拓轨道, 如果 r 是若干曲线的和集

$$r = \bigcup_{i=1} r_i,$$

使得 r_i 或者是 v 的一个轨道, 或者 r_i 是由 v 的奇点构成, 并且若 r_i 及 r_{i+1} 是 v 的轨道, 则 r_i 的极限集是 r_{i+1} 的 α 极限集,

$$\omega(x) = \alpha(y), \quad \forall x \in r_i, \quad y \in r_{i+1}.$$

也就是说 r_i 的两个端点都是 v 的奇点，而且 r_{i+1} 的起始端点就是 r_i 的终结端点，如图 5.3 所示.

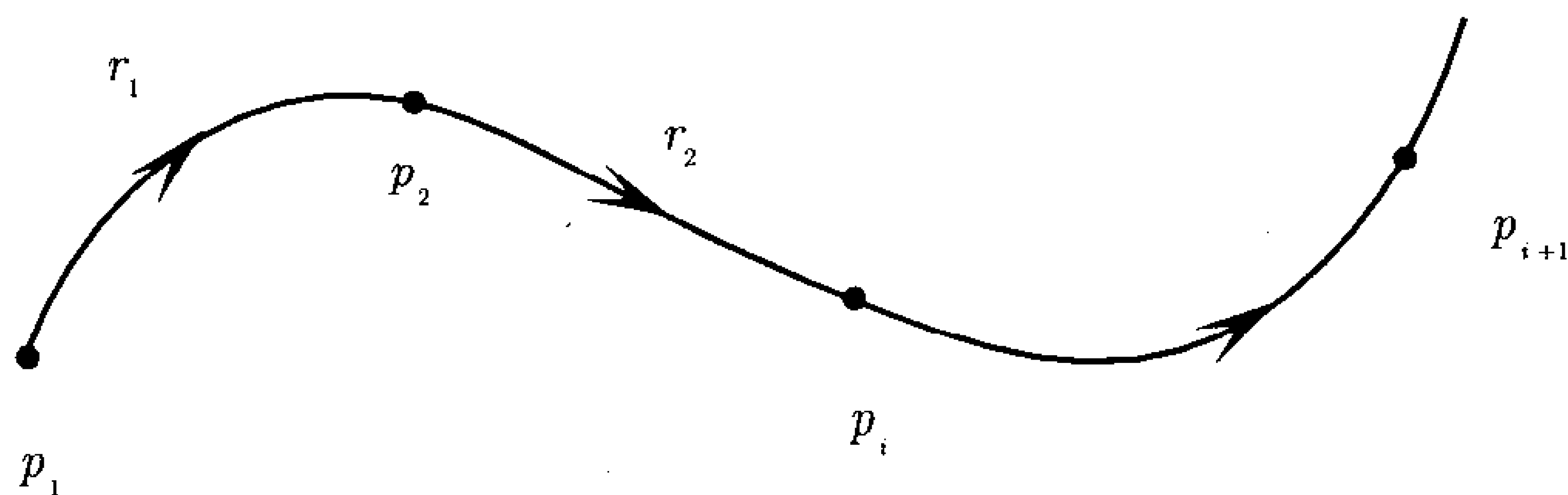


图 5.3

然后，有下面延拓轨道的稳定性引理.

引理 5.1 令 $v_k \in C^r(U, R^n)(r \geqslant 1)$ 是一个向量场序列，有极限 $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v_0$. 假设 $L_k \subset U$ 是 v_k 的一个延拓轨道，$\{L_k\}$ 有一致有界长度，并且 L_k 的起始点 p_1^k 收敛到 p_1，那么 L_k 收敛到 v_0 的一个以 p_1 为起始点的延拓轨道 L.

证明 显然，如果 q_k 是 v_k 的一个奇点并且 $q_k \to q_0(k\to\infty)$，则 q_0 一定是 v_0 的一个起点. 因为 $\{L_k\}$ 有一致有界的长度，因而只需对这种情况进行证明，即每个 L_k 是 v_k 的一个轨道，其端点 p_1^k 和 q^k 为奇点. 那么 L_k 是 v_k 的一个完备的轨道 $x_k(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k(t)}{dt} = v_k(x_k), \\ x_k(t) \to p_1^k, \qquad t\to -\infty, \\ x_k(t) \to q^k, \qquad k \to +\infty. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

如果定义

$$x_k(-\infty) = p_1^k, \quad x_k(+\infty) = q^k,$$

那么闭线段 L_k 被参数化为 $\{x_k(t) | t \in [-\infty, +\infty]\}$.

为了避免无穷区间，令 $t = \mathrm{tg}\tau$. 那么对新变量 τ，方程 (5.1.12) 等价为如下方程

$$x_k(\mathrm{tg}\tau) = p_1^k + \int_{-\pi/2}^{\tau} v_k(x_k)\frac{d\mathrm{tg}\tau}{d\tau}d\tau. \tag{5.1.13}$$

从 (5.1.13) 可得到

$$\begin{aligned} |x_k(\mathrm{tg}\tau_2) - x_k(\mathrm{tg}\tau_1)| &= \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} v_k(x_k)\frac{d\mathrm{tg}\tau}{d\tau}d\tau\right| \\ &\leqslant \int_{\mathrm{tg}^{-1}t_1}^{\mathrm{tg}^{-1}t_2} |v_k(x_k(t))|dt \quad (t_i = \mathrm{tg}\tau_i) \\ &\leqslant C|\mathrm{tg}^{-1}t_2 - \mathrm{tg}^{-1}t_1| \end{aligned}$$

$$\leqslant C|\tau_2 - \tau_1|.$$

即 $x_k(\text{tg}) : [-\pi/2, \pi/2] \to R^n$ 是等度连续的. 因而由 Arzela-Ascoli 定理, 存在 x_k 的收敛子列, 仍记为 x_k, 使得

$$\begin{cases} x_k(\text{tg}\tau) \to x_0(\text{tg}\tau)\text{在}C\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], & \text{当}k \to \infty, \\ x_0\left(\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = p_1, & x_0\left(\text{tg}\dfrac{\pi}{2}\right) = q. \end{cases} \tag{5.1.14}$$

由 $v_k \to v_0$, 在 $C^r(U, R^n)$ 中, 从 (5.1.13) 和 (5.1.14) 可推知

$$x_0(t) = p_1 + \int_{-\infty}^{t} v_0(x_0)dt.$$

因此有

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} = v_0(x_0), & \forall t \in (-\infty, +\infty), \\ x_0(t) \to p_1, & t \to \infty. \end{cases}$$

这样, 就证明了 L_k 收敛到 v_0 的一个从 p_1 出发的延拓轨道 $L_0 = \{x_0(t)|t \in [-\infty, +\infty)\}$. 引理证毕.

注 5.4 延拓轨道稳定性引理在向量场的轨道分析中是非常有用的, 它在处理流体动力学一些问题中是一个基本工具, 例如流体流的边界层分离、内部分离、以及 Taylor 漩涡的结构演化等问题, 可参见 [24,25,62,63,65,66].

现在陈述和证明吸引子稳定性定理.

定理 5.3 令 $v_k \in C^r(U, R^n)(r \geqslant 1)$ 是一向量场序列, 使得 $\lim_{k\to\infty} v_k = v_0 \in C^r(U, R^n)$. 如果 $\Sigma_0 \subset U$ 是 v_0 的一个吸引子, $D \subset U$ 是 Σ_0 的一个吸引域, 那么下面结论成立:

(1) 对每个充分大的 k, v_k 有一个吸引子 $\sum_k \subset D$, 并且

$$\lim_{k\to\infty} d(\Sigma_n, \Sigma_0) = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_k} \text{dist}(x, \Sigma_0) = 0;$$

(2) 对任何有界开集 $O \subset D$, 存在一个 N 充分大, 使得对任何 $k > N, O$ 是在 Σ_k 的吸引域内.

证明 令 $D_0 \subset\subset D$ 是一个有界开集并且 $\Sigma_0 \subset D_0$. 那么 v_0 关于 D_0 的 ω 极限集就是 v_0 的吸引子 Σ_0, 即

$$\Sigma_0 = \omega(D_0). \tag{5.1.15}$$

为了完成该定理的证明, 由定理 3.4 和 3.5, 只需证明

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} d(\omega_k(D_0), \Sigma_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in\omega_k(D_0)} \text{dist}(x, \Sigma_0) = 0, \\ \omega_k(D_0) = \cap_{\tau>0}\overline{\cup_{t\geqslant\tau} S_k(t)D_0}, \end{cases} \tag{5.1.16}$$

其中 $S_k(t)$ 是由 v_k 生成的算子半群.

$\omega_k(D_0)$ 是 v_k 的一个不变集，如果 (5.1.16) 不成立，那么下面两种情况至少一个将发生:

(i) 存在一个数 $\delta > 0$ 及点 $p_k \in \omega_k(D_0)$, 使得 $p_k \to p_0 \in \Sigma_0(k \to \infty)$, 并且 v_k 的以 p_k 为起点的延拓轨道 $\Gamma_k \subset \omega_k(D_0)$, 其弧长有界，满足

$$d(\Gamma_k, \Sigma_0) = \sup_{x\in\Gamma_k} \text{dist}(x, \Sigma_0) > \delta; \tag{5.1.17}$$

(ii) 存在 v_k 的延拓轨道 $\Gamma_k \subset \omega_k(D_0)$ 及一个数 $\delta > 0$, 使得

$$\inf_{x\in\Gamma_k} \inf_{y\in\Sigma_0} |x - y| > \delta, \quad \forall k > N. \tag{5.1.18}$$

对于情况 (i), 由引理 5.1, 这些延拓轨道 Γ_k 收敛到 v_0 的一个以 $p_0 \in \Sigma_0$ 为起始点的延拓轨道 Γ_0:

$$\Gamma_k \to \Gamma_0(k \to \infty). \tag{5.1.19}$$

然后从 (5.1.17) 和 (5.1.19) 可推知

$$d(\Gamma_0, \Sigma_0) = \sup_{x\in\Gamma_0} \text{dist}(x, \Sigma_0) \geqslant \delta > 0. \tag{5.1.20}$$

在另一方面， Σ_0 是 v_0 的一个不变集. 因此 $\Gamma_0 \subset \Sigma_0$, 此与 (5.1.20) 相矛盾，因而情况 (i) 不会发生.

如果情况 (ii) 发生，那么由 ω 极限集的定义，从 (5.1.15) 和 (5.1.18) 可推知，存在一个数 $\delta_1 > 0$ 及点到 $p_k \in D_0, p_k \to p_0 \in D_0(k \to \infty)$, 使得 v_k 的以 p_k 为初值的轨道 $x_k(t, p_k)(x_k(0, p_k) = p_k)$ 满足

$$\text{dist}(x_k(t, p_k), \Sigma_0) > \delta_1, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.1.21}$$

由引理 5.1, 从 (5.1.21) 可推出, v_0 以 $p_0 \in D_0$ 为初值延拓轨道 $x_0(t, p_0)$ 满足

$$\text{dist}(x_0(t, p_0), \Sigma_0) \geqslant \delta_1 > 0, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{5.1.22}$$

这个不等式对所有 $t \in [0, \infty)$ 都成立是归于这个事实，即对任何时刻 $T > 0, x_k(t)$ 的弧长

$$l_k(T) = \int_0^T |v_k(t)| dt$$

是独立于 k 而一致有界的.

不等式 (5.1.22) 是与 (5.1.15) 相矛盾的. 因此 (5.1.16) 成立. 定理证毕.

§5.1.4　主要定理的证明

容易看出，定理 5.2 是定理 5.1 和 5.3 的推论，因此只需证明定理 5.1 即可. 分下面几步进行证明.

第一步. 中心流形约化. 由条件 (5.1.9) 和 (5.1.10), 根据谱定理 (定理 4.3), 在一个适当的坐标系下方程 (5.1.7) 能够被分解成如下形式

$$\frac{dx}{dt} = J_\lambda^1 x + G_1(x,y,\lambda), \quad x \in E_1 = R^m, \tag{5.1.23}$$

$$\frac{dy}{dt} = J_\lambda^2 y + G_2(x,y,\lambda), \quad y \in E_2 = R^{n-m}, \tag{5.1.24}$$

其中 J_λ^1 和 J_λ^2 分别对应于特征值 $\beta_i(\lambda)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 和 $\beta_j(\lambda)(m+1 \leqslant j \leqslant n)$ 的 Jordan 矩阵， E_1 和 E_2 分别为 J_λ^1 和 J_λ^2 的特征向量空间， $G_i(x,y) = P_iG(x,y), P_i : R^n \to E_i$ 为规范投影， $i = 1,2$.

在 (5.1.9) 和 (5.1.10) 条件下，由中心流形定理 2.21, 方程 (5.1.7) 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近有一个中心流形函数

$$\begin{cases} y = h(x,\lambda), \quad x \in E_1, \qquad y \in E_2, \\ h(x,\lambda) = o(|x|), \end{cases} \tag{5.1.25}$$

使得方程 (5.1.23) 和 (5.1.24) 在 $((x,y),\lambda) = (0,\lambda_0)$ 的吸引子分歧问题等价于下面方程的吸引子分歧

$$\frac{dx}{dt} = J_\lambda^1 x + G_1(x,h(x,\lambda),\lambda). \tag{5.1.26}$$

由条件 (5.1.8), 从 (5.1.25) 可得

$$G_1(x,h(x,\lambda),\lambda) = o(|x|).$$

为了简单，假设在 (5.1.9) 中的 $\lambda_0 = 0$, 即 J_λ^1 的特征值在 $\lambda_0 = 0$ 的邻域内满足

$$\text{Re}\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & 当\lambda < 0, \\ = 0, & 当\lambda = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m. \\ > 0, & 当\lambda > 0, \end{cases} \tag{5.1.27}$$

第二步. 结论 (1)~(2) 的证明. 考虑方程 (5.1.26). 令

$$v_\lambda(z) = J_\lambda^1 z + G_1(z,h(z,\lambda),\lambda),$$

由假设， $x = 0$ 是 (5.1.7) 在 $\lambda_0 = 0$ 的局部渐近稳定平衡点. 因而 $z = 0$ 是 $v_0(z)$ 的一个局部吸引子.

由定理 5.3, 存在常数 $r>0$ 和 $\lambda_1>0$, 使得对所有 $0\leqslant\lambda<\lambda_1$, 集合 $B_r=\{x\in R^m||x|<r\}$ 是 v_λ 的一个吸收集, 并且 B_r 的 ω 极限集

$$\mathcal{A}_\lambda=\omega_\lambda(B_r)\subset B_r,\quad \forall 0<\lambda<\lambda_1 \tag{5.1.28}$$

是 v_λ 在某个开集 $D\subset R^m(\bar{B}_r\subset D)$ 中的吸引子, D 为 $\mathcal{A}_\lambda$ 的吸引域.

此外, 由稳定流形定理 (定理 2.20) 和条件 (5.1.27), v_λ 的不稳定流形 W_λ^u 对所有 $0<\lambda<\lambda_1$ 在 R^m 中含有一个 $x=0$ 的开邻域. 从 (5.1.28) 看到

$$W_\lambda^u\subset\mathcal{A}_\lambda\subset B_r,\quad \forall 0<\lambda<\lambda_1.$$

由不稳定流形的定义得

$$\mathcal{A}_\lambda/W_\lambda^u\subset D\subset R^m\text{是 (5.1.26) 在}D/\{0\}\text{中的吸引子}.$$

这就意味着

$$\begin{cases}\Omega_\lambda\text{是 (5.1.7) 的一个吸引子},\\ m-1\leqslant\dim\Omega_\lambda\leqslant m,\quad 0\notin\Omega_\lambda,\\ \lim\limits_{\lambda\to0^+}d(\Omega_\lambda,0)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\sup\limits_{x\in\Omega_\lambda}|x|=0,\end{cases} \tag{5.1.29}$$

其中 Ω_λ 被定义为

$$\Omega_\lambda=\{(x,y)\in R^n|\ \ x\in\mathcal{A}_\lambda W_\lambda^u,y=h(x,\lambda)\},$$

$h(x,\lambda)$ 是由 (5.1.25) 给出的中心流形函数. 在 (5.1.29) 中 $m-1\leqslant\dim\Omega_\lambda$ 是从文献 [34] 中的 P.46 中推论 2 导出. 因而结论 (1) 得证.

因为 $\mathcal{A}_\lambda/W_\lambda^u$ 吸引 $D/\{0\}$, 再由中心流形定理 (定理 2.21) 可知, 存在 $x=0$ 在 R^n 的一个开区域 $U\subset R^n$, 使得由 (5.1.29) 所定的吸引子 Ω_λ 吸引 $U/\Gamma,\Gamma$ 为 $x=0$ 在 R^n 中的稳定流形, 其维数为 $\dim\Gamma=n-m$. 结论 (2) 得证.

第三步. 结论 (3) 的证明. 令 $\varSigma_\lambda=\mathcal{A}_\lambda/W_\lambda^u$ 是 (5.1.26) 在 $D/\{0\}$ 中的吸引子. 显然, 存在一个 $r_\lambda>0$ 充分小, 使得圆盘 $\bar{B}_{r_\lambda}\subset W_\lambda^u$, 并且环形域 $R_\lambda=B_r/\bar{B}_{r_\lambda}$ 在 $D/\{0\}$ 中是一个吸收集. 因此, 由定理 3.4, (5.1.26) 在 $D/\{0\}$ 中的吸引子 $\varSigma_\lambda$ 由下式给出

$$\varSigma_\lambda=\cap_{\tau\geqslant0}\overline{\cup_{t\geqslant\tau}S_\lambda(t)R_\lambda}, \tag{5.1.30}$$

其中 $S_\lambda(t)$ 是由 (5.1.26) 生成的算子半群.

因为 $\varSigma_\lambda\subset R_\lambda$ 在算子半群 $S_\lambda(t)$ 的作用下是不变的, 因而对任何 $t_0\geqslant0$, 有

$$\varSigma_\lambda\subset\overline{S_\lambda(t_0)R_\lambda}. \tag{5.1.31}$$

从 (5.1.30) 和 (5.1.31) 可推知有一个时间序列 $\{t_n\}$ 满足 $t_{n+1} > t_n > 0$, 并且 $t_n \to \infty (n \to \infty)$, 使得

$$\begin{cases} \overline{S_\lambda(t_{n+1})R_\lambda} \subset \overline{S_\lambda(t_n)R_\lambda}, \\ \Sigma_\lambda = \lim_{n\to\infty} \overline{S_\lambda(t_n)R_\lambda} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{S_\lambda(t_n)R_\lambda}. \end{cases}$$

$\overline{S_\lambda(t)R_\lambda}$ 是同胚于一个 m 维环形带边流形. 因此 Ω_λ 是一个 m 维环形流形序列 $\{M_n\}$ 的极限. 而 M_n 与 $(m-1)$ 维球面 S^{m-1} 有相同的同调群. 因而 Ω_λ 是一个 $(m-1)$ 维的同调球.

假设 Σ_λ 是一个有限单复形, 将证明 Σ_λ 是一个 m 维环形流形的形变收缩. 令 $M \subset R^M$ 是一个 m 维光滑带边流形. 对每一点 $x \in \partial M$, 定义

$$z(x,s) = 点z \in M, z是在x \in \partial M的内法线上，并且从x到z的弧长为s(s \geqslant 0).$$

显然， $z(x,0) = x$.

取一列光滑的 m 维环形流形 $\{M_n\} \subset R_\lambda = B_r/\bar{B}_{r_\lambda}$, 使得

$$\begin{cases} \Sigma_\lambda \subset M_{n+1} \subset M_n \subset R_\lambda, \quad \forall n \geqslant 1, M_n是R_\lambda的形变收缩，并且 \\ \lim_{n\to\infty} M_n = \Sigma_\lambda. \end{cases} \tag{5.1.32}$$

此外， $\{M_n\}$ 具有下面性质:

(i) 对任点 $x \in \partial M_n$, 有一个数 $s_n(x) \geqslant 0$, 使得对所有 $y \in \partial M_n, y \neq 0$, 下面线段与线段 l_y 不相交:

$$l_x = \{z(x,s) | \quad 0 \leqslant s \leqslant s_n(x)\};$$

(ii) 线段 $l_x (x \in \partial M_n)$ 上的点满足

$$z(x,s) \notin M_{n+1}, \quad 0 \leqslant s < s_n(x), \quad 若s_n(x) > 0,$$

$$z(x, s_n(x)) \in \partial M_{n+1}, \quad 若s_n(x) = 0, \quad 即x \in \partial M_n \cap \partial M_{n+1}.$$

这些性质能够通过下面程序获得. 令 $M_1 = R_\lambda$ 沿着它的内法方向收缩，并且适当地依次取截断流形 $M_i (i = 1, 2, \cdots)$.

这样对任何 $x \in \partial M_1$ 定义一个曲线

$$L_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} l_{x_n}, \quad x_1 = x, \quad x_{n+1} = z(x_n, s_n(x_n)).$$

也就是说 L_x 是所有这样线段 l_{x_n} 的和集，其中 l_{x_n} 的端点 x_{n+1} 是 $l_{x_{n+1}}$ 的起点. 因为 Σ_λ 是有限单复形，对任何点 $x \in \partial M_1$, 曲线 L_x 的长度是有限的，否则 Σ_λ 中的单形数不能够有限. 由定义容易看出

$$L_x \cap L_y = \varnothing, \quad \forall x + y, \quad x, y \in \partial M_1.$$

因为 L_x 有有限长度，由 (5.1.32)， $L_x=\cup_{n=1}^{\infty}l_{x_n}$ 的终结点 q_x 满足

$$\lim_{n\to\infty} y_n = q_x \in \Sigma_\lambda, \qquad \forall y_n \in l_{x_n}.$$

另一方面，

$$M_1 = \Sigma_\lambda \cup (\cup_{x\in\partial M_1} L_x),$$

然后，定义一个映射 $H: M_1\times[0,1]\to M_1$ 为

$$H(y,t)=\begin{cases} y, & y\in\Sigma_\lambda, \\ p(y,t), & y\in L_x, \end{cases}$$

其中 $p(y,t)$ 是这样的点 $p\in L_x$, 使得沿着 L_x 从 y 到 p 的弧长为 $tr(y)$,$r(y)$ 为沿着 L_x 从 y 到 q 的弧长. 显然 H 是连续的，并且

$$\begin{aligned} &H(\cdot,0)=id: M_1\to M_1, \\ &H(\cdot,1): M_1\to\Sigma_\lambda, \\ &H\circ i = id:\Sigma_\lambda\to\Sigma_\lambda, \end{aligned}$$

其中 $i:\Sigma_\lambda\to M_1$ 是包含映射. 因此 Σ_λ 是一个 $M_1=R_\lambda$ 的形变收缩. 结论 (3) 得证.

第四步. 结论 (4) 的证明. 由 (5.1.29),(5.1.7) 的吸引子 Ω_λ 是在中心流形 $M_\lambda(0<\lambda<\lambda_1)$ 上，因为特征空间 E_0 在 $x=0$ 点与 M_λ 相切. 这样结论 (4) 成立.

第五步. 结论 (5) 的证明. 由 Brouwer 度理论及条件 (5.1.9) 和 (5.1.10), 在 (5.1.7) 中向量场的拓扑度为

$$\deg(-(A_\lambda+G),B_r,0)=1, \quad \forall\lambda\in(-\lambda_1,\lambda_1), \tag{5.1.33}$$

对某个 $r>0$ 和 $\lambda_1>0$.

因为 Ω_λ 是 (5.1.7) 在 $B_r/\{0\}$ 中的最大吸引子， $A_\lambda+G$ 的所有非零奇点都是在 Ω_λ 中. 有

$$\begin{aligned} \deg(-(A_\lambda+G),B_r,0) = {} & \mathrm{ind}(-(A_\lambda+G),0) \\ & + \Sigma_{x\in\Omega_\lambda}\mathrm{ind}(-(A_\lambda+G),x). \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

此外，由 (5.1.9) 和 (5.1.10), 从指标定理 2.13 可知

$$\mathrm{ind}(-(A_\lambda+G),0)=\begin{cases} 1, & m=\text{偶数}, \\ -1, & m=\text{奇数}, \end{cases} \tag{5.1.35}$$

对 $0<\lambda<\lambda_1$. 因而，结论 (5) 从 (5.1.33)~(5.1.35) 推出.

这样，定理 5.1 的证明被完成.

§5.1.5 分歧吸引子的结构

1. 三叉型分歧

一个有意义的问题就是，在什么条件下定理 5.1 中分歧出的吸引子是同胚一个 $(m-1)$ 维球 S^{m-1}. 最简单的就是 $m=1$ 的情况，这对应于古典的三叉分歧 (pitchfork bifurcation), 并且也是由定理 5.15 给出的对称磁场中摆的例子更一般性的观点.

定理 5.4 在定理 5.1 的条件下，假设 $m=1$, 并且 $G(x,\lambda)$ 在 $x=0$ 处是解析的. 那么存在一个开集 $U\subset R^n, 0\in U$, 使得当 $\lambda>\lambda_0$ 时，方程 (5.1.7) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出严格两个平衡点 $x_1,x_2\in U$, 并且这个开集被分解为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ 满足如下性质：

(1) $\bar{U}=\bar{U}_1^\lambda+\bar{U}_2^\lambda,\quad U_1^\lambda\cap U_2^\lambda=\varnothing$,

(2) $x_i\in U_i^\lambda(i=1,2),\quad 0\in\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda$,

(3) 对任何 $\varphi\in U_i^\lambda(i=1,2)$, 有

$$\lim_{t\to\infty}x(t,\varphi)=x_i,$$

其中 $x(t,\varphi)$ 是 (5.1.7) 满足 $x(0,\varphi)=\varphi$ 的解.

该定理是定理 5.1 和定理 4.11 的推论.

注 5.5 我们不知道是否向量场的解析条件是方程 (5.1.7) 分歧出的吸引子 Ω_λ 同胚于一个 $(m-1)$ 维球面 S^{m-1} 的充分条件.

2. 最小吸引子

显然一个分歧出的吸引子 Ω_λ, 其子集 $\Gamma_\lambda\subset\Omega_\lambda$ 也同样可以是一个吸引子. 含在 Ω_λ 中的最小吸引子 Γ_λ 称为是方程 (5.1.7) 分歧出的最小吸引子. 一般地说，一个分歧出的吸引子 Ω_λ 也许不含有比它自己更小的吸引子，这里我们主要关心最小吸引子存在性问题.

这里总是假设定理 5.1 的条件成立. 如果 (5.1.7) 分歧出的吸引子 Ω_λ 是同胚于一个球面 S^m, 那么为了简单，记它为 $\Omega_\lambda=S^m$.

定理 5.5 假设在 (5.1.9) 中 $m=2$, 方程 (5.1.7) 分歧出的吸引子 $\Omega_\lambda=S^1$, 并且 Ω_λ 中含有奇点，所有奇点是非退化的. 那么下面结论成立：

(1) 在 $\Omega_\lambda=S^1$ 中的奇点数是 $2k$, 对某个 $k\geqslant 1$, 并且有严格 k 个奇点 $\{x_i|1\leqslant i\leqslant k\}\subset\Omega_\lambda$, 使得每个奇点 x_i 都是分歧出来的最小吸引子；

(2) 存在一个开集 $U\subset R^n$, 使得 U 能够分解为 k 个开集 $U_i(1\leqslant i\leqslant k)$, 满足

$$\bar{U}=\sum_{i=1}^k\bar{U}_i,\quad U_i\cap U_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad 0\in\cap_{j=1}^k U_j,$$

并且 $x_i\in U_i$ 吸引 U_i.

证明 因为在 $\Omega_\lambda=S^1$ 上的所有奇点是非奇化的，每个 Ω_λ 中的奇点指

标为 +1 或 −1. 由定理 5.1,

$$\sum_{x\in\Omega_\lambda} \mathrm{ind}(-(A_\lambda+G),x)=0.$$

故 Ω_λ 的奇点一定是偶数 $2k(k\geqslant 1)$, 其中 k 个奇点 $\{x_i|1\leqslant i\leqslant k\}$ 有指标 $+1, k$ 个奇点 $\{y_j|1\leqslant j\leqslant k\}$ 有指标为 −1. 因为 Ω_λ 为吸引子, k 个指标为 1 的奇点 $x_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是吸引子, 而另外 k 个奇点 $y_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是排斥子. 显然 $\{x_i|1\leqslant i\leqslant k\}$ 是 Ω_λ 中最小吸引子, 而 $\{y_i|1\leqslant i\leqslant k\}$ 是 (5.1.7) 的鞍点, 并且每一个鞍点 y_i 有一个 1 维不稳定流形和一个 $(n-1)$ 维流形.

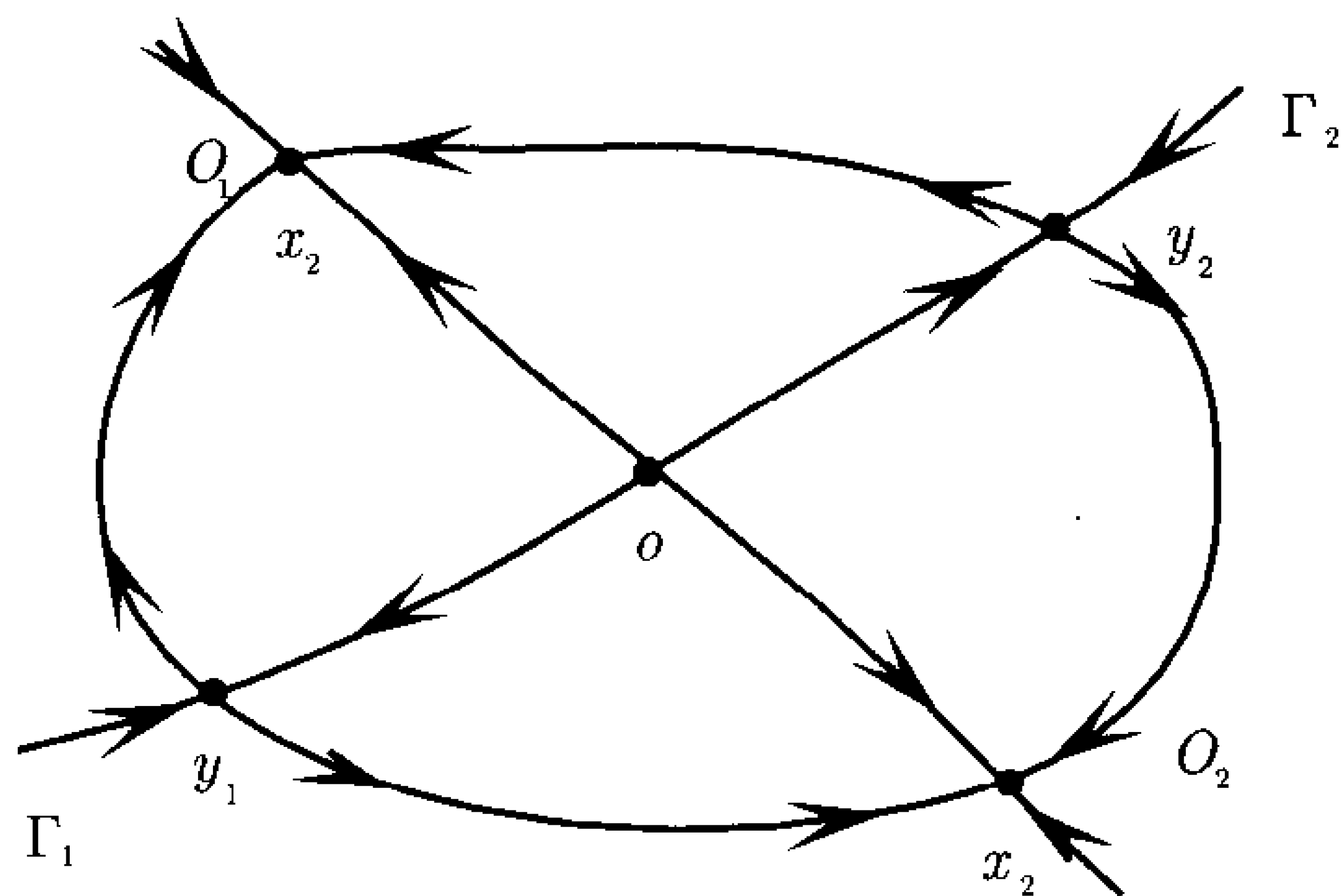


图 5.4

容易看到, 在二维中心流形上存在一个开集 $O, \Omega_\lambda\subset O$, 并且 O 能够被每个鞍点 $y_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的稳定流形分解为 k 个开集 $O_i(1\leqslant i\leqslant k)$, 如图 5.4 所示, 使得下面性质成立:

(i) $\bar{O}=\sum_{i=1}^k \bar{O}_i, O_i\cap O_j=\varnothing(i\neq j), 0\in\cap_{j=1}^k\bar{O}_j$;

(ii) $\cup_{i=1}^k\partial O_i\cap O$ 是由鞍点 $y_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的稳定流形构成, 并且

(iii) $x_i\in O_i$ 吸引 $O_i(1\leqslant i\leqslant k)$.

因而, 开集 $U=\{(x,y)\in R^n|x\in O,|x|+|y|<r\}$ 及 $U_i=\{(x,y)\in R^n|x\in O_i,|x|+|y|<r\}$ 满足定理所述性质, 其中 $r>0$ 为某一常数. 定理证毕.

定理 5.6 假设 (5.1.9) 中 $m=3$. 如果 (5.1.7) 分歧出的吸引子 Ω_λ 中含有严格的两个奇点并且是非退化的, 那么下面两个结论中仅仅有一个成立:

(1) Ω_λ 中含有至少一个周期轨道;

(2) $\Omega_\lambda=S^2$, 其最小吸引子集合是由单个奇点 $x_0\in\Omega_\lambda$ 构成, 并且存在 $x=0$ 的一个邻域 $U\subset R^n, \Omega_\lambda\subset U$, 使得 x_0 吸引 U/Γ, 这里 Γ 是一个维数 $\dim\Gamma=n-2$ 的集合.

特别地, 如果在 (5.1.7) 中的向量场 $A_\lambda+G$ 是奇的, 即 $G(-x,\lambda)=-G(x,\lambda)$, 那么 Ω_λ 一定含有一个周期轨道.

证明 由定理 5.1, Ω_λ 是一列三维环形流形的极限. 因此, Ω_λ 一定含有一个二维不变集 Σ, 在那里 Poincaré-Bendizon 定理是有效的. 因而, 由 Ω_λ 上奇点

的正则性，对任何点 $x \in \Sigma$，x 的 ω 极限集 $\omega(x)$ 不是一个单奇点就是一个周期轨道.

如果 Σ 不含有周期轨道，那么作为一个二维闭同调球，Σ 中所有的点都是 Σ 的内点. 因此 $\Sigma = S^2$. 由假设推知 $\Omega_\lambda = \Sigma = S^2$, 否则，由 Poincaré-Hopf 指标定理，Ω_λ 一定含有多于两个的奇点.

因为 $\Omega_\lambda = S^2$ 含有仅仅两个奇点且都是非退化的，由定理 5.1, 它们的指标都是 +1. 因而这两个奇点在 $\Omega_\lambda = S^2$ 中不是吸引子就是排斥子 (因为 Ω_λ 中不含有周期轨道). 从 Poincaré-Bendixon 定理可推知，这两个奇点中一个是吸引子，而另一个则是排斥子，进一步，这个吸引子，记为 $x_1 \in \Omega_\lambda$, 在 Ω_λ 上吸引 $\Omega_\lambda/\{x_2\}$这里 $x_2 \in \Omega_\lambda$ 为排斥子. 因此这个吸引子 x_1 吸引 $x = 0$ 的一个邻域，除了 x_2 和 $x = 0$ 这两个奇点的稳定流形外. 结论 (1) 和 (2) 得证.

当向量场 $G(x, \lambda)$ 是奇函数时，在 Ω_λ 中的两个奇点有相同的特征值. 因而它们有相同的局部拓扑结构. 由上述结论，这意味着 Ω_λ 一定含有一个周期轨道. 定理证毕.

§5.1.6 广义 Hopf 分歧

现在考虑更一般的动态分歧，即方程 (5.1.7) 的不变集分歧. 令 A_λ 的特征值满足下面性质

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases} < 0 \ \ (\text{或} > 0), & \text{当}\lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \text{当}\lambda = \lambda_0, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant m, \\ > 0 \ \ (\text{或} < 0), & \text{当}\lambda > \lambda_0, \end{cases} \tag{5.1.36}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) \neq 0, \quad \forall m+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5.1.37}$$

如果 $m=$ 奇数，则方程 (5.1.7) 一定从 $(0, \lambda_0)$ 处分歧出一个奇点. 当 $m = 2$ 并且 $\beta_1(\lambda) = \bar{\beta}_2(\lambda)$ 为一对共轭复数，使得 $I_m\beta_1(\lambda_0) \neq 0$, 下面的 Hopf 定理表明，方程 (5.1.7) 从 $(0, \lambda_0)$ 分歧出一个周期轨道. 现在的问题是，仅仅在条件 (5.1.36) 和 (5.1.37) 假设下，方程 (5.1.7) 是否一定从 $(0, \lambda_0)$ 分歧出一个不变集. 在一般情况下，这个结论不成立. 然而仍然能够得到一个广义的 Hopf 分歧观点.

在条件 (5.1.36) 和 (5.1.37) 假设下，(5.1.7) 在 $\lambda = \lambda_0$ 有一个 m 维中心流形

$$M_c^m = \{(x, y) \in R^n | \ x \in \Omega \subset R^m, \quad y = h(x, \lambda_0)\},$$

它是方程 (5.1.7) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的局部不变流形.

称这个中心流形 M_c^m 是稳定的 (或者不稳定的), 如果 M_c^m 的 ω 极限集 (或 α 极限集) 为零点

$$\omega(M_c^m) = \{0\} \quad \text{或}\alpha(M_c^m) = \{0\}.$$

下面给出一般不变集的分歧定理.

定理 5.7 令条件 (5.1.36) 和 (5.1.37) 成立. 如果 (5.1.7) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的中心流形 M_c^m 是稳定的或不稳定的, 那么 (5.1.7) 从 $(0,\lambda_0)$ 处一定分歧出一个不变集 $\Gamma_\lambda(\lambda\neq\lambda_0), m-1\leqslant \dim\Gamma_\lambda\leqslant m$, 而且 Γ_λ 是一个 $(m-1)$ 维同调球. 特别地, 如果 $m=2$, 并且 Γ_λ 不含 (5.1.7) 的奇点, 则 Γ_λ 一定含有一个周期轨道.

当限制在中心流形上时, 定理 5.7 就是定理 5.1 的推论. 因而这里省去定理 5.7 的证明细节.

从定理 5.7 立刻可以得到古典 Hopf 分歧定理.

定理 5.8(Hopf 分歧定理) 假设在条件 (5.1.36) 和 (5.1.37) 中, $m=2$, 并且 $\beta_1(\lambda)=\overline{\beta_2(\lambda)}, I_m\beta_1(\lambda_0)\neq 0$. 那么方程 (5.1.7) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出一个周期轨道.

证明 在该定理的条件下, 方程 (5.1.7) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的中心流形 M_c 一定是下述三种情况之一: (i)M_c 是稳定的; (ii)M_c 是不稳定的; (iii)M_c 含有无穷多个周期轨道. 情况 (iii) 已经意味着周期轨道的分歧. 因而 Hopf 分歧定理可由定理 5.7 推出. 证毕.

下面给出一个例子, 它表明仅仅在条件 (5.1.36) 和 (5.1.37) 假设下, 不变集的分歧可能不发生.

考虑下面给出的二维向量场

$$v=\begin{cases} v_1=\lambda x_1-x_2^3-\lambda^2x_2^3, \\ v_2=\lambda x_2+x_1^3-2x_1x_2^2+\lambda^2x_1^3. \end{cases} \tag{5.1.38}$$

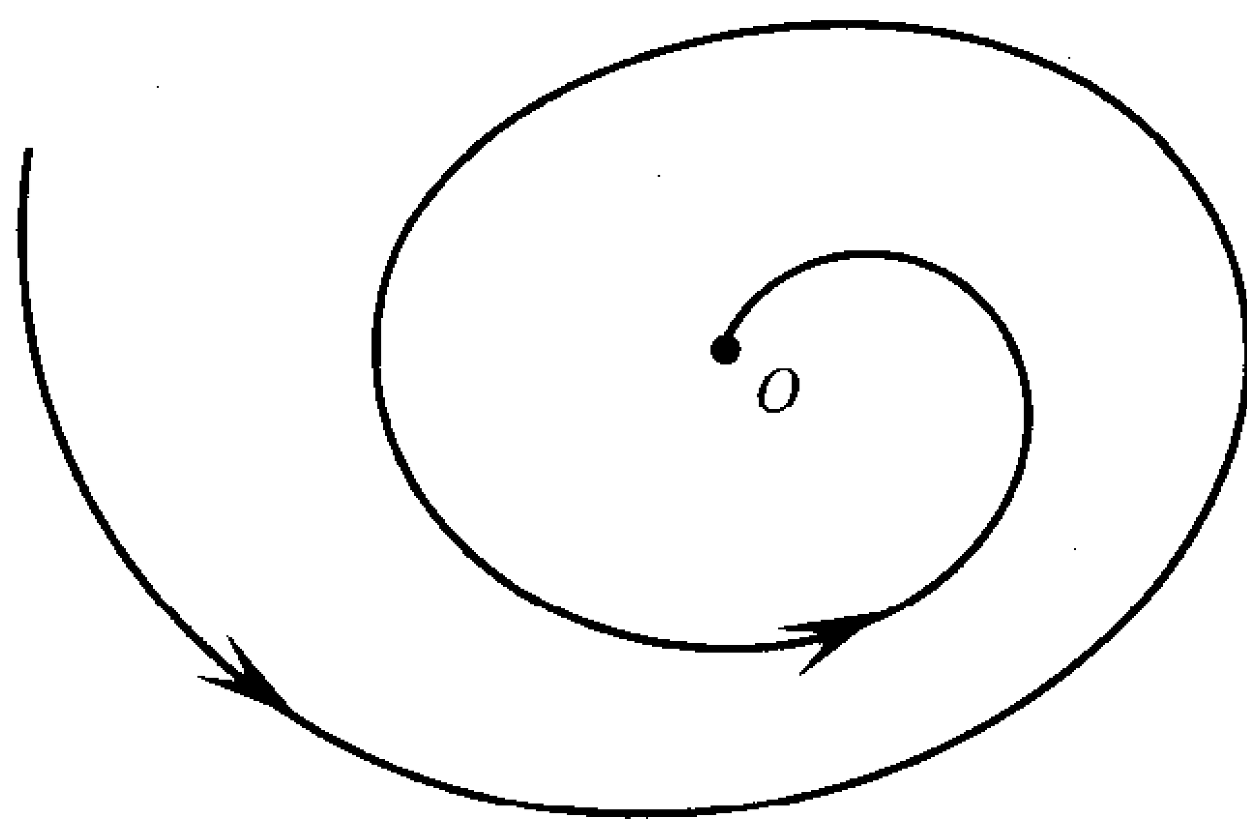
容易看出, 向量场 (5.1.38) 没有奇点从 $(x,\lambda)=(0,0)$ 分歧出来. 实际上, 从 (5.1.38) 可以看到

$$x_2v_1-x_1v_2=-(x_2^2-x_1^2)^2-\lambda^2(x_1^4+x_2^4)<0,$$

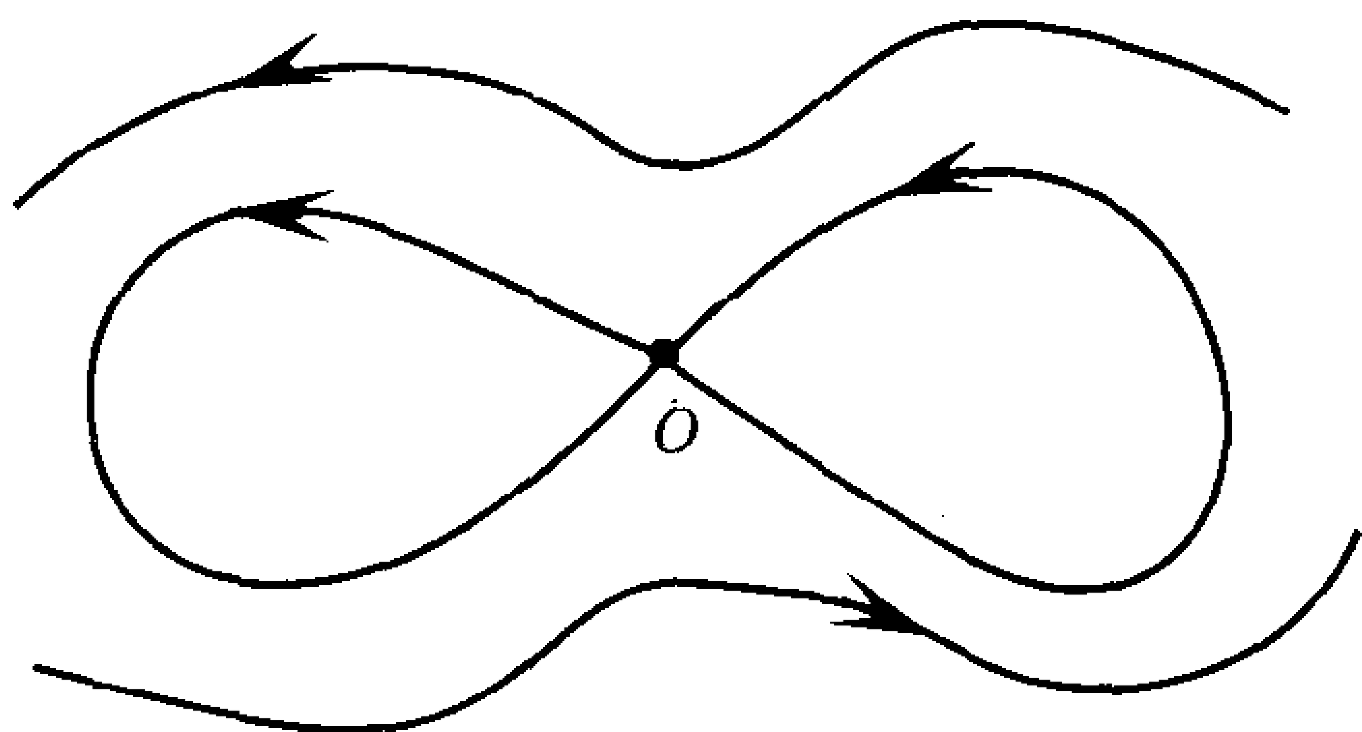
对任何 $(x_1,x_2)\neq 0, \lambda\neq 0$ 成立.

此外, 通过采用极坐标方法可以证明, 向量场 (5.1.38) 没有周期轨道从 (0,0) 点分歧出来.

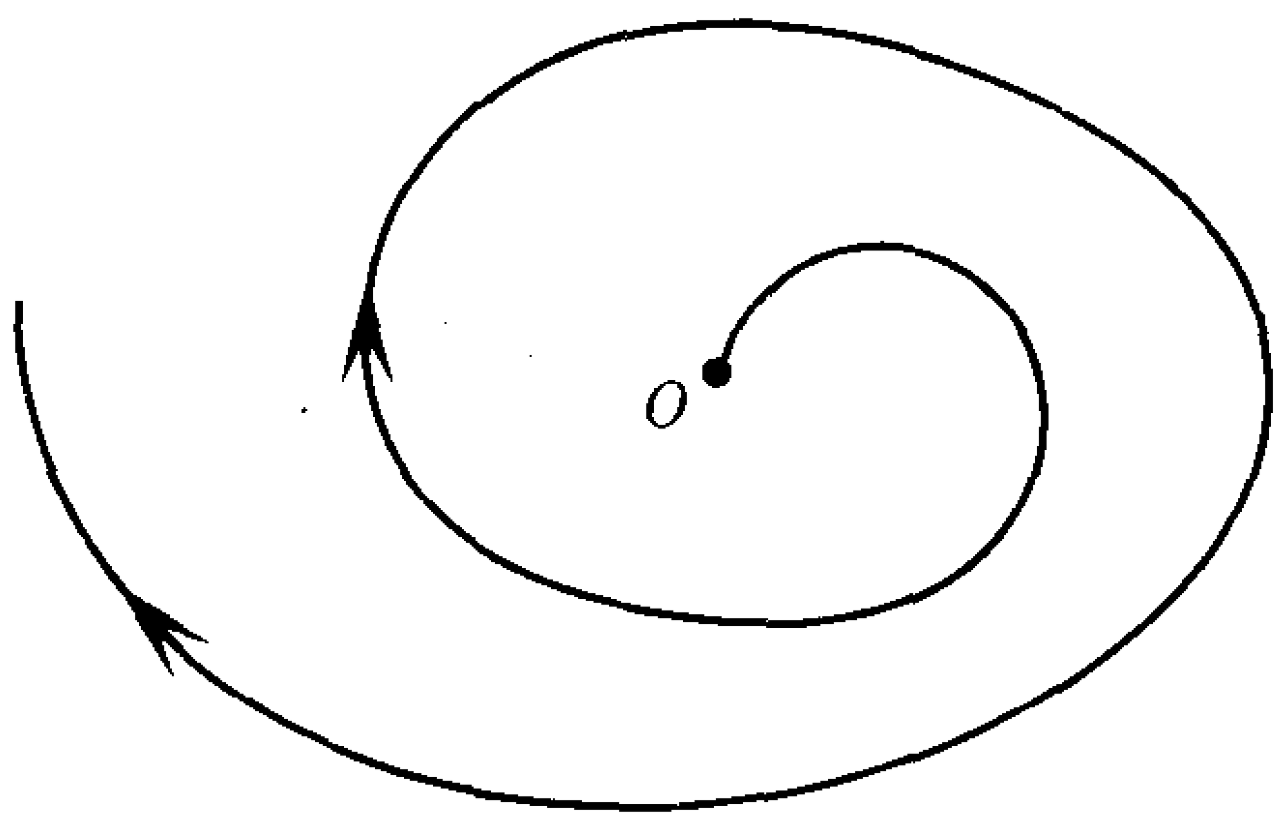
向量场 (5.1.38) 在 $(x,\lambda)=(0,\lambda)$ 的局部拓扑结构如图 5.5(a)~(c) 所示.



(a) $\lambda<0$ 的情况



(b) $\lambda = 0$ 的情况



(c) $\lambda > 0$ 的情况

图 5.5

§5.2 不变闭流形

受到 S^m 吸引子分歧的激发，这一节研究向量场不变闭流形及其稳定性问题. 同时对一类特殊向量场证明其分歧出的吸引子 $\Omega_\lambda = S^1$. 这一结果在后面第七和第八章的应用中是非常有用的.

§5.2.1 双曲不变流形

一个闭流形就是一个无边紧流形. 令 $v \in C^r(\Omega, R^n)(r \geqslant 1)$ 是一个向量场, $\Omega \subset R^n$ 为一开集. 令 $M \subset \Omega$ 是一个 m 维流形， $0 \leqslant m \leqslant n-1$. 在这一节总是假设向量场 v 的不变流形 M 是闭的.

一个点 $x_0 \in M$ 被称为是 $C^r(r \geqslant 1)$ 的，如果存在 x_0 在 M 的一个邻域 $U \subset M$, 使得 U 是 C^r 的. 令 M 是一个向量场 $v \in C^r(M, R^n)$ 的 m 维不变流形, $x \in M$ 是一个 C^1 点. 那么存在 M 在 x 点的一个 $(n-m)$ 维法空间 N_x. 记 v_{N_x} 为 v 在法空间 N_x 上的投影，则称 v_{N_x} 为 v 在 $x \in M$ 点的法向量场， x 为法空间 N_x 的原点.

显然，一个 $C^r(r \geqslant 1)$ 流形 $M \subset \Omega$ 是 $v \in C^r(\Omega, R^n)$ 的不变流形的充要条件是 v 在每一点 $x \in M$ 的法向量场 v_{N_x} 满足

$$v_{N_x}(x) = 0, \quad \forall x \in M. \tag{5.2.1}$$

定义 5.2 令 $v \in C^r(\Omega, R^n)(r \geqslant 1), M \subset \Omega$ 是 v 的一个不变流形. 称 M 是双曲的，如果下面条件成立

(1) M 是 C^r 流形;

(2) 对每一点 $x \in M, v$ 的法向量场 v_{N_x} 在 x 点是正则的，即 v_{N_x} 在 x 点的 Jacobi 矩阵 $Dv_{N_x}(x)$ 是非退化的;

(3) 对所有 $x \in M$, $Dv_{N_x}(x)$ 的特征值实部不为零.

向量场的双曲不变流形是双曲奇点及双曲周期轨的自然推广. 类似于双曲奇点的稳定流形定理，对于一般双曲不变流形也有下面的稳定流形定理.

定理 5.9 令 M 是 $v \in C^r(\Omega, R^n)(r \geqslant 1)$ 的一个 m 维双曲不变流形，那么存在两个唯一的流形 W^u 和 W^s, 称为 M 的不稳定流形和稳定流形，其维数为 $\dim W^u = m + k_1$,$\dim W^s = m + k, k_1 + k_2 = n - m$, 它们能被特征化为

$$W^u = \{x \in R^n | \lim_{t\to\infty} \text{dist}(S(-t)x, M) = 0\},$$

$$W^s = \{x \in R^n | \lim_{t\to\infty} \text{dist}(S(t)x, M) = 0\},$$

其中 $S(t)$ 是由向量场 v 生成的算子半群. 此外，W^u 和 W^s 是 C^r 的并且在 M 上是横截的.

证明 因为 M 是双曲的，由定理 2.20 和 (5.2.1), 对每一点 $x \in M, v$ 的法向量场 v_{N_x}, 有唯一的稳定流形 W_x^s 和不稳定流形 W_x^u, 其维数为

$$\dim W_x^u = k_1, \quad \dim W_x^s = k_2, \quad k_1 + k_2 = n - m.$$

并且 W_x^u 和 W_x^s 是 C^r 的，在 x 点横截相交. 很清楚，下面集合

$$W^u = \cup_{x\in M} W_x^u, \quad W^s = \cup_{x\in M} W_x^s$$

正是该定理所描述的流形. 定理证毕.

一个双曲奇点具有局部结构稳定性的性质. 自然地，也可以相信一个双曲不变流形也应该具有某种意义下稳定性的性质. 这就是我们引入下面关于不变流形 h 稳定性概念的动机.

定义 5.3 令$v \in C^r(\Omega, R^n)(r \geqslant 1)$. 称 v 的一个不变流形 M 是 h 稳定的，如果存在 v 的一个邻域 $O \subset C^r(\Omega, R^n)$, 使对任何 $u \in O$, u 有唯一一个不变流形 M_1, 同胚于 M, 并且

$$d(M_1, M) = \max_{x\in M_1} \text{dist}(x, M) \to 0, \quad 当 u \to v,$$

这里 h 稳定性代表了不变流形在同胚 (homeomorphism) 意义下的稳定性.

一般双曲不变流形不具有局部结构稳定性性质，这是因为一个双曲不变流形 M 可以是由奇点构成，例如一个由奇点构成的球面 $M = S^m(m \geqslant 1)$ 可以是双曲不变的，显然它不是局部结构稳定的.

然而一个双曲不变流形 M 具有 h 稳定性.

定理 5.10 令 M 是向量场 $v \in C^r(\Omega, R^n)(r \geqslant 1)$ 的双曲不变流形，则 M 是 h 稳定的.

证明 令 $\dim M = m$.

第一步. 因为 M 是双曲不变的，对每一点 $x \in M$, 由 (5.2.1), M 在 x 点的横截法空间 N_x 能够分解成两个子空间 E_1 和 E_2 的直和

$$N_x = E_1 \oplus E_2, \quad \dim E_1 = k_1, \quad \dim E_2 = k_2,$$

使得 E_1 和 E_2 是 v 的法向量场 v_{N_x} 的特征空间，并且 v_{N_x} 在 E_1 的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k_1}$ 和在 E_2 上的特征值 $\beta_1, \cdots, \beta_{k_2}$ 满足

$$\mathrm{Re}\lambda_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant k_1), \quad \mathrm{Re}\beta_i < 0, 1 \leqslant i \leqslant k_2. \tag{5.2.2}$$

此外， W_x^u 和 W_x^s 在 x 点分别与 E_1 和 E_2 相切.

由定理 5.9 可以看到，存在一个 M 的管形邻域 $U \subset \Omega$, 使得

$$\begin{cases} \omega(U) \cap U = W^u \cap U, \quad \alpha(U) \cap U = W^s \cap U, \\ M = \omega(U) \cap \alpha(U) \subset U, \end{cases}$$

其中 $\omega(U)$ 和 $\alpha(U)$ 是由 v 生成的 ω 极限集和 α 极限集， W^u 和 W^s 是 M 的不稳定与稳定流形.

第二步. 令 $u \in C^r(\Omega, R^n)$, 且 $\|u - v\| > 0$ 充分小. 那么存在 M 的一个管形邻域 U, 使对任何 $x \in M$, u 的法向量场 u_{N_x} 有一个唯一零点 $z_0 \in U \cap N_x$, 并且 $Du_{N_x}(z_0)$ 的特征值 $\lambda_i(u)(1 \leqslant i \leqslant k_1)$ 和 $\beta_j(u)(1 \leqslant j \leqslant k_2)$ 满足

$$\lambda_i(u) \to \lambda_i, \quad \beta_j(u) \to \beta_j, \quad \text{当} u \to v.$$

由 (5.2.2) 知

$$\mathrm{Re}\lambda_i(u) > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k_1; \quad \mathrm{Re}\beta_j(u) < 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k_2.$$

这样，在 $x \in M$ 的法空间 N_x 上有

$$\begin{cases} \omega_{N_x}(U \cap N_x) \cap U = W_{N_x}^u \cap U, \\ \alpha_{N_x}(U \cap N_x) \cap U = W_{N_x}^s \cap U, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

其中 $\omega_{N_x}(U \cap N_x)$ 和 $\alpha_{N_x}(U \cap N_x)$ 为 u_{N_x} 生成的 ω 极限集和 α 极限集， $W_{N_x}^u$ 与 $W_{N_x}^s$ 为 u_{N_x} 在 z_0 点的不稳定流形和稳定流形，并且

$$\dim W_{N_x}^u = k_1, \quad \dim W_{N_x}^s = k_2. \tag{5.2.4}$$

因此，由 (5.2.3) 和 (5.2.4) 推知

$$\begin{cases} \omega_u(U)\cap U\neq\varnothing, \quad \alpha_u(U)\cap U\neq\varnothing, \\ \dim(\omega_u(U)\cap U)\geqslant m+k_1, \\ \dim(\alpha_u(U)\cap U)\geqslant m+k_2, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

其中 ω_u 和 α_u 是由 u 生成的 ω 极限集和 α 极限集.

第三步. 证明下面等式

$$d(M_1,M)=\sup_{x\in M_1}\text{dist}(x,M)\to 0, \quad 当u\to v, \tag{5.2.6}$$

其中

$$M_1=\omega_u(U)\cap\alpha_u(U)\subset U,$$
$$M=\omega(U)\cap\alpha(U)\subset U.$$

该证明与定理 5.3 的方法是一样的，这里从略.

第四步. 证明 $M_1=\omega_u(U)\cap\alpha_u(U)$ 是同胚于 M 的不变流形. 知道 $M_1\subset U$ 是 u 的不变集，由 (5.2.5),

$$\dim M_1\geqslant m.$$

由 (5.2.6), 对每一点 $x\in M_1$, 存在一个 M_1 在 x 点的一个 $(n-m)$ 维横截空间 $\widetilde{N}_x=R^{n-m}$, 使得 u 在 $\widetilde{N}_x$ 的投影

$$u_{\widetilde{N}_x}(x)=0.$$

此外，当 $u\to v$ 时， $\widetilde{N}_x\to N_x$, 即

$$\text{dist}(\widetilde{N}_x,N_x)=\sup_{z\in\widetilde{N}_x,|z|=1}\text{dist}(z,N_x)\to 0. \tag{5.2.7}$$

若 M_1 与 M 不同胚，则存在 $x\in M_1$, 使得在 $\widetilde{N}_x$ 上，或者 $u_{\widetilde{N}_x}$ 在 $\widetilde{N}_x\cap U$ 中零点不唯一，即

$$u_{\widetilde{N}_x}(x_i)=0, \quad x_i\in\widetilde{N}_x\cap U, \quad i=1,2,\cdots,k, \quad k\geqslant 2. \tag{5.2.8}$$

或者 x 是 $u_{\widetilde{N}_x}$ 唯一零点，但是退化的

$$\begin{cases} u_{\widetilde{N}_x}(x)=0, \\ \det Du_{\widetilde{N}_x}(x)=0. \end{cases} \tag{5.2.9}$$

在另一方面，从 (5.2.7) 及 (5.2.2) 可以推知，当 u 充分逼近 v 时， x 是 $u_{\widetilde{N}_x}$ 在 $\widetilde{N}_x\cap U$ 中唯一零点并且非退化，此与 (5.2.8) 和 (5.2.9) 相矛盾. 因而 M_1 与 M 同胚. 定理证毕.

注 5.6 事实上， $v\in C^r(\Omega,R^n)$ 的一个不变闭流形 M 的双曲性条件也是 h 稳定的必要条件.

§5.2.2　S^m球面吸引子分歧

在这小节，我们关心 S^m 球面吸引子分歧 $(m \geqslant 1)$. 首先对特征值重数为 2 的情况证明分歧出的吸引子 $\Omega_\lambda = S^1$. 然后，应用定理 5.10, 对一些特殊向量场证明一般的 S^m 球面吸引子分歧.

令 $v \in C^r(\Omega, R^2)(r \geqslant 1)$ 是一个二维向量场，由下式给出

$$v_\lambda(x) = \lambda x - G(x, \lambda), \tag{5.2.10}$$

其中

$$G(x, \lambda) = G_k(x, \lambda) + o(|x|^k),$$

其中 G_k 是一个 k 重线性向量场， $k = 2m+1, m \geqslant 1$, 满足

$$C|x|^{k+1} \leqslant \langle G_k(x, \lambda), x \rangle, \tag{5.2.11}$$

对某个常数 $C > 0$.

下面定理在后面的应用中起到重要作用，它表明当一个无限维系统在中心流形上约化为一个如 (5.2.10) 和 (5.2.11) 的二维向量场时，该系统将分歧出一个 S^1 的吸引子.

定理 5.11　在条件 (5.2.11) 假设下，向量场 (5.2.10) 从 $(x, \lambda) = (0, 0)$ 在 $\lambda > 0$ 处分歧出一个吸引子 $\Omega_\lambda, \Omega_\lambda$ 是同胚于一个圆周 S^1, 并且下面结论中仅仅一个成立:

(1) Ω_λ 是一个周期轨道;

(2) Ω_λ 包含有无限多个奇点构成;

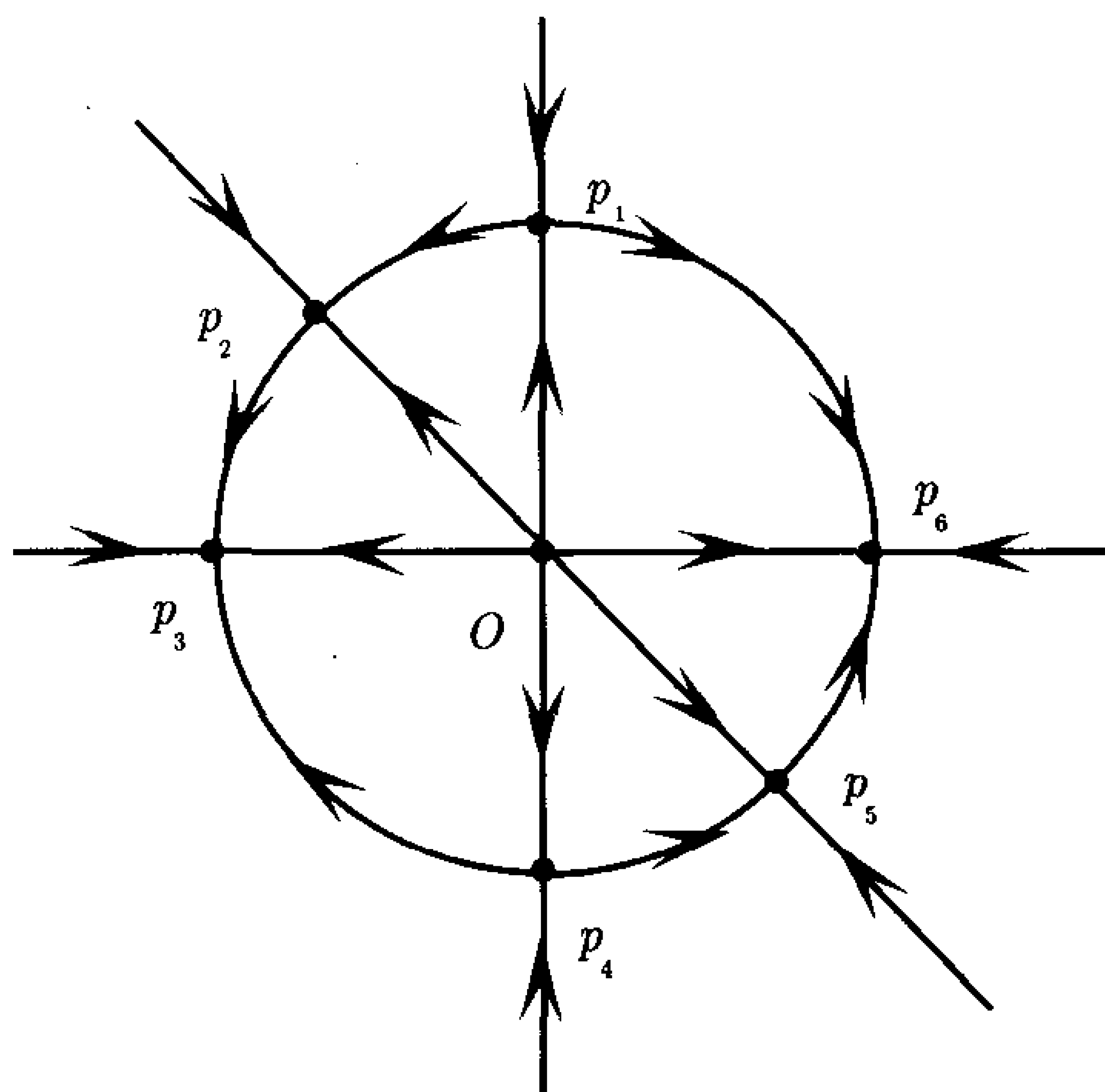


图 5.6

(3) Ω_λ 含有最多 $2(k+1)=4(m+1)$ 个奇点，当有 $4N+n(N+n\geqslant 1)$ 奇点时，其中 $2N$ 个是鞍点， $2N$ 个是稳定结点 (可以是退化的), n 个有零指标，如图 5.6 所示的 $N=1, n=2$ 情况.

证明 分下面五步进行证明.

第一步. 显然 (5.2.11) 意味着 $x=0$ 是向量场 (5.2.10) 在 $\lambda=0$ 处局部渐近稳定的. 因此，由定理 5.1, 向量场 v_λ 从 $(x,\lambda)=(0,0)$ 在 $\lambda>0$ 处分歧出一个吸引子 Ω_λ 同调于 S^1.

第二步. 令 Ω_λ 没有奇点. 那么， Ω_λ 一定至少含有一个周期轨道. 需要证明 Ω_λ 仅仅含有一个周期轨道. 取极坐标如下

$$x_1=r\cos\theta,\qquad x_2=r\sin\theta.$$

那么向量场 v_λ 的方程变为

$$\frac{dr}{d\theta}=r\frac{\cos\theta v_1+\sin\theta v_2}{\cos\theta v_2-\sin\theta v_1}. \tag{5.2.12}$$

我们看到

$$\begin{aligned}
\cos\theta v_1&=\lambda r\cos^2\theta-\cos\theta g_1(r\cos\theta,r\sin\theta,\lambda),\\
\sin\theta v_2&=\lambda r\sin^2\theta-\sin\theta g_2(r\cos\theta,r\sin\theta,\lambda),\\
\cos\theta v_2&=\lambda r\cos\theta\sin\theta-\cos\theta g_2(r\cos\theta,r\sin\theta,\lambda),\\
\sin\theta v_1&=\lambda r\sin\theta\cos\theta-\sin\theta g_1(r\cos\theta,r\sin\theta,\lambda),
\end{aligned}$$

其中 $G(x,\lambda)=(g_1(x,\lambda),g_2(x,\lambda))$. 令

$$g_i(x,\lambda)=g_{ki}(x,\lambda)+o(|x|^k),\quad i=1,2.$$

由 (5.2.11), (5.2.12) 被改写为

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\lambda-r^{2m}(\cos\theta g_{k1}+\sin\theta g_{k2})+o(r^{2m})}{r^{2m-1}(\sin\theta g_{k1}-\cos\theta g_{k2}+o(r))}, \tag{5.2.13}$$

根据 (5.2.11) 有

$$C\leqslant\cos\theta g_{k1}(\cos\theta,\sin\theta,\lambda)+\sin\theta g_{k2}(\cos\theta,\sin\theta,\lambda). \tag{5.2.14}$$

另一方面，由假设， Ω_λ 对任 $\lambda>0$ 充分小含有一个周期轨道，因此 (5.2.13) 的分母不能为零，即

$$0<C\leqslant\sin\theta g_{k1}(\cos\theta,\sin\theta)-\cos\theta g_{k2}(\cos\theta,\sin\theta)+O(r), \tag{5.2.15}$$

对任何 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 和某个常数 $C>0$. 条件 (5.2.15) 意味着 v_λ 的轨道是绕着 $x=0$ 点盘旋的，并且不能沿径向 r 运动，这一点由 Ω_λ 不含奇点和 (5.2.11) 所保证.

令 $r(\theta,r_0)$ 是方程 (5.2.13) 的解，其初值为 $r(0,r_0)=r_0$, 那么有下面 Taylor 展开

$$\begin{cases} r^{2m}(\theta,r_0)=r_0^{2m}+R(\theta)\cdot o(|r_0|^{2m}), \\ R(0)=0. \end{cases} \tag{5.2.16}$$

然后从 (5.2.13) 和 (5.2.16) 可以推出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}[r^{2m}(2\pi,r_0)-r^{2m}(0,r_0)] &= \int_0^{2\pi}\frac{\lambda-r^{2m}\alpha(\theta)+o(r^{2m})}{\beta(\theta)+O(r)}d\theta \\ &= 2\pi(a\lambda-br_0^{2m})+o(r_0^{2m}), \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

其中

$$\begin{aligned} &a=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\beta(\theta)+O(r)}d\theta, \\ &b=\int_0^{2\pi}\frac{\alpha(\theta)}{\beta(\theta)+O(r)}d\theta, \\ &\alpha(\theta)=\cos\theta g_{k1}+\sin\theta g_{k2}, \\ &\beta(\theta)=\sin\theta g_{k1}-\cos\theta g_{k2}. \end{aligned}$$

从 (5.2.17) 可以看出 v_λ 在 $x=0$ 附近的周期轨道一一对应于下面方程的正解

$$2\pi(a\lambda-br_0^{2m})+o(r_0^{2m})=0. \tag{5.2.18}$$

由 (5.2.14) 和 (5.2.15) 可知 $a>0$ 及 $b>0$. 因而，对任何 $\lambda>0$ 充分小，方程 (5.2.18) 在 $r=0$ 附近有唯一的正解

$$r_0=\left(\frac{a\lambda}{b}\right)^{\frac{1}{2m}}+o(\lambda^{\frac{1}{2m}}).$$

这就证明了 Ω_λ 含有唯一的周期轨道.

第三步. 将证明 Ω_λ 要么含有有限个奇点，要么含有一圈奇点，即有一个由奇点构成的 S^1, 并且如果 Ω_λ 只含有限个奇点,那么这些奇点个数最多为 $2(k+1)$ 个.

事实上，如果

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{g_1(x,\lambda)}{g_2(x,\lambda)},$$

那么 Ω_λ 有一圈奇点. 否则由 (5.2.11), v_λ 在 $x=0$ 附近的奇点数是有限的，并且奇点的最大数是由下面方程确定

$$\lambda x-G_k(x,\lambda)=0. \tag{5.2.19}$$

因为 $G_k(x,\lambda)$ 是 k 重线性函数, 方程 (5.2.19) 的奇点一定是在直线 $x_2=\alpha x_1$ 上, 其中 α 满足

$$\alpha=\frac{g_{k2}(x_1,x_2,\lambda)}{g_{k1}(x_1,x_2,\lambda)}=\frac{g_{k2}(1,\alpha,\lambda)}{g_{k1}(1,\alpha,\lambda)}. \tag{5.2.20}$$

(5.2.20) 是一个 $k+1$ 次代数方程, 因而最多具有 $k+1$ 个解. 因为 $k=$ 奇数, 方程 (5.2.19) 解的数目最多是 $2(k+1)$ 个, 这就是要证明的结论.

第四步. 令 Ω_λ 含有一圈奇点. 要证明 $\Omega_\lambda=S^1$.

在极坐标下, v_λ 在 r 的投影为

$$v_r(\theta,r)=\langle v_\lambda(x),x\rangle=\lambda r^2-r^{k+1}\alpha(\theta)+o(r^{k+1}),$$

其中 $\alpha(\theta)$ 如 (5.2.17) 中所定义. 由 (5.2.14),

$$0<C_1<\alpha(\theta)<C_2,\quad \forall 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

显然对每个 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, v_r 在 $r=0$ 附近存在唯一零点 $r_\lambda(\theta)>0$. 因此, 下面集合

$$\widetilde{\Omega}_\lambda=\{(\theta,r_\lambda(\theta))|\ \ v_r(\theta,r_\lambda(\theta))=0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

是同胚于一个圆圈 S^1, 并且 v 在 $x=0$ 附近的所有奇点都在 $\widetilde{\Omega}_\lambda$ 中. 这就意味着 $\widetilde{\Omega}_\lambda$ 就是 Ω_λ 所含的一圈奇点. 令

$$g_{kl}=\sum_{i+j=k}\alpha_{ij}^l x_1^i x_2^j,\quad l=1,2. \tag{5.2.21}$$

由第三步知道 $x_2g_{k1}=x_1g_{k2}$. 从 (5.2.11) 推出

$$0<\alpha_{k0}^1=\alpha_{k-11}^2.$$

对于 v_λ 的奇点 $(\widetilde{x}_1,0)$, 有

$$\widetilde{x}_1=(\lambda/\alpha_{k0}^1)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{5.2.22}$$

因而可得

$$\begin{aligned}\mathrm{div}v_\lambda(\widetilde{x}_1,0)&=2\lambda-(k\alpha_{k0}^1+\alpha_{k-11}^2)x_1^{k-1}+o(x_1^{k-1})\\&=-(k-1)\lambda+o(\lambda)\qquad(\text{由}\alpha_{k0}^1=\alpha_{k-11}^2\text{和}(5.2.22))\\&<0,\quad\forall\lambda>0\text{充分小}.\end{aligned}$$

用同样的方式, 对任何 $\widetilde{x}\in\widetilde{\Omega}_\lambda$, 取一个正交坐标系, 使得 $\widetilde{x}$ 是在 $\widetilde{x}_1$ 一轴上, 可以证明

$$\mathrm{div}v_\lambda(x)<0,\quad\forall x\in\widetilde{\Omega}_\lambda.$$

这就意味着 $\Omega_\lambda = \widetilde{\Omega}_\lambda = S^1$.

第五步. 当 Ω_λ 中含有有限个奇点时, 证明 $\Omega_\lambda = S^1$.

由 Brouwer 度理论, 从 (5.2.11) 可推知, 对 $x = 0$ 的某个邻域 $\Omega \subset R^2, v_\lambda$ 的拓扑度为

$$\deg(v_\lambda, \Omega, 0) = 1, \quad \forall |\lambda| \geqslant 0 \text{充分小}.$$

由

$$\operatorname{ind}(v_\lambda, 0) = 1, \quad \forall |\lambda| \neq 0.$$

因此有

$$\sum_{z_i \in \Omega_\lambda} \operatorname{ind}(v_\lambda, z_i) = 0. \tag{5.2.23}$$

令 $z \in \Omega_\lambda$ 是 v_λ 的一个奇点, 不失一般性, 取正交坐标系, 使得 $z = (x_1, 0)$. 然后由 (5.2.11) 和 (5.2.21) 可知, v_λ 在 z 的 Jacobi 矩阵为

$$Dv_\lambda(z) = \begin{pmatrix} -(k-1)\lambda + o(\lambda) & * \\ 0 & (1 - \alpha_{k-11}^2/\alpha_{k0}^1)\lambda \end{pmatrix}, \tag{5.2.24}$$

那么 $\alpha_{k0}^1 > 0$. 显然 $Dv_\lambda(z)$ 有一个特征值 $\beta = -(k-1)\lambda + 0(\lambda) \neq 0$. 因此对 v_λ 的任何奇点 $z \in \Omega_\lambda$, v_λ 在 z 点的指标只能够是 $1, -1, 0$ 这三种情况. 容易看出, 如果指标是 1, 那么 z 是一个稳定结点.
令 v_λ 在 z 点的指标为 -1:

$$\operatorname{ind}(v_\lambda, z) = -1. \tag{5.2.25}$$

当 $\alpha_{k=11}^2 \neq \alpha_{k0}^1$ 时, 由 (5.2.24), z 是非退化的. 因此 v_λ 在 z 点有一个唯一的不稳定流形, 这正是我们所需要的性质.

当 $\alpha_{k-11}^2 = \alpha_{k0}^1$ 时, 如同第四步中的证明可知

$$\operatorname{div} v_\lambda(z) = -(k-1)\lambda + o(\lambda) < 0. \tag{5.2.26}$$

如果 v_λ 在 z 点的不稳定流形不是唯一的, 那么 v_λ 在 z 点的局部结构是拓扑等价于如图 5.7 所示的结构.

在另一方面, (5.2.26) 意味着存在 $z \in \Omega_\lambda$ 的一个领域 $O \subset R^2$, 使得

$$\operatorname{div} v_\lambda(x) < 0, \quad \forall x \in O.$$

这意味着对任何开集 $\widetilde{O} \subset O$, 存在 $t_0 > 0$, 使得

$$|\widetilde{O}| > |\widetilde{O}_t|, \quad 0 < t < t_0, \tag{5.2.27}$$

这里 $|O|$ 表示 O 的面积, $\widetilde{O}_t = S(t)\widetilde{O}, S(t)$ 是由 v_λ 生成的算子半群.

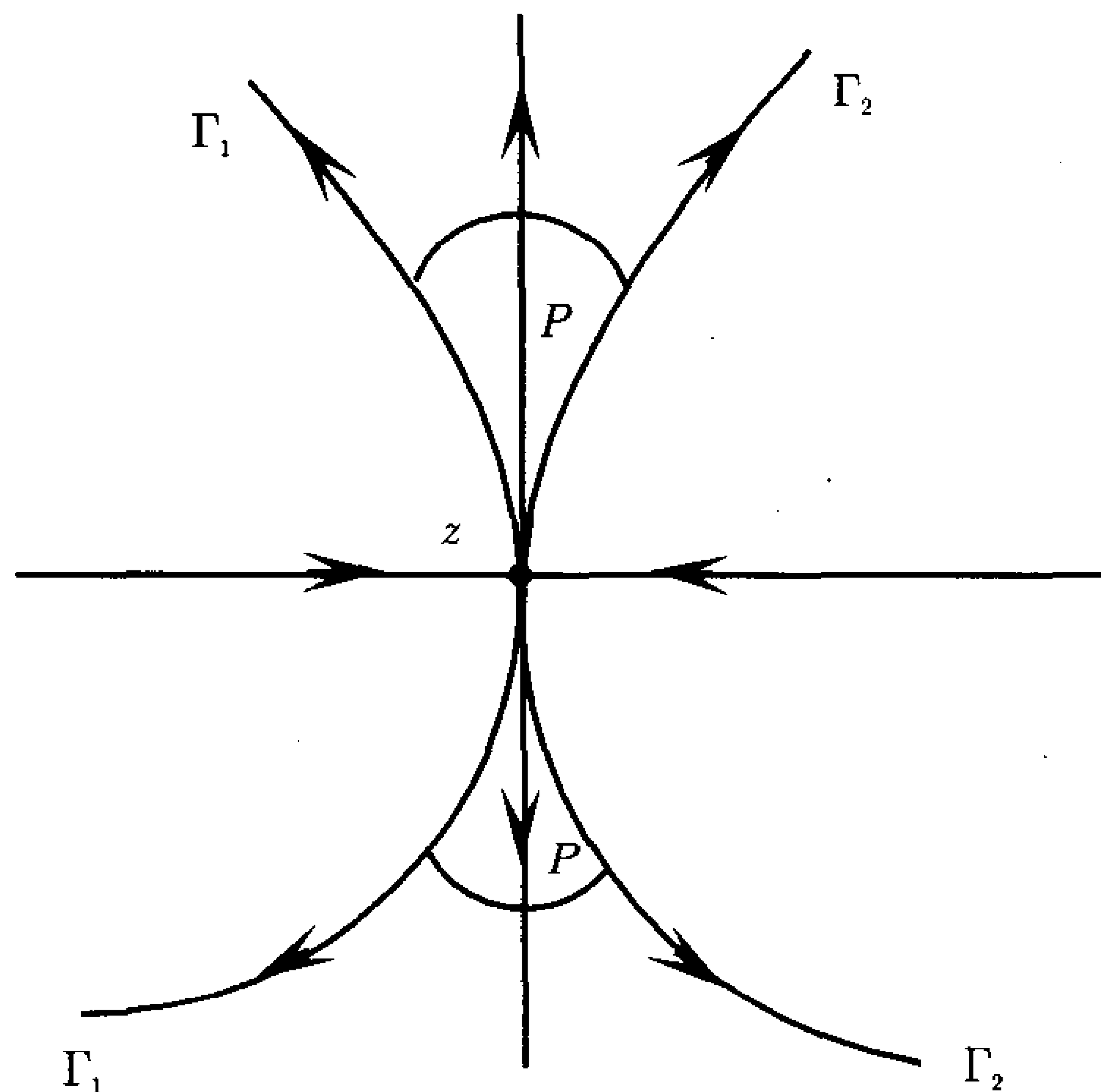


图 5.7 区域 P 的流是从 z 点出来

然而，很清楚对任何开集 $\widetilde{O}\subset P\subset O$, 区域 P 如图 5.7 所示，性质 (5.2.27) 不成立. 因而 v_λ 在 z 点的不稳定流形一定是唯一的.

用同样的方式可以证明，如果 v_λ 在 z 点的指标为 0, 那么 v_λ 在 z 点的不稳定流形也是唯一的.

由 Poincaré-Bendixson 定理， v_λ 在所有指标为 0 和 -1 的奇点不稳定流形一定是连接到指标为 1 的奇点，如图 5.6 所示. 这样由指标为 0 和 -1 奇点的不稳定流形唯一性，所有奇点以及它们的不稳定流形所构成的集合是一个圆圈 S^1. 因而 $\Omega_\lambda = S^1$. 定理证毕.

定理 5.11 中第四步的证明对一般满足 (5.2.10) 和 (5.2.11) 的向量场 $v_\lambda\in C^r(\Omega,R^n)$ 也是有效的，也就是说下面定理成立.

定理 5.12 令 $v_\lambda\in C^r(\Omega,R^n)$ 是一个由 (5.2.10) 给出的 n 维向量场满足条件 (5.2.11), 那么 v_λ 从 $(x,\lambda)=(0,0)$ 在 $\lambda>0$ 处分歧出一个吸引子 Ω_λ. 如果 Ω_λ 含有有 $(n-1)$ 维球 S^{n-1} 是由 v_λ 奇点构成，则 $\Omega_\lambda=S^{n-1}$.

现在应用定理 5.10 对下面向量场证明球面吸引子的分歧定理. 令 $v_\lambda\in C^r(\Omega,R^n)$ 由下式给出

$$v_\lambda(x)=\lambda x-\alpha|x|^{2m}x+G(x,\lambda),\quad x\in R^n, \tag{5.2.28}$$

其中 $m\geqslant 1,\alpha>0$ 是一个常数， $G(x,\lambda)$ 满足

$$G(x,\lambda)=o(|x|^{2m+1}),\quad \forall\lambda\in R^1. \tag{5.2.29}$$

定理 5.13 令 $v\in C^r(\Omega,R^n)$ 是由 (5.2.28) 给出满足条件 (5.2.29), 那么 v_λ 从 $(x,\lambda)=(0,0)$ 在 $\lambda>0$ 分歧出一个 S^{n-1} 球面吸引子.

证明　考虑向量场 $u_\lambda(x) = \lambda x - \alpha|x|^{2m}x$, 则显然 u_λ 从 $(x,\lambda) = (0,0)$ 在 $\lambda > 0$ 分歧出一个球面吸引子 S^{n-1}_λ, 并且 S^{n-1}_λ 是由奇点构成

$$S^{n-1}_\lambda = \{x \in R^n | \ |x| = (\lambda/\alpha)^{\frac{1}{2m}}\}.$$

此外, u_λ 在 S^{n-1}_λ 的法空间 N_x 投影为

$$u_r = \lambda r - \alpha r^{2m+1}, \quad r = |x|,$$

并且对任 $x \in S^{n-1}_\lambda$ 有

$$Du_r(x) = \frac{du(x)}{dr} = -2m\lambda < 0.$$

因而由定理 5.10, u_λ 的不变球面 S^{n-1}_λ 是 h 稳定的. 此外, 由条件 (5.2.29), 在 $x = 0$ 的一个小邻域 $O \subset R^n$ 内 v_λ 是 u_λ 的一个摄动, 这意味 v_λ 从 $(x,\lambda) = (0,0)$ 分歧出的吸引子 Ω_λ 是同胚于 $(n-1)$ 维球面 S^{n-1}. 定理证毕.

注 5.7　考虑向量场 $v_\lambda \in C^r(\Omega, R^n)$ 由下式给出

$$v_\lambda(x) = \lambda x - G(x,\lambda), \quad x \in \Omega \subset R^n,$$

其中 $G(x,\lambda) = o(|x|)$. 取 R^n 中的球坐标 $x = (\Phi, r)$, r 为径向坐标, Φ 为 S^{n-1} 上的球面坐标. 则 v_λ 在径向 r 的投影 $v_r = \langle v_\lambda, \frac{1}{R}x\rangle$ 可表示为

$$v_r = \lambda r - f(r,\Phi,\lambda). \tag{5.2.30}$$

假设, 如果对任 $\lambda > 0$ 充分小, 对每个 $\Phi \in S^{n-1}$, 函数 (5.2.30) 在 $r = 0$ 附近有唯一解 $r_\lambda(\Phi) > 0$, 并且

$$\frac{dv_r(r_\lambda(\Phi))}{dr} < 0, \quad \forall \Phi \in S^{n-1}, \tag{5.2.31}$$

可以推得, 在条件 (5.2.31) 假设下, 向量场 (5.2.30) 从 $(x,\lambda) = (0,0)$ 在 $\lambda > 0$ 处一定分歧出一个球面 S^{n-1} 吸引子.

§5.3　动态分歧的结构稳定性

§5.3.1　主要定理

这一节主要考虑向量场不变集分歧的结构稳定性, 这不仅包括分歧点的稳定性, 并且包括向量场在分歧解的局部结构稳定性. 这使我们能够更好地理解向量场具有稳定性和普遍性分歧类型的基本特征.

令 $\Omega \subset R^n$ 是一个开集， $x = 0 \in \Omega$ 及 $\lambda \in I = (a,b) \subset R^1$. 记参数化向量场空间为

$$C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n) = \{v : \Omega \times I \to R^n | \ v(0,\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in I\},$$

其范数定义为

$$\|v\|_{C^{k,1}} = \sup_{(x,\lambda)\in\Omega\times I} \left[\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_x^\alpha v| + |D_\lambda v| + |D_{\lambda x}^2 v| \right].$$

显然，如果 $v \in C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)(k \geqslant 1)$, 那么 v 关于 $x \in \Omega$ 是 k 次连续可微的，关于 λ 是连续可微的，并且 v 可表达为

$$v(\cdot,\lambda) = A_\lambda + G(\cdot,\lambda), \tag{5.3.1}$$

其中 A_λ 和 $G(\cdot,\lambda)$ 与 (5.1.7) 和 (5.1.8) 中的相同.

A_λ 的实单特征值和复单特征值关于 λ 是连续可微的 [36], 它们能够表达为

$$\beta_i(\lambda) = \alpha_i + \sigma_i\lambda + o(|\lambda|), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

下面给出 $v \in C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$ 的动态分歧结构稳定性的定义.

定义 5.4 令 $v_1, v_2 \in C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ 是 $v_1(x,\rho)$ 和 $v_2(x,\rho)$ 的一个分歧点，分歧出不变集 $\Gamma_1(\rho)$ 和 $\Gamma_2(\rho)$. 称 λ_1 和 λ_2 具有相同的分歧结构，如果在 λ_1 和 λ_2 相同一侧 $\rho_1 - \lambda_1 = \rho_2 - \lambda_2$, v_1 和 v_2 在分歧出的不变集 $\Gamma_1(\rho_1)$ 和 $\Gamma_2(\rho_2)$ 是局部拓扑等价的，也就是说，存在 $\Gamma_i(\rho_i)$ 的一个邻域 $U_i \subset R^n$ 及一个同胚 $\varphi : U_1 \to U_2$, 使得 φ 映 v_1 在 U_1 的轨道到 v_2 在 U_2 的轨道上并保持定向不变.

定义 5.5 令 $v \in C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$, $\lambda_0 \in I$ 是 $v(x,\lambda)$ 的一个分歧点. 称 λ_0 是在 $C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$ 中结构稳定的，如果对任何 $\varepsilon > 0$ 充分小，存在 v 的一个邻域 $O \subset C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$, 使得对任何 $u \in O, u$ 有一个分歧点 λ_1 满足 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, 并且 λ_1 与 λ_0 有相同的分歧结构. 如果 v 的所有分歧点都是结构稳定的，则称 v 在 $C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)$ 中是动态分歧结构稳定向量场.

令 $v \in C_0^{k,1}(\Omega \times I, R^n)(k \geqslant 1)$, $\lambda_0 \in I$ 称为是一个重数为 m 的特征参数，如果 $A_\lambda = Dv(0,\lambda)$ 的特征值 β_i 在 λ_0 处满足下面条件

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\beta_i(\lambda_0) = 0, & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) \neq 0, & m+1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

$\lambda_0 \in I$ 称为是单特征参数, 若 $m = 1$ 对 $\beta_1(\lambda_0) = 0$ 及 $m = 2$ 对 $\beta_1(\lambda_0) = \overline{\beta_2(\lambda_0)} = i\beta(\beta \neq 0)$. 若 $\lambda_0 \in I$ 是单特征参数，并且在 (5.3.2) 的特征值满足

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) \neq 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{5.3.3}$$

则 λ_0 称为正则特征参数.

下面定理给出动态分歧结构稳定性的充要条件.

定理 5.14　令 $v \in C_0^{3,1}(\Omega \times I, R^n)$ 及 $\lambda_0 \in I$ 是 v 的一个单特征参数. 那么存在一个数 $b(\lambda_0)$, 称为 v 在 λ_0 的分歧数, 连续的依赖于 $\|v\|_{C^{3,1}}$, 使得下面结论成立:

(1) λ_0 是 v 的结构稳定分歧点充要条件为 λ_0 是正则的, 并且对应的分歧数 $b(\lambda_0) \neq 0$.

(2) 若 λ_0 有重数 $m = 1$ 及 $b(\lambda_0) \neq 0$, 那么 $v(x, \lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 的每一边分歧出唯一奇点分支 $x(\lambda)$, 并且是双曲的. 此外, 当 $\beta_1(\lambda) < 0(\lambda \neq \lambda_0)$ 时, $x(\lambda)$ 有 Morse 指数 $k+1$, 当 $\beta(\lambda) > 0$ 时, 有 Morse 指数 k, 这里 $k=$ 特征值 $\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0) > 0$ 的数.

(3) 若 λ_0 重数 $m = 2$, 当 $b(\lambda_0) > 0$ 时, $v(x, \lambda)$, 在 $\mathrm{Re}\beta_1(\lambda) < 0$ 一侧分歧出唯一周期轨道 Γ_λ, 当 $b(\lambda_0) < 0$ 时, 在 $\mathrm{Re}\beta_1(\lambda) > 0$ 一侧分歧出唯一周期轨道分支. 并且 Γ_λ 是双曲的.

定理 5.15　一个参数化向量场 $v \in C_0^{1,3}(\Omega \times I, R^n)$ 是分歧结构稳定的, 其充分必要条件为:

(1) v 的所有特征参数是单的并且是正则的;

(2) v 的所有分歧数是非零的.

进一步, 所有分歧结构稳定的向量场集合在 $C_0^{3,1}(\Omega \times I, R^n)$ 是开稠集.

注 5.8　我们注意到, 在 $C_0^{1,1}(\Omega \times I, R^n)$ 中没有向量场是分歧结构稳定的, 除了这些向量场, 它们对所有 $\lambda \in I$ 没有分歧发生. 在 $C_0^{2,1}(\Omega \times I, R^n)$ 中, 所有分歧结构稳定的向量场就是这些特征参数是正则的其重数 $m = 1$.

§5.3.2　主要定理的证明

定理 5.14 的证明　就重数 $m = 1$ 和 $m = 2$ 这两种情况分别进行证明.

情况 1.　λ_0 有重数 $m = 1$, 分几步进行证明.

第一步. 中心流形约化. 对应于向量场 (5.3.1) 的方程在 $\lambda = \lambda_0$ 附近能够被分解为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \beta_1(\lambda)x + G_1(x, y, \lambda), & x \in R^1, \\ \dfrac{dy}{dt} = J_\lambda y + G_2(x, y, \lambda), & y \in R^{n-1}, \end{cases} \tag{5.3.4}$$

其中 J_λ 为对应于特征值 $\beta_2(\lambda), \cdots, \beta_n(\lambda)$ 的 Jordan 矩阵. 从条件 (5.3.2)(那里 $m = 1$) 和中心流形定理, (5.3.4) 的动态分歧以等价于下面的约化分歧方程

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1(\lambda)x + G_1(x, \Phi(x, \lambda), \lambda). \tag{5.3.5}$$

由 (5.3.2) 和 (5.3.3), $\beta_1(\lambda)$ 满足

$$\beta_1(\lambda)\begin{cases} <0(\text{或}>0), & \text{当}\lambda<\lambda_0, \\ =0, & \text{当}\lambda=\lambda_0, \\ >0(\text{或}<0), & \text{当}\lambda>\lambda_0. \end{cases}$$

由假设, G_1 在 $x=0$ 是 C^3 的, 有 Taylor 展开

$$G_1(x,\Phi,\lambda)=b(\lambda)x^2+c(\lambda)x^3+o(|x|^3), \tag{5.3.6}$$

其中

$$b(\lambda)=\frac{\partial^2 G_1(0,0,\lambda)}{\partial x^2}.$$

$b(\lambda_0)$ 就被定义为 v 在 λ_0 的分歧数. 显然 $b(\lambda)$ 连续的依赖于 λ 和 v 的 C^2 范数 $\|v\|_{C^2}$.

第二步. 我们可以看到当 $b(\lambda_0)\neq 0$, 方程 (5.3.5)~(5.3.6) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边都严格地分歧出一个奇点分支 $x^*(\lambda)$, 其表达为如下形式

$$x^*(\lambda)=-\frac{1}{b(\lambda)}\beta_1(\lambda)+o(|\beta_1|). \tag{5.3.7}$$

显然 $(x,y)=(x^*(\lambda),\Phi(x^*,\lambda))$ 是方程 (5.3.4) 从 $(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边分歧出的奇点分支.

证明 $z(\lambda)=(x^*,\Phi(x^*,\lambda))$ 是 v 的一个双曲奇点. 由于中心流形函数 $\Phi(x,\lambda)=o(|x|)$, 由 (5.3.6) 和 (5.3.7) 从 (5.3.4) 可推知

$$\begin{aligned} Dv(z,\lambda)&=\begin{pmatrix}\beta_1(\lambda) & 0\\ 0 & J_\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}DG_1(x^*,\Phi(x^*,\lambda),\lambda)\\ DG_2(x^*,\Phi(x^*,\lambda),\lambda)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\beta_1(\lambda)+o(|\beta_1|) & O(\beta_1)\\ O(\beta_1) & J_\lambda+O(\beta_1)\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

以及

$$\text{sign}\ \det Dv(z,\lambda)=\begin{cases}\text{sign}\ \det J_\lambda, & \beta_1(\lambda)<0,\\ -\text{sign}\ \det J_\lambda, & \beta_1(\lambda)>0.\end{cases} \tag{5.3.9}$$

由假设, J_λ 是双曲的, 由 (5.3.8) 可知 $Dv(z,\lambda)$ 对任何 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 充分小也是双曲的. 从 (5.3.9) 可知

$$k_1=\begin{cases}k+1, & \text{当}\beta_1(\lambda)<0,\\ k, & \text{当}\beta_1(\lambda)>0,\end{cases}$$

其中 k_1 是奇点 z 的 Morse 指数， k 为 J_λ 中有正实部特征值数，这样结论 (2) 被证明.

第三步. 结论 (1) 的充分性. 令 λ_0 是正则的及 $b(\lambda_0)>0$(对 $b(\lambda_0)<0$ 的情况证明是一样的). 因为特征值 $\beta_1(\lambda)$ 在 λ_0 是 C^1 的，对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$，使得若 $v\in C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$, 并且

$$\|v_1-v\|_{C^{3,1}}<\delta, \tag{5.3.10}$$

则 v_1 和 v 的特征值 $\widetilde{\beta}_1(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha(\lambda-\lambda_0)+o(|\lambda-\lambda_0|),\alpha\neq 0\\ \widetilde{\beta}_1=\alpha_1(\lambda-\lambda_1)+o(|\lambda-\lambda_1|),\\ |\alpha_1-\alpha|<\varepsilon,|\lambda_0-\lambda|<\varepsilon.\end{cases} \tag{5.3.11}$$

因此可以推知，存在 v 的一个邻域 $O\subset C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$, 使得对任何 $v_1\in O$, v_1 有一个重数 $m=1$ 的正则特征参数 λ_1, 使得 $|\lambda_1-\lambda_0|<\varepsilon$, 并且 v_1 在 λ_1 的分歧数 $b_1(\lambda_1)>0$.

称一个线性向量场 A 是双曲的，若 A 的所有特征值实部不为零. A 的具有负实部的特征值数被称为 A 的指标. 两个线性向量场 A 和 B 拓扑共轭的 (或拓扑等价) 充分必要件是 A 和 B 为双曲的并且有相同的指标 [79].

令 $z_1(\lambda)$ 是 v_1 从 $(0,\lambda_1)$ 分歧的奇点分支. 由结论 (2), $Dv(z,\rho_0)$ 和 $Dv_1(z_1,\rho_1)$ 对 $\rho_0\neq\lambda_0$ 和 $\rho_1\neq\lambda_1$ 是双曲的. 另一方面，由 (5.3.10) 和 (5.3.11), 有

$$Dv_1(z_1,\rho_1)=\begin{pmatrix}-\widetilde{\beta}_1(\rho_1)+o(|\widetilde{\beta}_1|), & O(\widetilde{\beta}_1)\\ O(\widetilde{\beta}) & \widetilde{J}_{\rho_1}+O(\widetilde{\beta}_1)\end{pmatrix}, \tag{5.3.12}$$

其中

$$\|\widetilde{J}_\lambda-J_\lambda\|<\delta,\quad \delta\text{如}(5.3.10).$$

因此，从 (5.3.8) 和 (5.3.12) 推知对 $\rho_1-\lambda_1=\rho_0-\lambda_0, Dv(z,\rho_0)$ 和 $Dv_1(z_1,\rho_1)$ 有相同的指标. 再由 Hartman-Grobman 定理，得到结论 (1) 关于 $m=1$ 的充分条件.

第四步. 必要性. 在 (5.3.6) 中，若 $b(\lambda_0)=0$ 及 $c(\lambda_0)\neq 0$, 显然能够找到 v_1, 使得 v_1 的分歧点 λ_1 及分歧数 $b(\lambda_1)\neq 0$, 并且 $b(\lambda_1)\to 0,\lambda_1\to\lambda_0$, 当 $v_1\to v_0$, 但是 v_1 与 v_0 有不同的分歧结构. 若 $b(\lambda_0)=c(\lambda_0)=0$, 那么 v 能够被 v_1 和 v_2 在 $C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$ 中逼近，使得 v_1 的分歧数 $b_1(\lambda_1)\neq 0$, 但 v_2 的分歧数 $b_2(\lambda_2)=0$ 及 $c_2(\lambda_2)\neq 0$, v_1 与 v_2 有完全不同的分歧结构. 因此 λ_0 不是分歧结构稳定点.

当 λ_0 不是正则时，即 $\beta_1=o(|\lambda-\lambda_0|)$, 那么 v 能够被 $v_N\in C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$

逼近，这里 $Dv_N(0,\lambda)$ 在 λ_0 附近有如下特征值

$$\beta_1^N(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\in[\lambda_0-\varepsilon_N,\lambda_0+\varepsilon_N],\quad \varepsilon_n\to 0,\quad N\to\infty,\\ \neq 0, & \lambda\notin[\lambda_0-\varepsilon_N,\lambda_0+\varepsilon_N].\end{cases}$$

显然 v_N 的分歧结构在 $\lambda=\lambda_0$ 附近与 v 不同.

这样，对 $m=1$ 情况结论 (1) 和 (2) 得证.

情况 2. λ_0 有重数 $m=2$. 为了简单，令 $v(z,\lambda)$ 能够被表达成如下形式，这通过一个坐标变换可以做到

$$v(z,\lambda)=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & -1 & 0\\ 1 & \alpha(\lambda) & 0\\ 0 & 0 & B_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}G_1(x,y)\\ G_2(x,y)\\ G_3(x,y)\end{pmatrix},$$

其中 $z=(x,y),x=(x_1,x_2)\in\Omega\cap R^2,y\in\Omega\cap R^{n-2}$.

v 的约化方程可表达为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=\alpha(\lambda)x_1-x_2+f_1(x_1,x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+\alpha(t)x_2+f_2(x_1,x_2),\end{cases}\tag{5.3.13}$$

其中

$$\alpha(\lambda)\begin{cases}<0\ (\text{或}>0), & \text{当}\lambda<\lambda_0,\\ =0, & \text{当}\lambda=\lambda_0,\\ >0\ (\text{或}<0), & \text{当}\lambda>\lambda_0.\end{cases}$$

$$f_i(x)=G_i(x,h(x,\lambda)),\qquad i=1,2,$$

其中 h 为中心流形函数. 由 Taylor 展开

$$f_i(x)=\sum_{2\leqslant p+q\leqslant 3}a_{pq}^i x_i^p x_2^q+\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n-1}b_{jk}^i x_j y_k+o(|x|^3),\tag{5.3.14}$$

其中

$$y_k=h_k(x,\lambda)=\sum_{r+s=2}C_{rs}^k x_1^r x_2^s+o(|x|^2),$$

$$a_{pq}^i=\frac{\partial^{p+q}G_i(0,0)}{\partial x_1^p\partial x_2^q},\quad 0\leqslant p,\quad q\leqslant 3,\quad i=1,2,$$

$$b^i_{jk}=\frac{\partial^2 G_i(0,0)}{\partial x_j\partial y_k},\quad i=1,2,$$
$$c^k_{rs}=\frac{\partial h_k(0,\lambda)}{\partial x_1^r\partial x_2^s},\quad 0\leqslant r,\quad s\leqslant 2.$$

显然这些系数 a^i_{pq},b^i_{jk} 和 c^k_{rs} 连续地依赖于 λ 和 v 的范数 $\|v\|_{C^{3,1}}$.

取极坐标 $x_1=r\cos\theta,x_2=r\sin\theta$. 那么有

$$\frac{dr}{dt}=\cos\theta\frac{dx_1}{dt}+\sin\theta\frac{dx_2}{dt},$$
$$r\frac{d\theta}{dt}=\cos\theta\frac{dx_2}{dt}-\sin\theta\frac{dx_1}{dt}.$$

从 (5.3.13) 和 (5.3.14) 可推出

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta}&=\frac{\alpha_\lambda r^2+r\cos\theta f_1(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\sin\theta f_2(r\cos\theta,r\sin\theta)}{r+\cos\theta f_2(r\cos\theta,r\sin\theta)-\sin\theta f_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}\\&=[\alpha_\lambda r+u_1r^2+u_2r^3+o(r^3)][1+v_1r+v_2r^2+o(r^2)]\\&=\alpha_\lambda r+(u_1+\alpha_\lambda v_1)r^2+(u_1v_1+u_2+\alpha v_2)r^3+o(r^3),\end{aligned}\tag{5.3.15}$$

其中 $u_i,v_i(i=1,2)$ 是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的 $(i+2)$ 阶的齐次函数，并且连续地依赖于在 (5.3.14) 中的系数 a^i_{pq},b^i_{jk} 和 c^k_{rs}.

容易验证

$$\int_0^{2\pi}[u_1(\theta)+\alpha v_1(\theta)]d\theta=0.\tag{5.3.16}$$

令

$$b(\lambda)=\int_0^{2\pi}[u_1(\theta)v_1(\theta)+u_2(\theta)+\alpha(\lambda)v_2(\theta)]d\theta.\tag{5.3.17}$$

则 $b(\lambda_0)$ 被定义为 v 在 λ_0 的分歧数.

下面分三步完成 $m=2$ 情况的证明.

第一步. 当 $b(\lambda_0)>0$ 时，在 $\alpha(\lambda)<0$ 的一侧，以及当 $b(\lambda_0)<0$ 时，在 $\alpha(\lambda)>0$ 的一侧， $v(z,\lambda)$ 分歧出唯一的一个周期轨道分支.

上述结论是已知的. 然而为了完备性仍给出证明.

令 $r(\theta,\lambda,a)$ 是 (5.3.15) 的解，其初值为 $r(0,\lambda,a)=a$. r 关于 a 是三次可微的，那么 $r(\theta,\lambda,a)$ 在 $a=0$ 的附近可展开为 (由 (5.3.15))

$$r(\theta,\lambda,a)=(1+\alpha(\lambda)r_0(\theta))a+o(a^2),\quad r_0(0)=0.$$

为了简单，记 $r(\theta,\lambda,a)$ 为 $r(\theta,a)$.

在另一方面， (5.3.15) 可改写为

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=\frac{\alpha(\lambda)}{r}+(u_1+\alpha v_1)+(u_1v_1+u_2+\alpha v_2)r+o(r).\tag{5.3.18}$$

对 (5.3.18) 两边从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 进行积分，注意右端 $r(\theta,a)=a+\alpha(\lambda)r_0(\theta)a+o(a^2)$, 再由 (5.3.16) 可得

$$\frac{r(2\pi,a)-r(0,a)}{r(2\pi,a)}=c(a,\lambda)\alpha(\lambda)+b(\lambda)a^2+o(a^2), \tag{5.3.19}$$

其中

$$C(a,\lambda)=\int_0^{2\pi}[1-\alpha(\lambda)r_0(\theta)+o(a)r_1(\theta,\lambda)]d\theta,$$
$$C(0,\lambda_0)=2\pi.$$

容易看到，下面方程的每一个正解 $a>0$,

$$c(a,\lambda)\alpha(\lambda)+b(\lambda)a^2+o(a^2)=0 \tag{5.3.20}$$

都对应 (5.3.13) 的一个经过 $(x_1,x_2)=(0,a)$ 的一个周期轨道．显然方程 (5.3.20) 的正解对 $b(\lambda)\cdot\alpha(\lambda)<0$ 是唯一的．这样完成了第一步证明．

第二步．分歧出的周期轨道 Γ_λ 是双曲的．为了方便，首先介绍 Poincaré 映射和双曲轨道的概念．这些基本的概念都能在标准的动力系统教科书和专著中见到 [79].

令 r 是向量场 v 的一个周期轨道， $x_0\in r$ 为一点．令 Σ 是在 x_0 点横截于 v 的一个截面 (即 Σ 横截于 r).

这个以 x_0 为起点的周期轨道 r 在经过时间 $T>0$ 后又回来与 Σ 相交于 x_0 点，这里 T 为 r 的周期．由于 v 的流的连续性，存在 x_0 的一个领域 $U\subset\Sigma$, 使得对每一点 $x\in\Sigma$, 这个以 x 为起点的轨道经过某个时刻 $t>0$ 又回来与 Σ 相交于 Σ 于一点 y. 这样就定义一个映射 $P:U\to\Sigma$ 为 $P(x)=y$, 这里 y 就是以 $x\in U$ 为起点的轨道回来与 Σ 第一次相交的点．这个映射 P 就称为周期轨道 r 相关联的 Poincaré 映射．如图 5.8 所示．

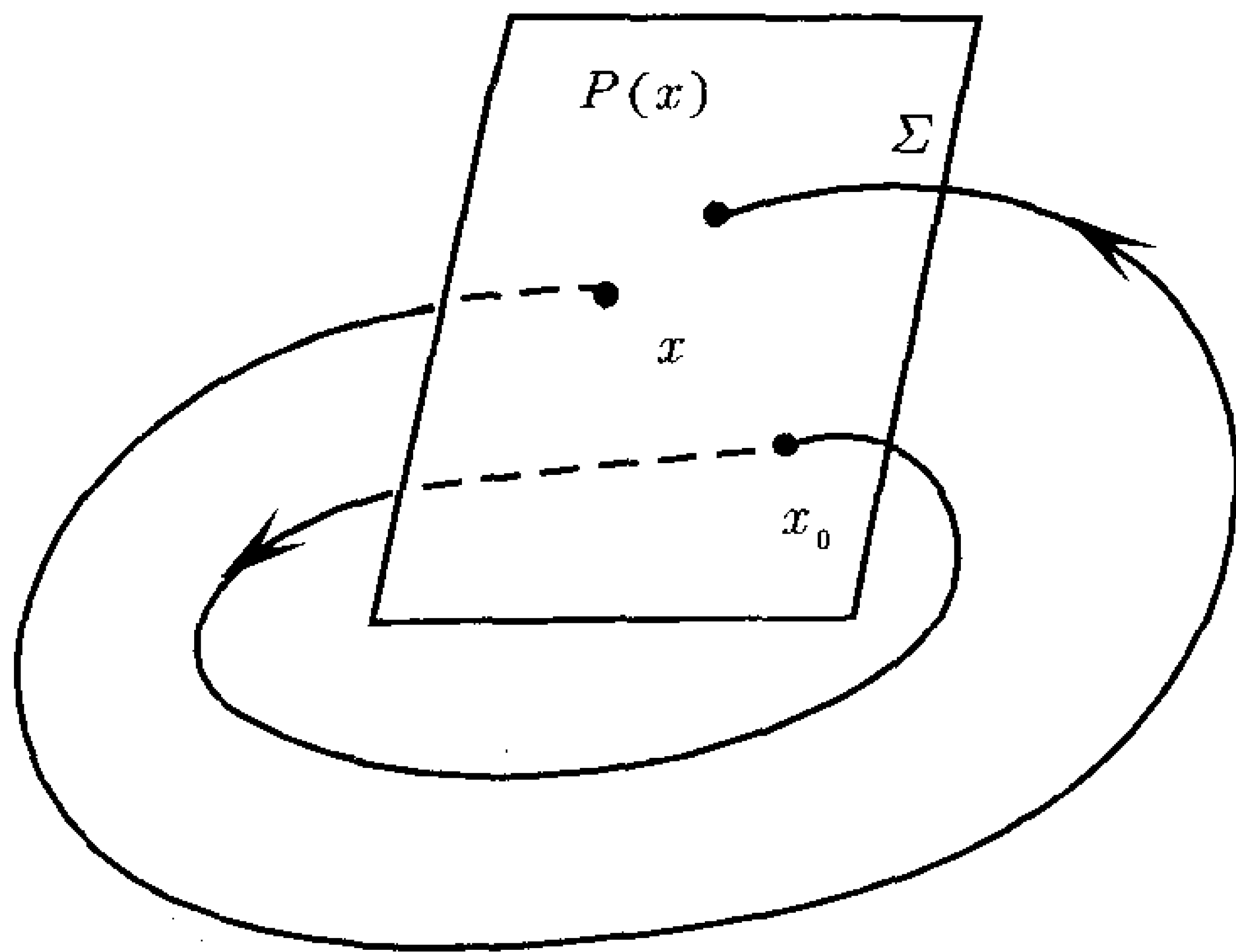


图 5.8

Poincaré 映射 $P:U\to P(U)$ 是一个同胚，并且 P 的每一个不动点 x_0 对应于 v 的一个周期轨道.

称 r 是 v 的一个双曲周期轨道，如果 x_0 是 Poincaré 映射 P 的一个双曲不动点，即 $DP(x_0)$ 没有模为 1 的特征值.

不失一般性，假设向量场 $v(z,\lambda)$ 的中心流形 M_λ 是 x 平面，也就是说中心流形函数为

$$y=h(x,\lambda)=0,\quad \forall|\lambda-\lambda_0|\geqslant 0\text{充分小及}x\in R^2.$$

事实上，在下面坐标变换下

$$\begin{cases}\widetilde{x}=x,\\ \widetilde{y}=y-h(x,\lambda),\end{cases}$$

向量场 v 被变换为下面形式

$$\widetilde{v}=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & -1 & 0\\ 1 & \alpha(\lambda) & 0\\ 0 & 0 & B_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{x}_1\\ \widetilde{x}_2\\ \widetilde{x}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}H_1(\widetilde{x},\widetilde{y})\\ H_2(\widetilde{x},\widetilde{y})\\ H_3(\widetilde{x},\widetilde{y})\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}&H_i(\widetilde{x},\widetilde{y})=G_i(\widetilde{x},\widetilde{y}+h(\widetilde{x},\lambda)),\quad i=1,2,\\ &H_3(\widetilde{x},\widetilde{y})=B_\lambda\cdot h(\widetilde{x},\lambda)-\nabla h\frac{d\widetilde{x}}{dt}+G_3(\widetilde{x},\widetilde{y}+h),\\ &\frac{d\widetilde{x}}{dt}=\begin{pmatrix}\alpha & -1\\ 1 & \alpha\end{pmatrix}\widetilde{x}+\begin{pmatrix}H_1\\ H_2\end{pmatrix},\\ &H_j(\widetilde{x},\widetilde{y})=o(|\widetilde{x}|,|\widetilde{y}|),\quad 1\leqslant j\leqslant 3.\end{aligned}$$

显然这两个向量场 v 和 $\widetilde{v}$ 是拓扑等价的，并且 $\widetilde{x}$ 平面就是 $\widetilde{v}$ 在 λ 的中心流形.

现在给出与 v 在 λ_0 分歧出的周期轨道 Γ_λ 相关的 Poincaré 映射. 由假设，x 平面 $(y=0)$ 是 v 在 λ 的中心流形，因而 $\Gamma_\lambda\subset R^2$($x$ 平面). 令 Γ_λ 通过点 $(a_\lambda,0)\in R^2$ 满足 $0<a_\lambda<\rho$(ρ 充分小), 记

$$D_\rho=\{y\in R^{n-2}||y|<\rho\}.$$

取在点 $(a_\lambda,0)$ 横截于 v 的截面如下 (如图 5.9 所示).

$$\begin{aligned}\Sigma&=\{(x_1,y)|0<x_1<\rho,y\in D_\rho\subset R^{n-2}\}\\ &=(0,\rho)\times D_\rho.\end{aligned}$$

那么， Poincaré 映射 $P : \Sigma \to \Sigma$ 由下式给出

$$P(z) = \{p_1(z), \Phi(t_z, z)\}, \quad z = (x_1, y_0) \in \Sigma,$$

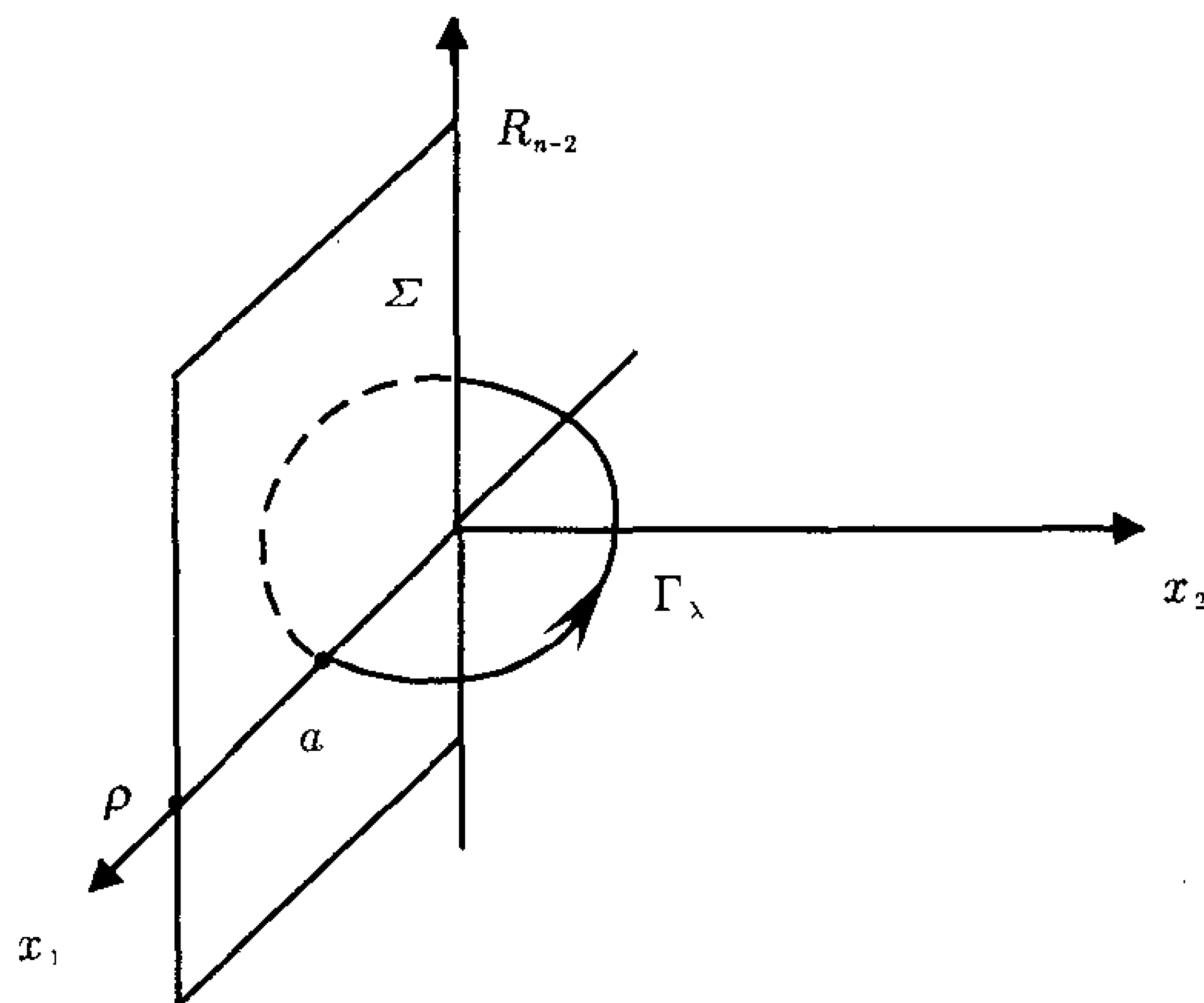


图 5.9

其中 $p_1 : \Sigma \to (0, \rho)$ 是一个后面将定义的映射， $\Phi(t_z, z) \in D_\rho$ 定义为

$$\Phi(t, z) = e^{tB_\lambda} \cdot y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)B_\lambda} G_3(x, \Phi) d\tau. \tag{5.3.21}$$

它是下面方程的解

$$\frac{dy}{dt} = B_\lambda y + G_3(x, y),$$
$$y(0) = y_0,$$

而 t_z 是从 z 出发的 v 的轨道回来与 Σ 相交的时间.

$$\begin{aligned} p_1(z) &= r(2\pi, x_1) \\ &= \frac{x_1}{1 - C(x_1, \lambda)\alpha(\lambda) - b(\lambda)x_1^2 + o(|x_1|^2)} \quad (\text{由}(5.3.19)) \\ &= x_1 + C(x_1, \lambda)\alpha(\lambda)x_1 + b(\lambda)x_1^3 + o(|x_1|^3). \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

因为 x 平面对 $v(x, \lambda)$ 是不变的，这个线段 $(0, \rho) \times \{0\} \subset \Sigma$ 对 Poincaré 映射 P 也是不变的. 因此有

$$\Phi(t_z, z)|_{z=(x_1,0)} = 0. \tag{5.3.23}$$

对于 $P(z)$ 的不动点 $(a_\lambda, 0) \in \Sigma$, 从 (5.3.21)~(5.3.23) 得到

$$DP(a, 0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_1(z)}{\partial x_1} & \\ \dfrac{\partial \Phi(t_z, z)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi(t_z, z)}{\partial y} \end{pmatrix}_{z=(a,0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+c\alpha+3ba_\lambda^2+o(a_\lambda^2) & * \\ 0 & e^{t_z B_\lambda} \end{pmatrix}.$$

因为在 $z=(a,0)$ 点 $t_z=1, a_\lambda$ 是 (5.3.20) 的正解，有

$$a_\lambda^2 = -\frac{1}{b}c\cdot\alpha(\lambda)+o(|\alpha|) = -\frac{2\pi}{b}\alpha(\lambda)+o(|\alpha|).$$

因此 $DP(a,0)$ 的特征值为

$$1-4\pi\alpha(\lambda)+o(|\alpha|),\quad e^{\beta_j(\lambda)},\quad 3\leqslant j\leqslant n.$$

由假设 $\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)\neq 0(3\leqslant j\leqslant n)$, 因此 $DP(a,0)$ 对所有 $|\lambda-\lambda_0|>0$ 充分小是双曲的.

第三步. 最后证明 $m=2$ 的结论 (1).

只需证明充分性，因为必要性的证明类似于 $m-1$ 的情况，令 $b(\lambda_0)>0$ 及 λ_0 是正则的，即

$$\alpha(\lambda)=\Sigma(\lambda-\lambda_0)+o(|\lambda-\lambda_0|),\quad \Sigma\neq 0.$$

当 $v_1\in C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$ 及 $\|v_1-v\|_{C^{3,1}}$ 充分小时，存在 v_1 的一个特征参数 $\lambda_1, |\lambda_1-\lambda_0|\geqslant 0$ 充分小，使得在 λ_1 的附近有

$$Dv_1(0,\lambda)=\begin{pmatrix} \alpha_1(\lambda) & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{B}_\lambda \end{pmatrix},$$

$$\beta\simeq 1,\quad \alpha_1(\lambda)=\Sigma_1(\lambda-\lambda_1)+o(|\lambda-\lambda_1|),\quad \Sigma_1\simeq\Sigma,$$

并且 $\widetilde{B}_\lambda$ 逼近 B_λ. 同时, v_1 的分歧数 $b_1(\lambda_1)$ 也逼近 $b(\lambda_0)$, 因而 $b_1(\lambda_1)>0$, 由上述已证明的结论，对 $\alpha_1(\lambda)<0$ 向量场 v_1 从 $(0,\lambda_1)$ 分歧出唯一周期解分支 Γ_λ^1, 并且对所有 $|\lambda-\lambda_1|>0$ 充分小是双曲的. 这样 Γ_λ^1 和 Γ_λ 是在它们从歧点的同一侧.

在 $C^r(\Omega,R^n)(r\geqslant 1)$ 中向量场双曲周期轨道是局部结构稳定的. 因为参数化向量场 $v\in C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$. 关于参数 λ 是 C^1 的，任何两个向量场 $v(x,\lambda_1)$ 和 $v(x,\lambda_2)$ 在它们的周期轨道 Γ_{λ_1} 和 Γ_λ, 对 $\lambda_1,\lambda_2<\lambda_0$(或 $\lambda_0<\lambda_1,\lambda_2$) 是局部拓扑等价的. 在另一方面, v_1 在 $C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$ 中逼近 v, 对某个固定的参数 $p, v_1(x,\rho)$ 是逼近到 $v(x,\rho)$ 在 $C^3(\Omega,R^n)$ 中. 因此存在 v 的一个邻域 $U\subset C_0^{3,1}(\Omega\times I,R^n)$, 使得对任何 $v_1\in U, v_1(x,\rho)$ 和 $v(x,\rho)$ 在 Γ_ρ^1 和 Γ_ρ 是局部拓扑等价的，这就意味着 v_1 和 v 的分歧点 λ_1 和 λ_0 有相同的分歧结构. 证明完毕.

定理 5.15 的证明 由定理 5.14 可以立刻推得定理的结论 (1) 和 (2). 分歧结构稳定性的开稠性可由下面事实证得：所有特征值都为单的矩阵集合在矩阵

空间中是开稠的．任何一个具有零分歧数的向量场可以被一列具非零分歧数向量场逼近．定理证毕．

§5.4 评　　注

§**5.1** 吸引子分歧定理，定理 5.1 和 5.2 是本书作者新发展的动态分歧理论的核心，在处理物理与化学中的相变问题时该理论被证明是非常有力的．这一节的内容取自文献 [52,53].

§**5.2** 定理 5.10 是作者在这里第一次引入，其他结果是取自文献 [52].

§**5.3** 这一节内容取自文献 [52].

第六章　非线性耗散系统的动态分歧与跃迁

这一章介绍无限维系统的动态分歧与跃迁理论，该理论从某种意义上可以看成是物理与化学中关于非线性耗散系统相变的数学理论．这一点在后面两章关于物理与化学中非平衡相变问题的应用中能得到特别地说明．需要指出的是，状态跃迁的概念和理论是作者在这里首次提出的．可以期待动态分歧与跃迁理论将在非线性科学中的动力学行为研究中起到更广泛的作用．

令 X, X_1 是两个 Banach 空间， $X_1 \hookrightarrow X$ 是一个稠密紧包含．考虑下面非线性演化方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u,\lambda), \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{6.0.1}$$

其中 $u : [0,\infty) \to X$ 是未知函数， $\lambda \in R^1$ 为系统参数．

在这一章中，始终假设 $L_\lambda : X_1 \to X$ 是参数化的线性全连续场，连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B\text{为一个扇形算子}, \\ A : X_1 \to X\text{是一个线性同胚}, \\ B_\lambda : X_1 \to X\text{为线性紧算子}. \end{cases} \tag{6.0.2}$$

对某个 $0 \leqslant \alpha < 1$, 假设 $G(\cdot,\lambda) : X_\alpha \to X$ 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 的有界映射，连续依赖于 $\lambda \in R^1$, 并且满足

$$G(u,\lambda) = o(\|u\|_{H_\alpha}), \quad \forall \lambda \in R^1, \tag{6.0.3}$$

这里 X_α 为扇形算子 L_λ 决定的分数次空间．

除了必要说明，始终假设条件 (6.0.2) 和 (6.0.3) 成立．

§6.1　中心流形函数近似解法

§6.1.1　一阶近似公式

为了讨论方程 (6.0.1) 的动态分歧，必须将方程约化到中心流形上进行讨论．在许多情况下能够具体地将中心流形函数近似解出来是非常重要的．这一节将专门讨论这一问题．

首先假设非线性项 $G(x,\lambda)$ 可展开为如下形式

$$G(u,\lambda)=G_k(u,\lambda)+o(\|u\|_{X_\alpha}^k), \tag{6.1.1}$$

其中 $k\geqslant 2$ 为一整数, $G_k(u,\lambda)$ 为 k 重线性算子.

令 $\{\beta_i(\lambda)\in C \mid i=1,2,\cdots\}$ 是 L_λ 的所有特征值 (计入重数). 假设它们满足下面条件

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases}<0, & \lambda<\lambda_0,\\ =0, & \lambda=\lambda_0, \quad 1\leqslant i\leqslant m,\\ >0, & \lambda>\lambda_0,\end{cases} \tag{6.1.2}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)\neq 0, \quad \forall j\geqslant m+1. \tag{6.1.3}$$

令 $\{e_1(\lambda),\cdots,e_m(\lambda)\}$ 和 $\{e_1^*(\lambda),\cdots,e_m^*(\lambda)\}$ 分别为 L_λ 和其共轭算子 L_λ^* 对应于 $\beta_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant m)$ 的特征向量. 由 4.1 节中关于 Banach 空间的谱定理 (见注 4.2), 空间 X_1 和 X 能够被分解为

$$\begin{cases}X_1=E_1\oplus E_2,\\ X=E_1\oplus \bar{E}_2,\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}&E_1=\mathrm{span}\{e_1(\lambda),\cdots,e_m(\lambda)\},\\ &E_2=\{u\in X_1|\langle u,e_i^k(\lambda)\rangle=0, \quad \forall 1\leqslant i\leqslant m\},\\ &\bar{E}_2\text{是}E_2\text{在}X\text{中的闭包}.\end{aligned}$$

线性算子 L_λ 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近可分解为

$$\begin{aligned}&L_\lambda=J_\lambda+\mathcal{L}_\lambda,\\ &J_\lambda:E_1\to E_1 \quad \text{对应于}\beta_i(\lambda)(1\leqslant i\leqslant M)\text{的 Jordan 矩阵},\\ &\mathcal{L}_\lambda:E_2\to \bar{E}_2, \quad \text{特征值为}\beta_j(\lambda)(j\geqslant m+1)\text{的线性算子}.\end{aligned}$$

此时方程 (6.0.1) 可分解为

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+P_1G(x,y,\lambda), \tag{6.1.4}$$

$$\frac{dy}{dt}=\mathcal{L}_\lambda y+P_2G(x,y,\lambda), \tag{6.1.5}$$

其中 $P_i:X\to E_i$ 为规范投影.

下面定理给出中心流形函数的一阶近似公式，它在许多具体应用中 (包括对超导体相变理论的应用) 是非常有用的.

定理 6.1 在条件 (6.1.2) 和 (6.1.3) 的假设下，若 $G(u,\lambda)$ 有一阶 Taylor 展开式 (6.1.1), 则方程 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近的中心流形函数 $\Phi: E_1\to E_2$ 可表达为如下形式

$$\Phi(x,\lambda)=-\mathcal{L}_\lambda^{-1}P_2G_k(x,\lambda)+O(|\mathrm{Re}\beta|\|x\|^k)+o(\|x\|^k), \tag{6.1.6}$$

其中 $\mathcal{L}_\lambda: E_2\to \bar{E}_2$ 如 (6.1.5) 中给出的线性算子，G_k 如 (6.1.1), $P_2: X\to\bar{E}_2$ 为规范投影，$\beta(\lambda)=\{\beta_1(\lambda),\cdots,\beta_m(\lambda)\}$ 如 (6.1.2) 的特征值，$x=\sum_{i=1}^m x_ie_i\in E_1$.

注 6.1 中心流形函数 $y=\Phi(x,\lambda)$ 的表达公式 (6.1.6) 可等价地写成如下形式

$$-\mathcal{L}_\lambda y=P_2G_k(x,\lambda)+O(|\mathrm{Re}\beta|\|x\|^k)+o(\|x\|^k). \tag{6.1.7}$$

表达式 (6.1.7) 的优点在于当我们在 E_2 中选取 L_λ 对应于 $\beta_j(\lambda)(j\geqslant m+1)$ 的特征向量为基底时，方程 (6.1.7) 的 k 阶齐次项可显式地表达为下面代数方程

$$\beta_j(\lambda)y_j+\alpha_{j+1}y_{j+1}=-\langle G_l(x,\lambda),e_j^*\rangle,\quad j\geqslant m+1, \tag{6.1.8}$$

其中 $\alpha_{j+1}\geqslant 0$ 是由 β_j 决定的 Jordan 数，$y=\sum_{j=m+1}^\infty y_je_j$, e_j 和 e_j^* 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_j(\lambda)$ 的特征向量. 在后面的应用中，就是通过方程 (6.1.8) 解出中心流形函数 $\Phi(x,\lambda)$ 的近似表达 (6.1.6).

定理 6.1 的证明 由 2.4.4 小节中公式 (2.4.26), 方程 (6.1.4) 和 (6.1.5) 的中心流形函数 $\Phi(x,\lambda)$ 满足方程

$$\Phi(x,\lambda)=\int_{-\infty}^0 e^{-\tau\mathcal{L}_\lambda}\rho_\varepsilon P_2G(z(\tau,x),\Phi(z(\tau,x),\lambda))d\tau, \tag{6.1.9}$$

其中 $z(t,x)=\sum_{i=1}^m z_ie_i$ 是下面方程的解

$$\begin{cases}\dfrac{dz_i}{dt}=\beta_iz_i+\rho_\varepsilon(z)\langle G(z+\Phi,\lambda),e_i^*\rangle,\\ z_i(0)=x_i,\quad x=\displaystyle\sum_{i=1}^m x_ie_i,\end{cases} \tag{6.1.10}$$

由 (6.1.1) 及 $\Phi(x,\lambda)=o(\|x\|)$, 从 (6.1.10) 可解出

$$z_i(t,x)=x_ie^{\beta_i(\lambda)t}+o(\|x\|).$$

将 $z(t,x)$ 代入 (6.1.9) 中，从 (6.1.1) 可得

$$\begin{aligned}\Phi(x,\lambda)&=\int_{-\infty}^0 e^{-\tau\mathcal{L}_\lambda}\rho_\varepsilon P_2G_k(xe^{\beta\tau},\lambda)d\tau+o(\|x\|^k)\\&=(-\mathcal{L}_\lambda)^{-1}P_2G(x,\lambda)+O(|\mathrm{Re}\beta|\|x\|^k)+o(\|x\|^k)\quad(\text{由半群性质定理 2.15}).\end{aligned}$$

定理得证.

§6.1.2 中心流形上的约化

现在讨论方程 (6.0.1) 到中心流形上的约化，将中心流形函数 $y=\Phi(x,\lambda)$ 代入到方程 (6.1.4) 中，就得到 (6.0.1) 的约化方程如下

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+P_1G(x,\Phi(x,\lambda),\lambda). \tag{6.1.11}$$

1. 中心流形约化的一阶近似

令 $G(u,\lambda)$ 有如下 Taylor 展开

$$G(u,\lambda)=\sum_{n=k}^{r}G_n(u,\lambda)+o(\|u\|^r),$$

其中 $G_n(u,\lambda)$ 为 n 重线性算子. 由定理 6.1 知，中心流形函数 $\Phi(x,\lambda)$ 为 $x\in E_1$ 的 k 阶算子

$$\Phi(x,\lambda)=O(\|x\|^k).$$

因而约化方程 (6.1.11) 的一阶近似为

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+\sum_{n=k}^{2k-2}P_1G_n(x,\lambda)+o(\|x\|^{2k-2}). \tag{6.1.12}$$

2. 中心流形约化的二阶近似

当一阶近似方程 (6.1.12) 不能有效反映 (6.1.11) 的分歧性质时，应用定理 6.1, 我们能够取方程 (6.1.11) 的二阶近似. 令 $\Phi_k(x,\lambda)=-\mathcal{L}_\lambda^{-1}P_2G_k(x,\lambda)$, 则 (6.1.11) 的二阶近似为

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+P_1G_k(x,\Phi_k,\lambda)+\sum_{n=k}^{N_k}P_1G_n(x,\lambda)+o(\|x\|^{N_k}), \tag{6.1.13}$$

其中 $N_k=k(k-1)+1$.

§6.2 S^m 吸引子分歧定理

§6.2.1 关于时间一阶导数方程

在这一小节，我们将有限维 S^m 吸引子分歧定理推广到无穷维方程 (6.0.1) 中. 令 L_λ 的特征值为

$$\{\beta_j(\lambda)|j=1,2,\cdots\}\subset C.$$

假设它们满足

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases}<0, & \lambda<\lambda_0,\\ =0, & \lambda=\lambda_0, \quad 1\leqslant i\leqslant m,\\ >0, & \lambda>0,\end{cases} \tag{6.2.1}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)<0, \quad \forall j\geqslant m+1. \tag{6.2.2}$$

令 L_λ 在 λ_0 的特征空间为

$$E_0=\cup_{1\leqslant i\leqslant m}\cup_{k\in N}\{u\in X_1|(L_{\lambda_0}-\beta_i(\lambda_0))^k u=0\}.$$

由 (6.2.1) 可知 $\dim E_0=m$.

下面给出的就是关于无穷维系统 (6.0.1) 的吸引子分歧定理，它是定理 5.1 的一个无穷维观点.

定理 6.2 假设条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立，并且 $u=0$ 是方程 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点，则下面结论成立：

(1) 方程 (6.0.1) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda>\lambda_0$ 分歧出一个吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$, 其维数为 $m-1\leqslant \dim\mathcal{A}_\lambda\leqslant m$, 并且当 $m\geqslant 2$ 时 $\mathcal{A}_\lambda$ 是连通的；

(2) 存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X$, 使得 $\mathcal{A}_\lambda$ 吸引 U/Γ, 这里 Γ 为 $u=0$ 的稳定流形，在 X 中有余维 m;

(3) $\mathcal{A}_\lambda$ 是一个 $(m-1)$ 维的同调球，特别地，若 $\mathcal{A}_\lambda$ 为有限单复形，则 $\mathcal{A}_\lambda$ 与球面 S^{m-1} 同伦型；

(4) 对任何 $u_\lambda\in\mathcal{A}_\lambda, u_\lambda$ 能够表达为

$$u_\lambda=v_\lambda+o(\|v_\lambda\|), v_\lambda\in E_0;$$

(5) 如果 $\mathcal{A}_\lambda$ 中的奇点数是有限的，那么有如下指标公式

$$\sum_{u_i\in\mathcal{A}_\lambda}\mathrm{ind}(-(L_\lambda+G),u_i)=\begin{cases}2, & \text{当}m=\text{奇数},\\ 0, & \text{当}m=\text{偶数};\end{cases}$$

(6) 若 $u=0$ 是 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 全局渐近稳定的平衡点，那么对任何有界开集 $U\subset X, \mathcal{A}_\lambda\subset U$, 存在 $\varepsilon>0$, 使当 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ 时，$\mathcal{A}_\lambda$ 吸引 U/Γ. 特别地，若 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近存在全局吸引子，则 $\mathcal{A}$ 吸引 H/Γ.

证明 由中心流形的规范约化 (6.1.11), 方程 (6.0.1) 的吸引子分歧是等价于下面约化方程

$$\frac{dx}{dt}=J_{m\lambda}+P_1G(x,\Phi(x,\lambda),\lambda), \tag{6.2.3}$$

其中 $J_{m\lambda}$ 为对应于满足 (6.2.1) 特征值 $\beta_i(\lambda)(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的 m 阶 Jordan 矩阵. 由 (6.0.3) 可知

$$P_1G(x, \Phi(x, \lambda), \lambda) = o(\|x\|).$$

因为 $u = 0$ 是关于 (6.0.1) 局部渐近稳定的, 故 $x = 0$ 是 (6.2.3) 局部渐近稳定平衡点. 因而定理中结论 (1)~(5) 可从定理 5.1 推出. 而结论 (6) 可以吸引子稳定性定理 (定理 3.5) 推出. 定理证毕.

当 (6.2.1) 中特征值重数 $m = 1$ 时, 对于无穷维系统 (6.0.1) 定理 5.4 的结论也是成立的.

定理 6.3 在定理 6.2 的条件下, 若在 (6.2.1) 中 $m = 1$, 并且 $G(u, \lambda)$ 在 $u = 0$ 关于 u 是解析的, 那么存在一个开集 $U \subset X, 0 \in U$, 使得方程 (6.0.1) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 处分歧出严格的两个奇点分支 $u_1(\lambda), u_2(\lambda) \in U$, 并且 U 能够分解成两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ, 满足

(1) $\bar{U} = \bar{U}_1^\lambda + \bar{U}_2^\lambda, \quad U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \varnothing$;

(2) $u_i(\lambda) \in U_i^\lambda, \quad i = 1, 2, \quad \partial U_1^\lambda \cap \partial U_2^\lambda$ 是 $u = 0$ 的稳定流形;

(3) 对任何 $\varphi \in U_i^\lambda, \quad i = 1, 2,$

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t, \varphi) - u_i(\lambda)\|_X = 0,$$

其中 $u(t, \varphi)$ 是 (6.0.1) 的解.

注 6.2 需要强调地指出, 定理 6.2 中结论 (2) 和 (4) 在具体应用中是非常有用的. 结论 (2) 或定理 6.3 明确地告诉了我们系统 (6.0.1) 分歧出新状态的稳定范围. 应用传统理论虽然对单特征值情况, 有时可断定分歧出奇点的局部稳定性, 然而它在本质上无法确定该稳定区域是否包括 $u = 0$ 的一个邻域 U, 除了 $u = 0$ 的稳定流形外. 结论 (4) 告诉我们分歧以解的结构是由 E_0 中特征向量决定的, 这一点在流体动力学中是很重要的.

§6.2.2 关于时间二阶导数的方程

在这一小节, 我们主要关心一类具有阻尼项的关于时间具有二阶导数的非线性演化方程吸引子分歧问题. 这类问题本质上就是非线性波方程的抽象化. 考虑下面方程

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha\dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi, \\ u_t(0) = \psi, \end{cases} \tag{6.2.4}$$

其中常数 $\alpha > 0$ 为阻尼系数, $L_\lambda, G(\cdot, \lambda) : X_1 \to X$ 如 (6.0.2) 和 (6.0.3) 所定义, 这里 X_1 和 X 都是 Hilbert 空间. 为了便于区分, 记为 $H_1 = X_1, H = X$.

这里，进一步假设

$$G(\cdot,\lambda): H_{\frac{1}{2}} \to H \text{ 是} C^r (r \geqslant 1) \text{有界的}. \tag{6.2.5}$$

然后，有下面 S^m 吸引子分歧定理.

定理 6.4 假设条件 (6.2.1),(6.2.2) 和 (6.2.5) 成立，那么对于方程 (6.2.4)，有如下结论:

(1) 若 $\lambda < \lambda_0$，则 $u = 0$ 是 (6.2.4) 的局部渐近稳定平衡点;

(2) 若 $u = 0$ 是 (6.2.4) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点，那么定理 6.2 的所有结论对方程 (6.2.4) 都成立.

证明 为了证明简单，这里仅仅考虑 $L_\lambda : H_1 \to H$ 为对称线性算子的情况，对于非对称情况证明是类似的. 分下面几步进行.

第一步. 归到时间一阶导数方程. 容易验证方程 (6.2.4) 是等价于下面关于时间为一阶导数的方程

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\alpha u + v, \\ \dfrac{dv}{dt} = L_\lambda u + \alpha^2 u - \alpha v + G(u,\lambda), \\ (u(0), v(0)) = (\varphi_0, \psi_0), \end{cases} \tag{6.2.6}$$

其中 $\varphi_0 = \varphi, \psi_0 = \psi + \alpha\varphi$. 为了能够应用中心流形定理 (定理 2.24)，需要将方程 (6.2.6) 归到 (6.0.1) 的形式.

为此定义两个 Hilbert 空间

$$\mathcal{H}_1 = H_1 \times H_{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{H} = H_{\frac{1}{2}} \times H,$$

其内积分别定义为

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u_1,u_2\rangle_{H_1} + \langle v_1,v_2\rangle_{H_{\frac{1}{2}}},$$

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u_1,u_2\rangle_{H_{\frac{1}{2}}} + \langle v_1,v_2\rangle_{H}.$$

定义映射 $\widetilde{L}_\lambda : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}, \widetilde{G}(\cdot,\lambda) : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ 为

$$\widetilde{L}_\lambda = -\widetilde{A} + \widetilde{B}_\lambda,$$
$$\widetilde{G}(u,v,\lambda) = (0, G(u,\lambda)),$$

其中

$$\widetilde{A}(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha I & -I \\ A & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u - v \\ Au + \alpha v \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}(u,v)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha^2 I+B_\lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \alpha^2 u+B_\lambda u\end{pmatrix}.$$

这样 (6.2.6) 就改写为

$$\frac{dw}{dt}=\widetilde{L}_\lambda w+\widetilde{G}(w,\lambda). \tag{6.2.7}$$

这里 $w=(u,v)\in H_1$. 从 (6.2.5) 可知

$$\begin{cases}\widetilde{G}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}\text{是}C^r\text{有界},\\ \widetilde{G}(w,\lambda)=o(\|w\|_{\mathcal{H}}).\end{cases} \tag{6.2.8}$$

第二步. 结论 (1) 的证明. 由于考虑 L_λ 为对称的, 那么, 存在 L_λ 的一列特征向量 $\{e_k(\lambda)\}\subset H_1$ 构成 H 的一个规范正交基. 进一步, 对 H_α 取合适的范数能够使 $\{e_k(\lambda)\}$ 为 $H_\alpha(\alpha\in R)$ 的公共正交基. 那么容易看到, $\widetilde{L}_\lambda$ 的特征值由下式给出

$$\rho_k(\lambda)=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta_k(\lambda)},\quad k=1,2,\cdots. \tag{6.2.9}$$

由 (6.2.1) 和 (6.2.2) 可知, 对任何 $\lambda<\lambda_0$, 有

$$\mathrm{Re}\rho_k(\lambda)<0,\quad k=1,2,\cdots. \tag{6.2.10}$$

此外, 容易验证由线性算子 $\widetilde{L}_\lambda$ 生成的算子半群 $T_\lambda(t)$ 由下面表达式给出

$$T_\lambda(t)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}=e^{-\alpha t}\begin{pmatrix}\Phi_1(t) & \mathcal{L}^{-\frac{1}{2}}\Phi_2(t)\\ \mathcal{L}_\lambda^{\frac{1}{2}}\Phi_2(t) & \Phi_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \tag{6.2.11}$$

对任 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{H}_1$, 其中

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_\lambda=L_\lambda+\alpha^2 I,\\ &\Phi_1(t)=\cos ht\mathcal{L}_\lambda=\frac{1}{2}(e^{-t\mathcal{L}_\lambda^{\frac{1}{2}}}+e^{t\mathcal{L}_\lambda^{\frac{1}{2}}}),\\ &\Phi_2(t)=\sin ht\mathcal{L}_\lambda=\frac{1}{2}(e^{t\mathcal{L}_\lambda^{\frac{1}{2}}}-e^{-t\mathcal{L}_\lambda^{\frac{1}{2}}}).\end{aligned}$$

也就是说, 对任 $(\varphi,\psi)\in\mathcal{H}$,

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e_k,\quad \psi=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k e_k.$$

有

$$\Phi_1(t)\varphi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\left(e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta_k}}+e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta_k}}\right)e_k$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\varphi_k\cos t\sqrt{|\beta_k|-\alpha^2}e_k,$$

$$\Phi_2(t)\psi=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\psi_k\left(e^{t\sqrt{\alpha^2+\beta_k}}-e^{-t\sqrt{\alpha^2+\beta_k}}\right)e_k$$

$$-i\sum_{k=N+1}^{\infty}\psi_k\sin t\sqrt{|\beta_k|-\alpha^2}e_k.$$

其中取合适的正整数 N, 使

$$\alpha^2+\beta_k\begin{cases}\geqslant 0, & 若k\leqslant N,\\ <0, & 若k>N.\end{cases}$$

通过直接计算可以证得，存在一个常数 $k>0$，使得对任何 $t\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(t)\|=&\sup_{\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}+\|\psi\|_0}e^{-\alpha t}[\|\Phi_1(t)\varphi+\mathcal{L}_\lambda^{-\frac{1}{2}}\Phi_2(t)\psi\|_{\frac{1}{2}}\\&+\|\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\Phi_2(t)\varphi+\Phi_1(t)\psi\|_0]\\&\leqslant ke^{-\alpha t},\end{aligned}\tag{6.2.12}$$

那里由 (6.2.10)

$$\rho=\min_k|\mathrm{Re}\rho_k|>0,$$

以及范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 定义为

$$\|\varphi\|_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|^{2\alpha}\varphi_k^2,\quad \forall\alpha\in R^1.$$

这表明 $T_\lambda(t)$ 是一个强连续线性算子半群. 由 (6.2.12) 和定理 3.3, 结论 (1) 得证.

这里使用 L_λ 是对称算子就是为了方便地证明由 (6.2.11) 给出的算子半群 $T_\lambda(t)$ 是强连续的并且满足 (6.2.12). 事实上，只要 L_λ 是解析半群并且 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立，则算子半群 (6.2.11) 就是强连续且满足 (6.2.12).

第三步. 结论 (2) 的证明. 只需验证中心流形定理 (定理 2.24) 的不等式条件即可.

在正交基 $\{e_k(\lambda)\}$ 下，方程 (6.2.7) 可以分解为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=-\alpha x_i+y_i, & 1\leqslant i\leqslant m,\\ \dfrac{dy_i}{dt}=\beta_i(\lambda)x_i+\alpha^2x_i-\alpha y_i+G_i(u,\lambda), & 1\leqslant i\leqslant m,\end{cases}\tag{6.2.13}$$

$$\frac{dw}{dt} = \widetilde{\mathcal{L}}_\lambda w + PG(u,\lambda), \tag{6.2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}
&u = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i + w_1,\\
&v = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i + w_2,\\
&w = (w_1, w_2) \in E_\lambda,\\
&E_\lambda = \{(w_1,w_2) \in \mathcal{H} | \langle w_j, e_i\rangle_H = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad j = 1,2\},
\end{aligned}$$

以及 $\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda = \widetilde{L}_\lambda|_{E_\lambda} : E_\lambda \to E_\lambda$ 被定义为

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda(w_1,w_2) = \begin{pmatrix} -\alpha I & I \\ L'_\lambda + \alpha^2 I & -\alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\\
&L'_\lambda = L_\lambda|_{\widetilde{H}},\\
&\widetilde{H} = \text{span}\{e_{m+1}, e_{m+2}, \cdots\} \subset H.
\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda$ 的特征值由 (6.1.9) 给出为 $\rho_k (k \geqslant m+1)$, 以及由 $\widetilde{\mathcal{L}}_\lambda$ 生成的线性算子半群为

$$S_\lambda(t) = T_\lambda(t)|_{E_\lambda} : E_\lambda \to E_\lambda,$$

这里 $T_\lambda(t)$ 由 (6.2.11) 所定义.

正如 (6.2.12) 的证明那样, 从 (6.2.2) 可推出

$$\begin{cases} \|S_\lambda(t)\| \leqslant K e^{-\rho t}, & \forall t \geqslant 0, \\ \rho = \min\limits_{k \geqslant m+1} |\text{Re}\rho_k(\lambda)|, & \forall |\lambda - \lambda_0| \text{充分小}. \end{cases}$$

因此定理 2.24 中条件被验证. 定理证毕.

现在考虑单特征值情况, 即在 (6.2.1) 中, $m = 1$. 令

$$\begin{cases} G(u,\lambda) = G_k(u,\lambda) + o(\|u\|^k), \\ G_k(xu_0,\lambda) = |x|^{k-1} x G_k(u_0,\lambda), \quad \forall x \in R^1, \end{cases} \tag{6.2.15}$$

其中 $k > 1$ 为一实数. 又假设

$$\langle G_k(e,\lambda_0), e^* \rangle_H = -\sigma, \quad \sigma > 0, \tag{6.2.16}$$

其中 e 和 e^* 是 L_λ 和 L_λ^* 在 $\lambda = \lambda_0$ 对应于 $\beta_1(\lambda)$ 的特征向量.

定理 6.5 假设定理 6.3 的条件成立, $m=1$ 在 (6.2.1) 中, 并且有 (6.2.15) 和 (6.2.16). 那么存在 $(u,u_t)=(0,0)$ 的一个邻域 $U\subset H_1\times H_{\frac{1}{2}}$, 使得 (6.2.4) 从 $(u,u_t,\lambda)=(0,0,\lambda_0)$ 分歧出严格两个平衡解 $(u_{1\lambda},0)$ 和 $(u_{2\lambda},0)\in U$. 进一步, U 能够被分解成两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ:

$$\bar{U}=\bar{U}_1^\lambda+\bar{U}_2^\lambda,\quad U_1^\lambda\cap U_2^\lambda=\varnothing,\quad (0,0)\in\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda,$$

并且平衡解 $(u_{i\lambda},0)\in U_i^\lambda(i=1,2)$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\varphi,\psi)-u_{i\lambda}\|_{H_{\frac{1}{2}}}=0,\quad \forall(\varphi,\psi)\in U_i^\lambda,$$
$$\lim_{t\to\infty}\|u_t(t,\varphi,\psi)\|_H=0,$$

其中 $u(t,\varphi,\psi)$ 是方程 (6.2.4) 的解.

证明 从 (6.2.13) 和 (6.2.14) 可以看到, 方程 (6.2.4) 的约化方程由下式给出

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\alpha x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta_1(\lambda)x+\alpha^2x-\alpha y+\langle G(xe_1+\Phi(x,\lambda),\lambda),e_1^*\rangle_H.\end{cases}\tag{6.2.17}$$

由 (6.2.15) 和 (6.2.16) 有

$$\langle G(xe_1+\Phi(x,\lambda),\lambda),e_1^*\rangle_H=-\sigma_\lambda|x|^{k-1}x+o(|x|^k).$$

作变量变换如下

$$x=\widetilde{x},\quad y=\widetilde{y}+\alpha\widetilde{x}.$$

那么在 $\lambda=\lambda_0$ 附近, 分歧方程 (6.2.17) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{x}}{dt}=\widetilde{y},\\ \dfrac{d\widetilde{y}}{dt}=-2\alpha\widetilde{y}-\sigma_\lambda|\widetilde{x}|^{k-1}\widetilde{x}+o(|\widetilde{x}|^k),\end{cases}\tag{6.2.18}$$

其中 $\sigma_\lambda\to\sigma>0$, 当 $\lambda>\lambda_0,\sigma$ 由 (6.2.16) 给出.

由定理 5.4, 只需证明 $(\widetilde{x},\widetilde{y})=(0,0)$ 是 (6.2.18) 的局部渐近稳定平衡点即可. 这一点能够通过应用定理 3.12 来证得, 其方法与对方程 (3.4.7) 的证明是完全一样的. 定理证毕.

§6.3 跃迁理论的一般原理

§6.3.1 基本概念和问题

这一节将介绍一个新的理论, 称为非线性耗散系统的跃迁理论. 从数学上讲, 该体系实质上是吸引子分歧理论的自然推广, 它主要目的就是研究一个具

有耗散结构的非线性演化方程，当控制参数穿过某个临界值时其动力系统从一个稳定的状态跃迁到另一个稳定状态的动力学性质. 从自然背景角度来说，该理论实际上是反映了自然界中普遍存在的一种状态变迁的现象. 自然界中一个演化系统总是受到一些因素 (在数学中称为参数) 的控制. 当这些因素相互之间是平衡时，系统处在一个动态稳定状态. 而当旧的平衡被破坏，参变量越过某个临界值时，旧的平衡状态不再稳定，系统会跃迁到一个新的状态. 这就是跃迁理论所要研究的课题.

首先给出系统 (6.0.1) 跃迁的严格数学定义.

定义 6.1 称方程 (6.0.1) 从平衡点 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda>\lambda_0$ (或 $\lambda<\lambda_0$) 有一个跃迁，如果

(1) 当 $\lambda<\lambda_0$(或 $\lambda>\lambda_0$) 时， $u=0$ 关于 (6.0.1) 是局部渐近稳定的;

(2) 当 $\lambda>\lambda_0$(或 $\lambda<\lambda_0$) 时，存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X,U$ 与 λ 无关，使得对任 $\varphi\in U\setminus\Gamma_\lambda$, 方程 (6.0.1) 的解 $u_\lambda(t,\varphi)$ 满足

$$\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\|u_\lambda(t,\varphi)\|_X\geqslant\delta(\lambda)>0,\\ \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}\delta(\lambda)=\delta\geqslant0\quad(\text{或}\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}\delta(\lambda)=\delta\geqslant0),\end{cases}$$

其中 Γ_λ 为 $u=0$ 的稳定流形，对于 $\lambda>\lambda_0$(或 $\lambda<\lambda_0$), Γ_λ 在 X 中有余维 codim $\Gamma_\lambda\geqslant1$.

显然，由 S^m 吸引子分歧定理给出的吸引子分歧是属于跃迁的一种类型，然而跃迁的概念不能覆盖分歧的概念. 分歧与跃迁是相互关联的，但是它们是不同的两个概念. 跃迁严格地界定了系统从一种稳定平衡态到另一状态的变化. 也可以定义从一般吸引子到另一状态的跃迁概念，但是这里我们只关心从一个奇点吸引子的跃迁.

下面给出的是关于跃迁的一个基本原理，它对非线性耗散系统 (6.0.1) 提供了跃迁的充分条件和基本分类. 该定理是整个跃迁理论的基础.

定理 6.6 在条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 假设下，方程 (6.0.1) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda>\lambda_0$ 有一个跃迁，并且该跃迁一定是下面三种类型之一:

(1) 连续型跃迁: 对 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X$ 及任何 $\varphi\in U$, 方程 (6.0.1) 的解 $u_\lambda(t,\varphi)$ 满足

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_\lambda(t,\varphi)\|_X=0.$$

或等价地， (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 有一个吸引子分歧.

(2) 跳跃型跃迁: 存在 $\varepsilon>0$, 对任 $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$, 存在 U 中的一个开稠集 $U_\lambda\subset U$, 使对任 $\varphi\in U_\lambda$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_\lambda(t,\varphi)\|_X\geqslant\delta>0,$$

这里 $\delta > 0$ 是一个与 λ 无关的常数. 这也称为不连续型跃迁.

(3) 混合型跃迁: 对任 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, U 能够分解为两个开集 U_1^λ 和 U_2^λ(U_i^λ 不一定连通):

$$U \setminus \Sigma = U_1^\lambda + U_2^\lambda, \quad U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \varnothing,$$

其中 $\Sigma \subset U$ 是一个余维 codim $\Sigma \geqslant 1$ 的集合, 使得 (6.0.1) 的解 $u_\lambda(t, \varphi)$ 满足

$$\begin{cases} \sup\limits_{\varphi \in U_1^\lambda} \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \to 0, & \text{当}\lambda \to \lambda_0 + 0, \\ \overline{\lim\limits_{t \to \infty}} \|u_\lambda(t, \varphi)\|_X \to \delta > 0, & \forall \varphi \in U_2^\lambda, \end{cases}$$

其中 U_1^λ 或者含有吸引子, 或者没有吸引子. U_1^λ 称为稳定型区域, U_2^λ 称为跳跃型区域.

该定理是中心流形定理, 稳定流形定理及吸引子分歧定理等几个定理的推论. 这里省去证明.

定理 6.6 给出跃迁理论所需要研究的内容与范围, 它们大致可以总结为如下几个方面:

(1) 给出满足条件 (6.2.1) 及 (6.2.2) 的线性算子理论, 即称为特征值临界穿越理论;

(2) 对各种情况找出跃迁类型的判别理论与方法;

(3) 对各种跃迁类型的局部与整体结构的研究;

(4) 跃迁理论在混沌方面的研究 (一般来讲, 若干次跃迁将产生混沌).

毫无疑问, 跃迁理论具有很强的科学与工程应用背景. 该理论与整体吸引子存在性理论、分歧理论及不变流形理论相结合, 可以相信, 具有广泛的研究前景.

§6.3.2 跃迁类型的判别

跃迁理论的一个重要方面就是对上述三种跃迁类型给出判定. 在这三种类型中, 连续型跃迁的判别是最完整. 由吸引子分歧定理和吸引子稳定性定理立刻可得下面连续型跃迁的充分和必要条件.

定理 6.7 令条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立. 则方程 (6.0.1) 在 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 处的跃迁是连续型的充要条件就是 $u = 0$ 是方程 (6.0.1) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点.

其他两种类型的判别就没有那么完整. 跃迁类型判别的一个有效的方法就是对中心流形的约化方程进行考察. 令 (6.0.1) 的约化方程 (6.1.11) 可表达为如下形式

$$\frac{dx}{dt} = J_\lambda x + g_k(x, \lambda) + o(|x|^k), \quad x \in R^m, \tag{6.3.1}$$

其中 $k>1, g_k(x,\lambda)$ 为 x 的 k 齐次函数, J_λ 为对应于满足 (6.2.1) 特征值的 Jordan 矩阵. 我们知道方程 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 处的跃迁类型完全由方程 (6.3.1) 所决定. 所以对 (6.3.1) 的跃迁研究是跃迁理论的重要部分.

当 $x=0$ 是 $g_k(x,\lambda)$ 的孤立零点时, 许多情况下 (6.3.1) 的跃迁被它的主部方程所控制, 即下面方程

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+g_k(x,\lambda) \tag{6.3.2}$$

包含了 (6.3.1) 的主要跃迁性质. 在本章后面的部分大多是从 (6.3.2) 的研究出发, 最后得到 (6.0.1) 的跃迁理论.

下面定理是显然的, 然而很有用处.

定理 6.8 令 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立. 如果对于 (6.0.1) 的约化方程 (6.1.2), 其 k 齐次向量场 $g_k(x,\lambda)$ 满足

$$\langle g_k(x,\lambda),x\rangle \geqslant C|x|^{k+1},\quad C>0\text{为常数},$$

则方程 (6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 处是一个跳跃型跃迁.

§6.4 从单特征值的跃迁

§6.4.1 实单特征值情况

令 L_λ 的特征值 $\beta_j(\lambda)\in C$ 满足

$$\begin{cases}\beta_1(\lambda)\begin{cases}<0, & \lambda<\lambda_0,\\ =0, & \lambda=\lambda_0,\\ >0, & \lambda>\lambda_0,\end{cases}\\ \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)<0, \quad \forall j\geqslant 2.\end{cases} \tag{6.4.1}$$

记 $e_1(\lambda)$ 与 $e_1^*(\lambda)$ 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_1(\lambda)$ 的特征向量, 以及

$$L_{\lambda_0}e_1=0,\quad L_{\lambda_0}^*e_1^*=0,\quad \langle e_1,e_1^*\rangle=1.$$

令 $\Phi(x,\lambda)$ 为 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近的中心流形函数. 假设

$$\langle G(xe_1+\Phi(x,\lambda_0),\lambda_0),e_1^*\rangle=\alpha x^k+o(|x|^k), \tag{6.4.2}$$

其中 $k\geqslant 2$ 为整数, $\alpha\neq 0$.

然后有下面跃迁定理.

定理 6.9 假设条件 (6.4.1) 成立, 并且在 (6.4.2) 中 $k=$ 奇数, $\alpha\neq 0$, 那么下面结论成立:

(1) 若 $\alpha > 0$, 则 (6.0.1) 在 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 处有一个跳跃型的跃迁，并且在 $\lambda < \lambda_0$ 一侧分歧出严格两个鞍点 $v_1(\lambda)$ 和 $v_2(\lambda)$, 其 Morse 指数为 1;

(2) 若 $\alpha < 0$, 则 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 处是一个连续型的跃迁，即有一个吸引子分歧，并且分歧出严格两个奇点 $v_i(\lambda)(i=1,2)$, 分别吸引 U 的两个开子集， U 为 $u=0$ 的邻域;

(3) 在上述情况分歧出的奇点 $v_i(\lambda)(i=1,2)$ 可表达为

$$v_{1,2}(\lambda) = \pm|\beta_1(\lambda)/\alpha|^{\frac{1}{k-1}}e_1(\lambda) + o(|\beta_1/\alpha|^{\frac{1}{k-1}}).$$

定理 6.10 令 (6.4.1) 成立，并且在 (6.4.2) 中 $k=$ 偶数， $\alpha \neq 0$, 则有下面结论:

(1) 方程 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 处是一个混合型跃迁. 更精确地，存在 $u=0$ 的一个邻域 $U \subset X$, U 被 $u=0$ 的稳定流形 Γ_λ 分为两个开集 U_1^λ 和 $U_2^\lambda : U = U_1^\lambda + U_2^\lambda + \Gamma_\lambda$, 使得 (6.0.1) 在 U_1^λ 中是不连续型跃迁，而在 U_2^λ 中分歧出一个奇点吸引子 $v(\lambda) \in U_2^\lambda$, 满足

$$\lim_{t\to\infty} \|u_\lambda(t,\varphi) - v(\lambda)\|_X = 0, \quad \forall\varphi \in U_2^\lambda,$$

其中 $u_\lambda(t,\varphi)$ 为 (6.0.1) 的解;

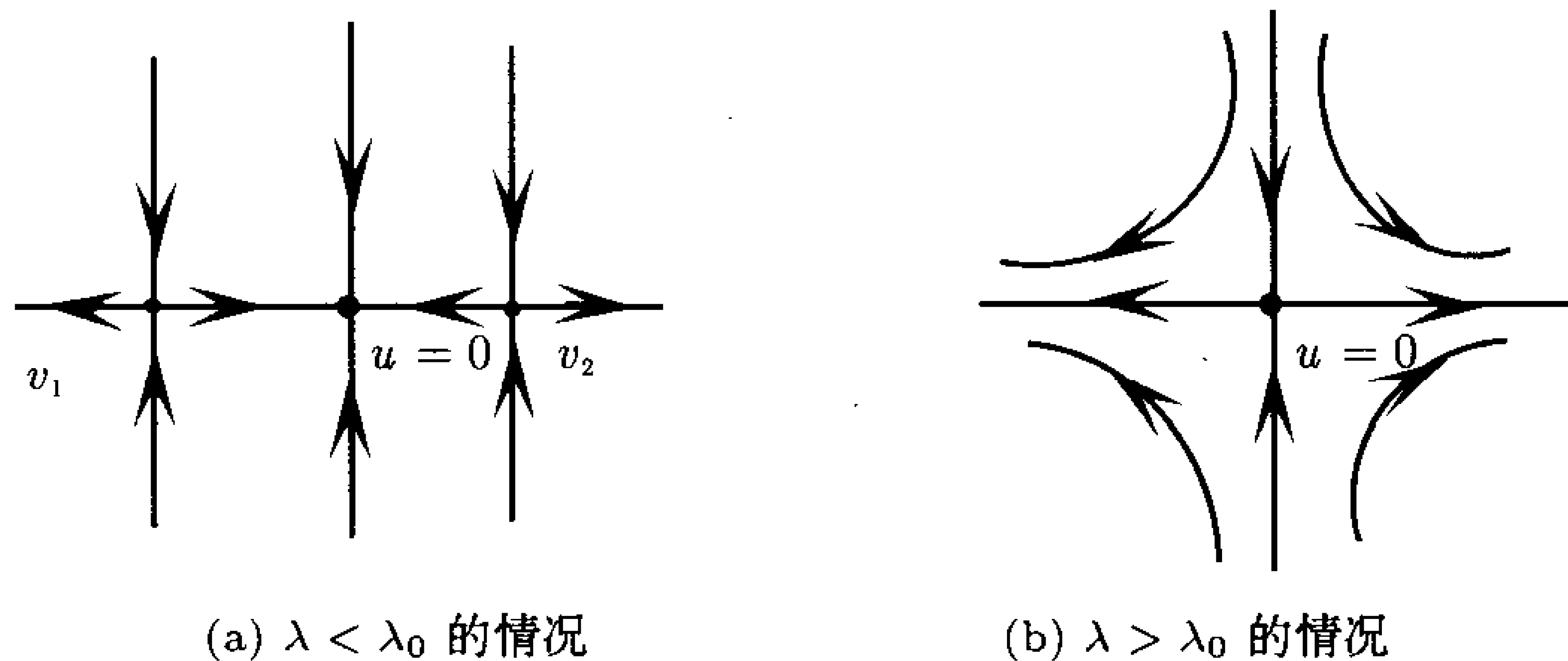
(2) 方程 (6.0.1) 在 $\lambda < \lambda_0$ 一侧分歧出唯一的鞍点 $v(\lambda)$, 其 Morse 指数为 1;

(3) 分歧出的奇点 $v(\lambda)$ 可表示为

$$v(\lambda) = -(\beta_1(\lambda)/\alpha)^{1/k-1}e_1 + o(|\beta_1/\alpha|^{1/k-1}).$$

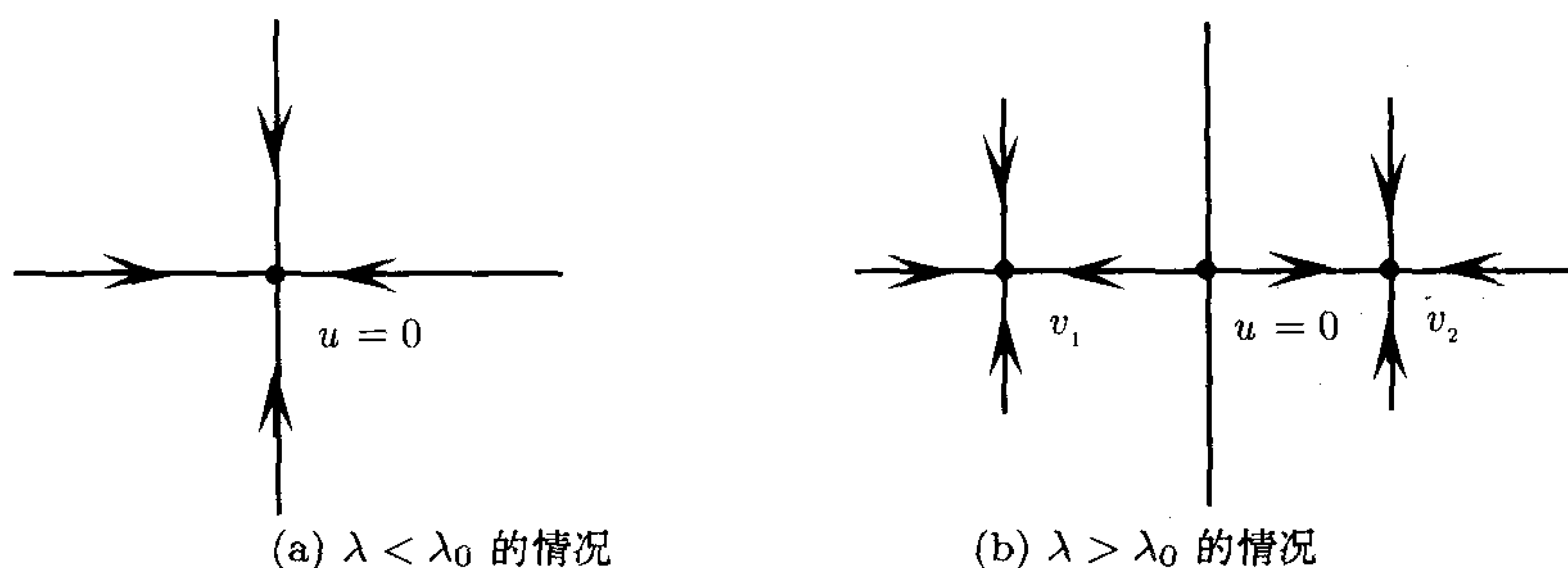
注 6.3 定理 6.9 和 6.10 表明，在 (6.4.2) 条件下，从实单特征值处的混合跃迁其稳定型区域内一定具有分歧吸引子. 但是对于双重实特征值情况，后面我们将看到有些情况稳定型区域内没有吸引子.

注 6.4 由定理 6.9~6.10 所描述的跃迁在中心流形上的拓扑结构如图 6.1~6.3 所示.



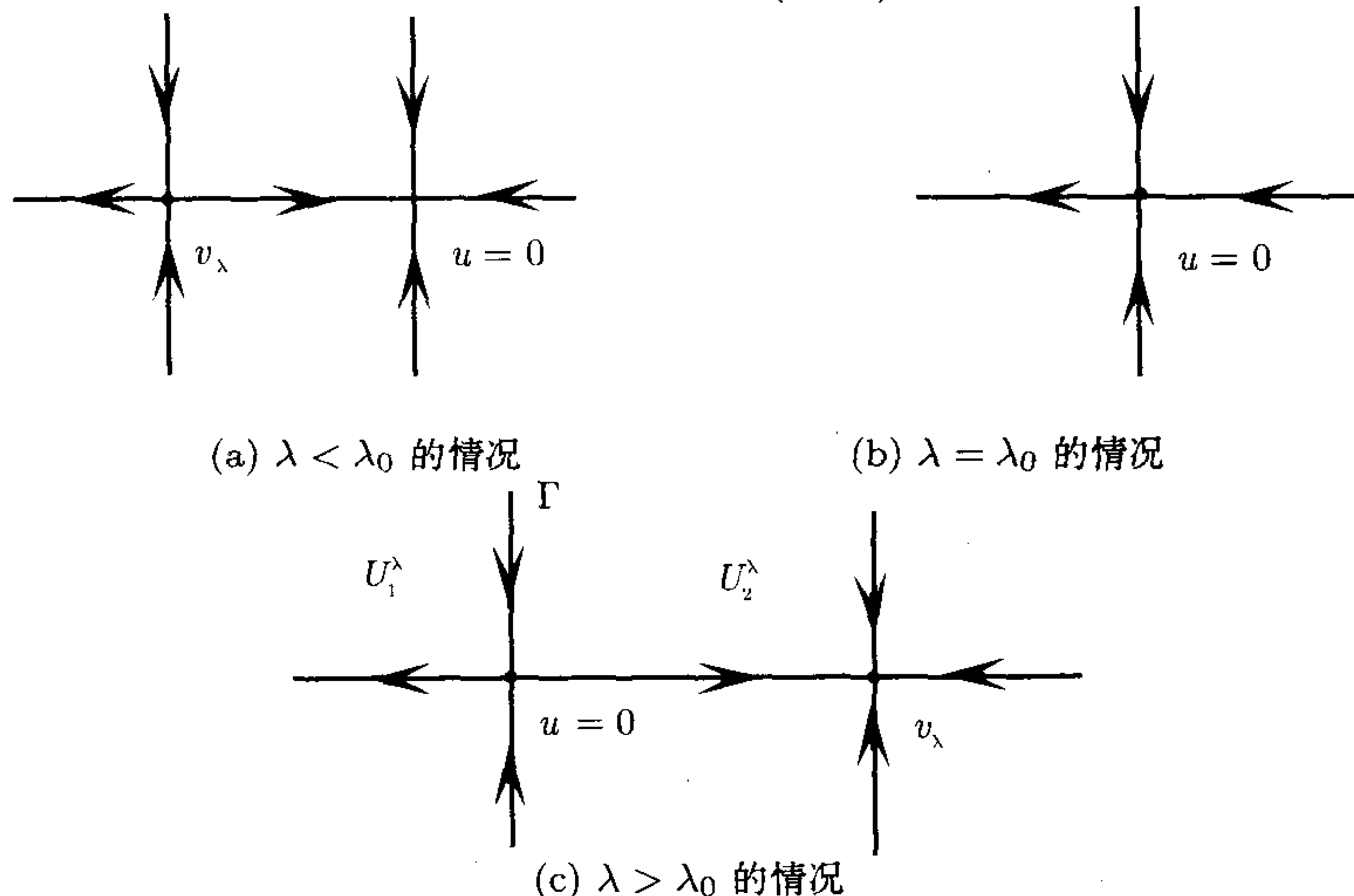
(a) $\lambda < \lambda_0$ 的情况　　(b) $\lambda > \lambda_0$ 的情况

图 6.1 水平线代表中心流形



(a) $\lambda<\lambda_0$ 的情况　　(b) $\lambda>\lambda_0$ 的情况

图 6.2　当 $k=$ 奇数， $\alpha<0$ 时， (6.0.1) 连续跳跃拓扑结构



(a) $\lambda<\lambda_0$ 的情况　　(b) $\lambda=\lambda_0$ 的情况

(c) $\lambda>\lambda_0$ 的情况

图 6.3　当 $k=$偶数， $\alpha\neq 0$ 时， (6.0.1) 的混合跃迁拓扑结构

定理 6.9~6.10 的证明　由规范约化方程 (6.1.11), 方程 (6.0.1) 在条件 (6.4.1) 下的约化为如下形式

$$\frac{dx}{dt}=\beta_1(\lambda)x+\langle G(xe_1(\lambda)+\Phi(x,\lambda)),e_1^*(\lambda)\rangle. \tag{6.4.3}$$

由条件 (6.4.2), 方程 (6.4.3) 可写为

$$\frac{dx}{dt}=\beta_1(\lambda)x+\alpha_\lambda x^k+o(|x|^k),\quad x\in R^1, \tag{6.4.4}$$

其中 $\alpha_\lambda\to\alpha\neq 0$, 当 $\lambda\to\lambda_0$.

方程 (6.4.4) 就是 (6.3.1) 在 $m=1$ 的形式. 容易看出，当 $k=$ 奇数及 $\alpha>0$ 时，对 $\beta_1(\lambda)>0(\lambda>\lambda_0)$, (6.4.4) 的解满足

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}|x_\lambda(t,x_0)|>\delta,\quad \forall|x_0|<\varepsilon\text{及}\lambda>\lambda_0,$$

$\delta>0$ 为某个常数， $x_\lambda(0,x_0)=x_0$. 这说明 (6.4.4) 在 $(x,\lambda_0)=(0,\lambda_0)$ 是不连续型跃迁. 显然方程 (6.4.4) 在 $\beta_1(\lambda)<0(\lambda<\lambda_0)$ 在 $x=0$ 附近有严格两个解

$$x_\pm(\lambda)=\pm|\beta_1(\lambda)/\alpha_\lambda|^{\frac{1}{k-1}}+o(|\beta_1/\alpha|^{\frac{1}{k-1}}).$$

定理 6.9 结论 (1) 得证.

同样方法, 从 (6.4.4) 可以证得定理 6.9 其他结论和定理 6.10. 定理证毕.

§6.4.2 复单特征值情况

令 L_λ 的第一特征值是一对复数 $\beta_1(\lambda)=\overline{\beta_2(\lambda)}$, 满足

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\beta_1(\lambda)=\mathrm{Re}\beta_2(\lambda)\begin{cases} <0, & \lambda<\lambda_0, \\ =0, & \lambda=\lambda_0, \\ >0, & \lambda>\lambda_0, \end{cases} \\ \mathrm{Im}\beta_1(\lambda_0)=-\mathrm{Im}\beta_2(\lambda_0)\neq 0, \\ \mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)<0, \quad \forall j\geqslant 3. \end{cases} \tag{6.4.5}$$

在 (6.4.5) 条件下方程 (6.0.1) 将发生 Hopf 分歧. 然而从跃迁的角度, 我们将证明 (6.0.1) 只发生连续和不连续这两种类型跃迁.

定理 6.11 在 (6.4.5) 条件下, 方程 (6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 的跃迁只有连续型和跳跃型这两种类型.

证明 不失一般性, 假设在 $\lambda=\lambda_0$ 附近 $-\mathrm{Im}\beta_1(\lambda)=\mathrm{Im}\beta_2(\lambda)=1$. 这样 (6.0.1) 的约化方程 (6.1.11) 可表达为

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & -1 \\ 1 & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_1(x,\lambda) \\ g_2(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad x\in R^2, \tag{6.4.6}$$

其中 $g_i(x,\lambda)=o(|x|)(i=1,2)$, $\alpha(\lambda)=\mathrm{Re}\beta_1(\lambda)$ 满足

$$\alpha(\lambda)\begin{cases} <0, & \lambda<\lambda_0, \\ =0, & \lambda=\lambda_0, \\ >0, & \lambda>\lambda_0. \end{cases} \tag{6.4.7}$$

方程 (6.4.6) 在 $\lambda=\lambda_0$ 时取如下形式

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_1(x,\lambda_0) \\ g_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}. \tag{6.4.8}$$

由二维动力系统理论知, $x=0$ 只能是 (6.4.8) 的下面三种类型奇点之一: (i) $x=0$ 为 (6.4.8) 的稳定焦点. (ii) $x=0$ 为 (6.4.8) 不稳定焦点; (iii) 在 $x=0$ 的任一个邻域 $U\subset R^2$ 内方程 (6.4.8) 具有无穷多个周期轨道.

对于情况 (i), $x=0$ 是 (6.4.8) 局部渐近稳定平衡点, 因而由吸引子分歧定理, 该跃迁为连续的.

对于情况 (ii), 方程 (6.4.8) 的任何解 $x(t,x_0)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x(t,x_0)|\geqslant\delta>0,\quad\forall 0<|x_0|<\varepsilon,\tag{6.4.9}$$

其中 $\delta>0$ 为某一常数, $\varepsilon>0$ 为一小的实数. 由条件 (6.4.7) 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, $\alpha(\lambda)>0$, 这样, 从 (6.4.9) 可知方程 (6.4.6) 的解 $x_\lambda(t,x_0)(x_\lambda(0,x_0)=x_0)$ 一定满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x_\lambda(t,x_0)|>\delta,\quad\forall 0<|x_0|<\varepsilon及\lambda>\lambda_0.$$

因而此跃迁为跳跃的.

对于情况 (iii), 由条件 (6.4.7), 对任何 $\lambda>\lambda_0,\alpha(\lambda)>0$. 这意味着对任何 $x_0\in R^2,0<|x_0|<\varepsilon$, 存在 $\delta_0>0$, 使得方程 (6.4.6) 的解 $x_\lambda(t,x_0)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}|x_\lambda(t,x_0)|\geqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}|x(t,x_0)|\geqslant\delta_0>0,\quad\forall\lambda>\lambda_0,$$

这里 $x(t,x_0)$ 为 (6.4.8) 的解. 上面右边不等式是由 U 内有无穷多周期轨道所致, 因而此跃迁为跳跃型. 定理证毕.

下面将给出一个具体的判据, 以确定什么情况下发生连续性跃迁或不连续性跃迁. 为此假设 $G(u,\lambda)$ 可展开为

$$G(u,\lambda)=G_k(u,\lambda)+G_{k+1}(u,\lambda)+o(\|u\|^{k+1}),\tag{6.4.10}$$

其中 $k\geqslant 3$ 为整数, $G_r(u,\lambda)$ 为 r 重线性算子.

这里只考虑 $k\geqslant 3$ 的情况是为了处理问题只涉及 k 和 $k+1$ 重非线性项时只用到约化的一阶近似 (6.1.12) 就够了, 不需要再考虑中心流形函数的作用.

令 $e_1(\lambda),e_2(\lambda)$ 及 $e_1^*(\lambda),e_2^*(\lambda)$ 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_1(\lambda)=\overline{\beta_2(\lambda)}=\alpha+i$ 的特征向量, 即

$$\begin{cases}L_\lambda e_1(\lambda)=\alpha(\lambda)e_1(\lambda)+e_2(\lambda),\\ L_\lambda e_2(\lambda)=-e_1(\lambda)+\alpha(\lambda)e_2(\lambda),\end{cases}$$

$$\begin{cases}L_\lambda^* e_1^*(\lambda)=\alpha(\lambda)e_1^*(\lambda)-e_2^*(\lambda),\\ L_\lambda^* e_2^*(\lambda)=+e_1^*(\lambda)+\alpha(\lambda)e_2^*(\lambda).\end{cases}$$

由谱定理知

$$\langle e_i(\lambda),e_j^*(\lambda)\rangle=\delta_{ij}.$$

记 $e_i=e_i(\lambda_0),e_i^*=e_i^*(\lambda_0)$, 及

$$a_{p,q}^i=\begin{cases}\langle G_k(e_1^p,e_2^q,\lambda_0),e_i^*\rangle, & p+q=k, & k=奇数,\\ \langle G_{k+1}(e_1^p,e_2^q,\lambda_0),e_i^*\rangle, & p+q=k+1, & k=偶数,\end{cases}$$

其中 $i=1,2,k\geqslant 3$ 如 (6.4.10). 或者更精确地说， a^i_{pq} 就是下面 K 重线性项关于 x_1 和 x_2 的展开系数

$$\langle G_k(x_1e_1+x_2e_2,\lambda_0),e_i^*\rangle=\sum_{p+q=K}a^i_{p,q}x_1^px_2^q,\quad i=1,2,\quad K=k \text{ 或 } k+1.$$

对上述引入的数 $a^i_{p,q}$, 定义一个新的数 b 如下

$$b=\sum_{l=0}^{(k-1)/2}\alpha_{k-2l,2l}(a^1_{k-2l,2l}+a^2_{2l,k-2l}),\tag{6.4.11}$$

其中

$$K=\begin{cases}k, & \text{当}k=\text{奇数时},\\ k+1, & \text{当}k=\text{偶数时},\end{cases}$$

$$\alpha_{k-2l,2l}=\int_0^{2\pi}\sin^{k-2l+1}\theta\cos^{2l}\theta d\theta.$$

下面定理表明，由 (6.4.11) 所定义的数 b 当不为零时完全确定了 (6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 跃迁的类型.

定理 6.12 在 (6.4.5) 条件下，若由 (6.4.11) 定义的 $b\neq 0$, 那么当 $b>0$ 时 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 的跃迁为跳跃型的，当 $b<0$ 时该跃迁为连续型的，即是一个吸引子分歧.

证明 因为在 (6.4.10) 中， $k\geqslant 3$, (6.0.1) 的一阶近似约化方程 (6.1.12) 可表示为

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & -1\\ 1 & \alpha(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\sum_{R=k}^{k+1}\begin{pmatrix}g_k^1(x,\lambda)\\ g_k^2(x,\lambda)\end{pmatrix}+o(|x|^{k+1}),\tag{6.4.12}$$

其中

$$\begin{aligned}g_R^i(x,\lambda)&=\langle G_R(x_1e_1+x_2e_2,\lambda),e_i^*\rangle\\&=\sum_{p+q=R}C^{Ri}_{pq}x_1^px_2^q,\quad i=1,2,R=k,k+1,\end{aligned}$$

$$C^{ri}_{pq}=\langle G_R(e_1^p,e_2^q,\lambda),e_i^*\rangle.$$

取极坐标 $x_1=r\cos\theta,x_2=r\sin\theta$. 则有

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\alpha(\lambda)r^2+r\cos\theta g^1(r,\theta)+r\sin\theta g^2(r,\theta)+o(r^{k+3})}{r+\cos\theta g^2(r,\theta)-\sin\theta g^1(r,\theta)},\tag{6.4.13}$$

其中

$$\cos\theta g^1(r,\theta)=r^k\sum_{p+q=k}C^{k1}_{pq}\cos^{p+1}\theta\sin^q\theta$$

$$+r^{k+1}\sum_{p+q=k+1}C_{pq}^{k+11}\cos^{p+1}\theta\sin^{q}\theta,$$

$$\sin\theta g^2(r,\theta)=r^k\sum_{p+q=k}C_{pq}^{k2}\cos^p\theta\sin^{q+1}\theta$$

$$+r^{k+1}\sum_{p+q=k+1}C_{pq}^{k+12}\cos^p\theta\sin^{q+7}\theta,$$

$$\sin\theta g^1(r,\theta)=r^ku_k(\cos\theta,\sin\theta)+r^{k+1}u_{k+1}(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$\cos\theta g^2(r,\theta)=r^kv_k(\cos\theta,\sin\theta)+r^{k+1}v_{k+1}(\cos\theta,\sin\theta),$$

其中 u_k 和 v_k 为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的 $k+1$ 齐次函数.

这样， (6.4.13) 可写为

$$\frac{dr}{d\theta}=\alpha(\lambda)r+r^kf_k(\theta)+r^{k+1}f_{k+1}(\theta)+o(r^{k+1}),\tag{6.4.14}$$

其中

$$f_k(\theta)=\sum_{p+q=k}\left[C_{pq}^{k1}\cos^{p+1}\theta\sin^q\theta+C_{pq}^{k2}\cos^p\theta\sin^{q+1}\theta\right]+\alpha g_k(\theta).$$

在上式中 $K=k,k+1$, 并用到条件 $k\geqslant 3$.

记 $r(\theta,\lambda,a)$ 为 (6.4.14) 的解满足 $r(0,\lambda,a)=a$. 令 $r(\theta,\lambda,a)$ 在 $a=0$ 附近关于 a 展开为

$$r(\theta,\lambda,a)=a+\sum_{j=1}^{k}r_j(\theta,\lambda)a^j+o(a^k).$$

则从 (6.4.14) 得

$$\begin{aligned}r(\theta,\lambda,a)&=a+\int_0^\theta\left[\alpha r+r^kf_k+r^{k+1}f_{k+1}+o(r^{k+1})\right]d\theta\\&=a+h_1(\theta)a^k+h_2(\theta,\lambda,a)\alpha(\lambda)a.\end{aligned}\tag{6.4.15}$$

注意到

$$\int_0^{2\pi}\cos^p\theta\sin^q\theta d\theta=0,\quad 当\ p\ 或者\ q=奇数.$$

应用定理 5.14 中标准证明方法，从 (6.4.14) 和 (6.4.15) 可得

$$\frac{r(2\pi,a)-r(0,a)}{r(2\pi,a)}=c\alpha(\lambda)+b(\lambda)a^{K-1}+o(a^{K-1}),$$

其中 K 如 (6.4.11) 中所定义，故 $K-1=$ 偶数， $C>0(\simeq 2\pi)$,

$$b(\lambda)=b+\rho\alpha(\lambda),$$

这里 b 就是由 (6.4.11) 所给的数， ρ 为某一常数.

我们知道, 方程 (6.4.12) 分歧出的周期轨道与下面方程在 $(a,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 附近正解 $a>0$ 是一一对应的

$$c\alpha(\lambda)+b(\lambda)a^{k-1}+o(a^{k-1})=0. \tag{6.4.16}$$

注意到 $b(\lambda_0)=b$, 从 (6.4.16) 可以看到, 当 $b>0$ 时, (6.4.16) 对 $\lambda<\lambda_0(\alpha(\lambda)<0)$ 有正解, 即 (6.0.1) 从 $\lambda<\lambda_0$ 一侧分歧出周期轨道, 这意味着 (6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 的跃迁是不连续的, 当 $b<0$ 时, (6.4.16) 对 $\lambda>\lambda_0$ 有正解, 这说明 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 的跃迁为连续型的. 定理证毕.

定理 6.12 的核心在于如何找出判别值 b. 下面给出两个例子表明 b 的特征. $k=3$ 时, b 就是定理 5.14 中分歧数.

例 6.1 考虑下面有限维系统

$$\frac{dz}{dt}=A_\lambda z+G(z)+o(|z|^3),\quad z\in R^n, \tag{6.4.17}$$

其中 $G(z)$ 关于 z 是指数为三次函数, A_λ 有一对复特征值 $\beta_1(\lambda)=\overline{\beta_2(\lambda)}=\alpha(\lambda)+i\rho(\rho>0),\alpha(\lambda)$ 满足 (6.4.7).

由谱定理 (定理 4.3), 存在坐标变换 $z=Bz'$, 使得在坐标系 $z'=(x,y),x\in R^2,y\in R^{n-2}$, (6.4.17) 变为

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=\begin{pmatrix}\alpha & -\rho\\ \rho & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g_1(x,y)\\ g_2(x,y)\end{pmatrix}+o(|z'|^3),\\
\frac{dy}{dt}&=J_{n-2}y+\widetilde{G}(x,y)+o(|z'|^3),
\end{aligned}$$

其中 $g_i(x,y)(i=1,2)$ 为 x,y 的三次函数, 表达为

$$\begin{aligned}
g_i(x,y)=a^i_{30}x_1^3+a^i_{21}x_1^2x_2+a^i_{12}x_1x_2^2+a^i_{03}x_2^3+f_i(x,y),\\
i=1,2,\quad f_i(x,0)=0.
\end{aligned}$$

则对 (6.4.17) 其判别数 b 为

$$\begin{aligned}
b&=\alpha_{30}(a^1_{30}+a^2_{03})+\alpha_{12}(a^1_{12}+a^2_{21})\\
&=\frac{3\pi}{4}(a^1_{30}+a^2_{03})+\frac{\pi}{4}(a^1_{12}+a^2_{21}).
\end{aligned}$$

例 6.2 考虑下面抛物方程组

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=\Delta u_1+\lambda u_1-\rho_1u_2+G_1(u_1,u_2)+o(\|u\|^3),\\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=\Delta u_2+\rho_2u_1+\lambda u_2+G_2(u_1,u_2)+o(\|u\|^3),\\
u=(u_1,u_2)=0,\quad 在\partial\Omega,
\end{cases} \tag{6.4.18}$$

其中 $\rho_1, \rho_2 > 0, G_i(u_1, u_2)$ 为

$$\begin{cases} G_1(u_1,u_2) = b_{30}^1 u_1^3 + b_{21}^1 u_1^2 u_2 + b_{12}^1 u_1 u_2^2 + b_{03}^1 u_2^3, \\ G_2(u_1,u_2) = b_{30}^2 u_1^3 + b_{21}^2 u_1^2 u_2 + b_{12}^2 u_1 u_2^2 + b_{03}^2 u_2^3. \end{cases}$$

令 λ_k, ψ_k 是 Laplace 算子的第 k 特征值与特征向量 (计入重数),

$$\begin{cases} -\Delta\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots, \\ \psi_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{6.4.19}$$

则 (6.4.18) 的所有特征值为

$$\beta_j^{\pm}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k) \pm i\rho, \quad \rho = \sqrt{\rho_1\rho_2}.$$

因而在 $\lambda_0 = \lambda_1$((6.4.19) 第一特征值) 条件 (6.4.5) 成立. 对应于第一特征值 $\beta_1^{\pm}(\lambda)$ 的特征向量为

$$e_1 = (\psi_1, 0), \quad e_2 = (0, \psi_1),$$

$$e_1^* = (\psi_1, 0), \quad e_2^* = (0, \psi_1).$$

此时，跃迁判别值 b 为

$$b = \frac{\alpha\pi}{4}\left[3(b_{30}^1 + b_{03}^2) + (b_{12}^1 + b_{21}^2)\right],$$

其中

$$\alpha = \int_\Omega \psi_1^4(x)dx.$$

上述两个例子只是强调判别值 b 的特征. 如果为了计算 b, 那么下面给出具体的一般方法.

首先讨论方程 (6.4.17). 假设 A_λ 及共轭矩阵 A_λ^* 对应于 $\beta_1(\lambda) = \bar{\beta}_2(\lambda)$ 的特征向量为

$$z_1 = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1n}), \quad z_2 = (\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n}),$$

$$z_1^* = (\beta_{11}, \cdots, \beta_{1n}), \quad z_2^* = (\beta_{21}, \cdots, \beta_{2n}).$$

那么将 $z_0 = (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2, \cdots, \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2)$ 代入 $G(z) = \{G_1(z), \cdots, G_n(z)\}$, 然后对 $G(z)$ 与 z_i^* 求内积，关于 x_1 和 x_2 展开后便得系数 a_{kj}^i 如下

$$\begin{aligned} \langle G(z_0), z_i^* \rangle &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij} G_j(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2, \cdots, \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2) \\ &= \sum_{k+j=3} a_{kj}^i x_1^k x_2^j, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

这样由 (6.4.11) 便可得到判别值 b.

对于方程 (6.4.18), 从一般化的角度去考虑. 这样对应于第一特征值 $\beta_1^{\pm}(\lambda)$ 的特征向量为

$$e_1=(\alpha_{11}\psi_1,\alpha_{12}\psi_1),\quad e_2=(\alpha_{21}\psi_1,\alpha_{22}\psi_1),$$

$$e_1^*=(\beta_{11}\psi_1,\beta_{12}\psi_1),\quad e_2^*=(\beta_{21}\psi_1,\beta_{22}\psi_1),$$

其中 $\alpha_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2})$ 和 $\beta_i=(\beta_{i1},\beta_{i2})(i=1,2)$ 满足

$$\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & -\rho_1\\ \rho_2 & \lambda-\lambda_1\end{pmatrix}\alpha_1=(\lambda-\lambda_1)\alpha_1-\rho\alpha_2,$$

$$\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & \rho_2\\ -\rho_1 & \lambda-\lambda_1\end{pmatrix}\beta_1=(\lambda-\lambda_1)\beta_1+\rho\beta_2.$$

将 $u_1^0=(\alpha_{11}x_1+\alpha_{21}x_2)\psi_1$ 和 $u_2^0=(\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2)\psi_1$ 代入 $G_i(u_1,u_2)$, 然后对 $G(u_1,u_2)$ 与 $e_i^*(i=1,2)$ 求内积，再关于 x_1,x_2 展开得系数 a_{kj}^i 如下

$$\begin{aligned}\langle G(u_1^0,u_2^0),e_i^*\rangle&=\int_\Omega\sum_{j=1}^2\beta_{ij}G_j(u_1^0,u_2^0)\psi_1(x)dx\\&=\sum_{k+j=3}a_{kj}^i x_1^k x_2^j,\quad i=1,2.\end{aligned}$$

然后由 (6.4.11) 便得到 (6.4.18) 的判别值 b.

§6.4.3 鞍结点分歧

鞍结点分歧与跃迁有着直接联系. 一般地说，鞍结点分歧在跃迁点之前，即 $\lambda<\lambda_0$ 一侧发生，并且伴随有鞍结点发生的跃迁一定不是连续型的. 一个跳跃型或混合型的跃迁全局结构与鞍结点分歧是密切关联的.

在注 4.8 中，我们已经简单地介绍了鞍结点分歧的一些直观特征，这一小节将专门讨论这种分歧. 鞍结点分歧与传统意义下的分歧有着非常不同的特征. 传统的分歧总是在一个平凡奇点的临界特征值处发生，一般称之为临界穿越分歧 (transcritical bifurcation), 然而鞍结点分歧却是从一个突然生出的一个奇点处产生，这种特征在非线性耗散系统中很普遍地存在，并且受到关注.

鞍结点分歧不仅关于奇点发生，并且关于周期轨道也能够发生. 这一点也将在后面进行讨论.

鞍结点分歧的严格数学定义如下.

定义 6.2 令 $u_1\in X_1,u_1\neq 0$. 称方程 (6.0.1) 从 $(u,\lambda)=(u_1,\lambda_1)$ 有一个鞍结点分歧. 若 (u_1,λ_1) 为 (6.0.1) 的一个奇点，并且在 $\lambda_1<\lambda$ 一侧方程 (6.0.1) 至少有两个奇点分支 $\Gamma_i(\lambda)$, 使得

(1) 对任何 $u_\lambda \in \Gamma_i(\lambda)(\lambda_1 < \lambda)$, 有

$$u_\lambda \to u_1, \text{当}\lambda \to \lambda_1;$$

(2) (6.0.1) 的算子在奇点 (u_1, λ_1) 有零指标

$$\text{ind}(-(L_{\lambda_1} + G), u_1) = 0.$$

关于鞍结点分歧的直观意义如图 4.9 所示, $(u_1, \lambda_1) = (u_0, \mu)$ 是鞍结分歧点.

首先给出鞍结点分歧的一个总的原理, 它也是定理 4.16 的变形观点.

定理 6.13 假设条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立, 并且对任何 $\lambda < \lambda_0, \text{Re}\beta_j(\lambda) < 0(j = 1, 2, \cdots)$. 如果 (6.0.1) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 在 $\lambda < \lambda_0$ 分歧出一个奇点分支 Γ_λ 有非零指标, 并且是在 $X \times (-\infty, \lambda_0)$ 内有界, 则 (6.0.1) 一定存在一个鞍结分歧点 $(u_1, \lambda_1) \in X \times (-\infty, \lambda_0)$.

该定理的证明思想与定理 4.16 是一样的, 这里不再重复.

下面定理是从非线性耗散型方程的特征提出来的, 它对许多非周期边界条件流体动力学问题是非常有用的, 假设方程 (6.0.1) 是定义在 Hilbert 空间上, 即 $X_1 = H_1, X = H$ 是两个 Hilbert 空间, 并且满足

$$\begin{cases} \langle G(u, \lambda), u\rangle_H \leqslant 0, & \forall u \in H_1, \quad \lambda \in R^1, \\ \langle L_\lambda u, u\rangle_H \leqslant -C\|u\|^2_{H_{\frac{1}{2}}}, & \forall \lambda < \lambda^*, \end{cases} \tag{6.4.20}$$

对某个 $\lambda^* < \lambda_0$, λ_0 如 (6.4.1),$C > 0$ 为常数.

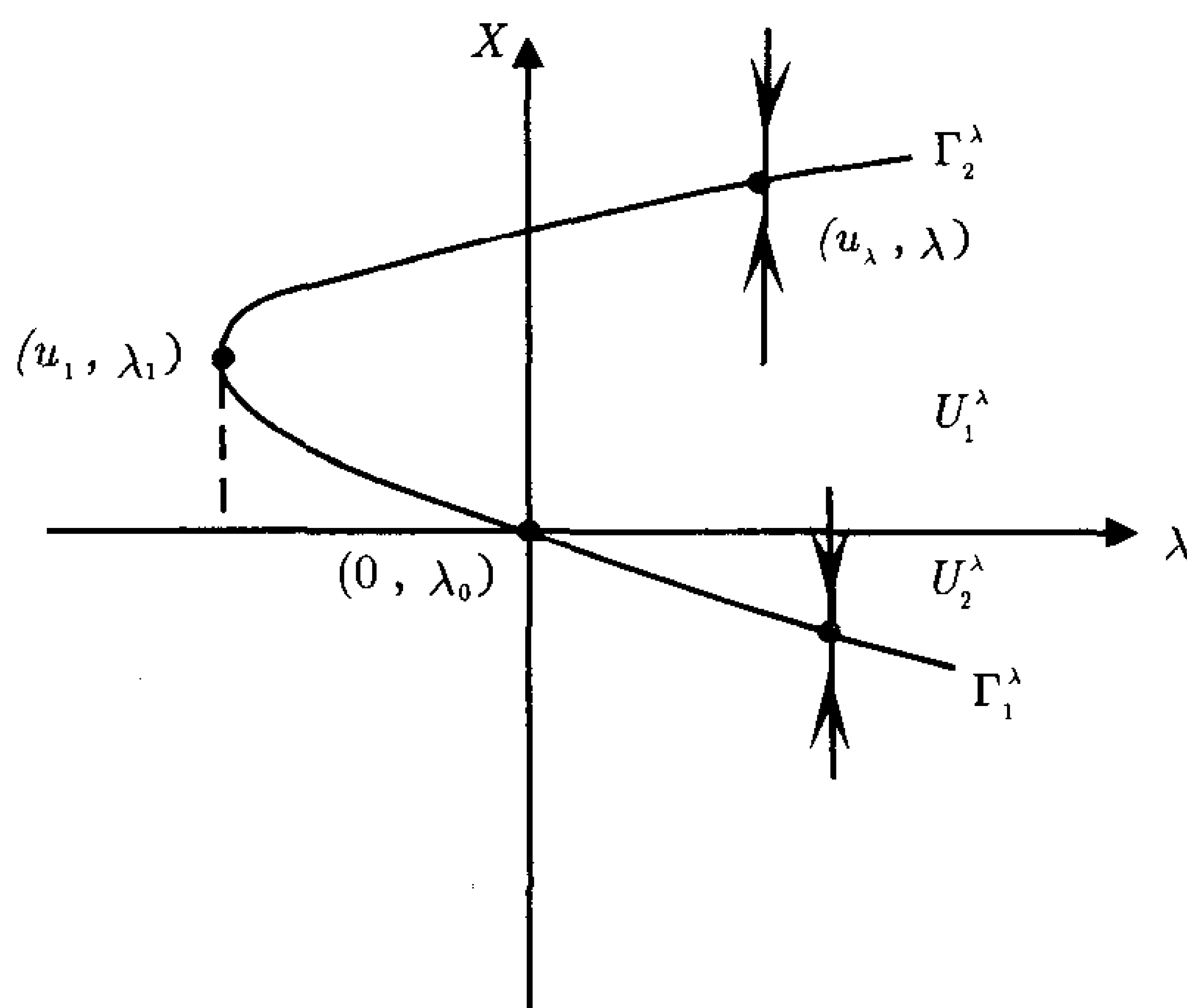
定理 6.14 在条件 (6.4.1),(6.4.2) 和 (6.4.20) 假设下, 若对任 $\lambda < \lambda_0, L_\lambda$ 的特征值 $\text{Re}\beta_j(\lambda) < 0, \forall j = 1, 2, \cdots$, 并且在 $\lambda^* < \lambda \leqslant \lambda_0$ 内 (6.0.1) 的解有界, 则下面结论成立:

(1) 若在 (6.4.2) 中, $k=$ 偶数及 $\alpha \neq 0$, 那么方程 (6.0.1) 有一个鞍结分歧点 $(u_1, \lambda_1) \in H_1 \times (\lambda^*, \lambda_0)$, 并且集合

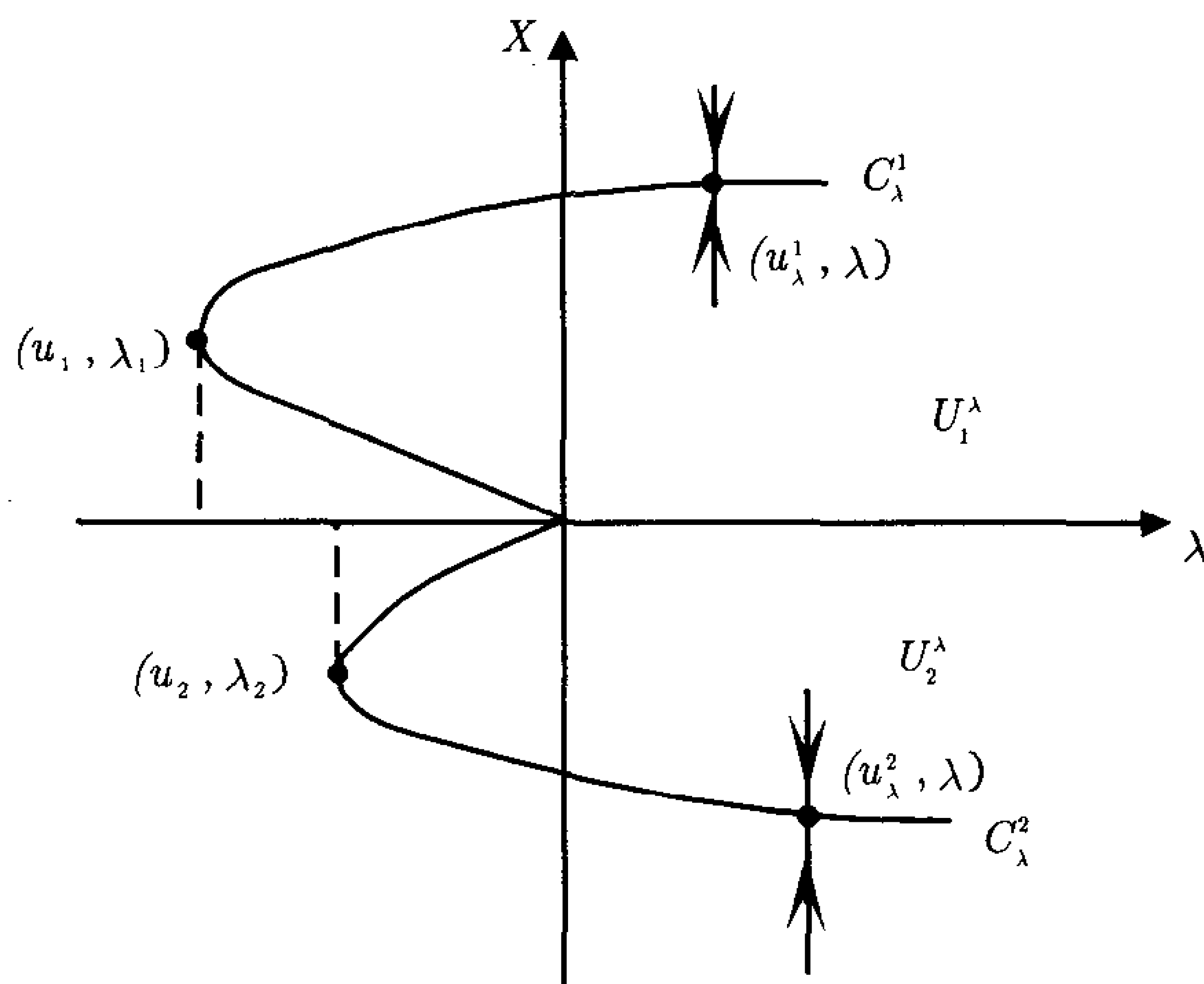
$$\Gamma_\lambda = \{(u, \lambda) \in H_1 \times R^1 | L_\lambda u + G(u, \lambda) = 0, u \neq 0\}$$

中含有 (u_1, λ_1) 的连通分支 Γ_2^λ 在 $\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ 中是非空的, 其中 $\varepsilon > 0$ 为某一实数, 如图 6.4(a) 所示.

(2) 若在 (6.4.2) 中, $k=$ 奇数及 $\alpha > 0$, 那么方程 (6.0.1) 至少有一个鞍结分歧点 $(u_1, \lambda_1) \in H_1 \times (\lambda^*, \lambda_0)$. 如果 (6.0.1) 有两个鞍结分歧点 (u_1, λ_1) 和 (u_2, λ_2), 则 Γ_λ 中含有 (u_1, λ_1) 和 (u_2, λ_2) 的两个连通分支 C_1^λ 和 C_2^λ 在 $\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ 中是非空的, 如图 6.4(b) 所示.



(a) $k=$ 偶数时，$(0,\lambda_0)$ 为混合跃迁点



(b) $k=$ 奇数，$\alpha > 0$ 时，$(0,\lambda_0)$ 为不连续跃迁点

图 6.4

注 6.5　由定理 6.9 和 6.10, 上述结论 (1) 中 $(0,\lambda_0)$ 为混合型跃迁点，结论 (2) 中为跳跃型的. 若 Γ_λ 中连通分支 C_λ 在 $\lambda_0 \leqslant \lambda$ 含有一个 Morse 指数为 0 的奇点，则在跳跃型区域中的解将收敛到这个奇点. 如图 6.4(a) 和 (b) 所示.

定理 6.14 的证明　该证明是建立在定理 6.13 基础上. 首先，线性算子 L_λ 能够分解为对称和反对称算子之和

$$\begin{cases} L_\lambda = \mathcal{L}_\lambda + B_\lambda, \\ \mathcal{L}_\lambda = \dfrac{1}{2}(L_\lambda + L_\lambda^*)\text{为对称算子}, \\ B_\lambda = \dfrac{1}{2}(L_\lambda - L_\lambda^*)\text{为反对称算子}. \end{cases}$$

然后，由条件 (6.4.20) 当 $\lambda \leqslant \lambda^*$ 时，$\mathcal{L}_\lambda$ 的所有特征值 (为实数) 都是负的，因而从 (6.4.20) 可以推知，此时 $u=0$ 是 (6.0.1) 全局渐近稳定平衡点．此外由定理的假设，在 $\lambda^* < \lambda \leqslant \lambda_0$ 内方程 (6.0.1) 的解是有界的，并且对任 $\lambda < \lambda_0, L_\lambda$ 特征值 $\mathrm{Re}\beta_j < 0$, 因此，(6.0.1) 从 $(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda < \lambda_0$ 分歧出的奇点分支 $\sum_\lambda$ 在 $H \times (-\infty, \lambda_0)$ 中是有界的．再由定理 6.9 和 6.10, (6.0.1) 的分歧解分支 $\sum_\lambda$ 是非退化的，因而有非零指标．这样，由定理 6.13 可知，(6.0.1) 在 $\lambda^* < \lambda < \lambda_0$ 中一定具有鞍结点分歧．结论 (1) 和 (2) 中关于分歧解连通分支 C_λ 在 $\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ 内非空的结论可由拓扑度同伦不变性推出．定理证毕．

注 6.6 如果条件 (6.4.20) 改为如下形式

$$\begin{cases} \langle G(u,\lambda), u\rangle_H \leqslant -C_1\|u\|_H^p + C_2\|u\|_H^q, \\ \langle L_\lambda u, u\rangle_H \leqslant -C\|u\|_{H_{\frac{1}{2}}}^2 + C_\lambda \|u\|_H^2, \end{cases} \tag{6.4.21}$$

其中 $C_1, C_2 > 0$ 为常数，$2 \leqslant q < p, C_\lambda \to -\infty$, 当 $\lambda \to -\infty$, 则定理 6.14 同样成立．特别地，对于一般特征值重数，下面定理成立．

定理 6.15 在条件 (6.2.1),(6.2.2) 及 (6.4.20) 或 (6.4.21) 的假设下，若对任 $\lambda < \lambda_0, L_\lambda$ 的特征值 $\mathrm{Re}\beta_j(\lambda) < 0$, 并且 (6.0.1) 从 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 在 $\lambda < \lambda_0$ 分歧出一个非零指标奇点分支，则 (6.0.1) 一定有一个鞍结分歧点 $(u_1, \lambda_1) \in H_1 \times (-\infty, \lambda_0)$, 并且 $(0,\lambda_0)$ 不是 (6.0.1) 连续型跃迁点．

§6.5 从双重特征值的跃迁

§6.5.1 一个指标公式

为了研究 (6.0.1) 从双重特征值的跃迁，有必要讨论下面向量场在 $x=0$ 的指标

$$u = \begin{pmatrix} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6.5.1}$$

假设向量场 (6.5.1) 在 $x=0$ 点是二阶非退化的，这意味着 $a_{11}^2 + b_{11}^2 \neq 0$. 不失一般性，假设 $a_{11} \neq 0$. 令

$$\Delta = a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22},$$

以及当 $\Delta \geqslant 0$ 时，令

$$\alpha_1 = \frac{-a_{12} + \sqrt{\Delta}}{2a_{11}},$$

$$\alpha_2 = \frac{-a_{12} - \sqrt{\Delta}}{2a_{11}},$$

$$\beta_i = b_{11}\alpha_i^2 + b_{12}\alpha_i + b_{22}, \quad i = 1, 2.$$

下面的指标定理在整个这一节的 (6.0.1) 跃迁研究是有用的.

定理 6.16 令向量场 (6.5.1) 在 $x=0$ 是二阶非退化的. 并且 $a_{11} \neq 0$, 那么有 ($x=0$ 为二阶非退化意味着 $\beta_1\beta_2 \neq 0$)

$$\operatorname{ind}(u, 0) = \begin{cases} 0, & \text{当} \Delta \leqslant 0 \text{ 或 } \beta_1\beta_2 > 0, \\ 2, & \text{当} a_{11}\beta_1 > 0 \text{ 和 } a_{11}\beta_2 < 0, \\ -2, & \text{当} a_{11}\beta_1 < 0 \text{ 和 } a_{11}\beta_2 > 0. \end{cases} \tag{6.5.2}$$

证明 分为如下几步进行.

第一步. 当 $\Delta = a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} < 0$ 时, 下面二次型不是正定的就是负定的.

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 > 0 (\text{或} < 0), \quad \forall x \in R^2, \quad x \neq 0,$$

其大于零或小于零取决于 a_{11} 的符号. 因此下面方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = -\varepsilon^2 \quad (\text{或} \varepsilon^2), \\ b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$$

对任何 $\varepsilon \neq 0$ 无解, 这意味着

$$\operatorname{ind}(u, 0) = 0, \quad \text{当} \Delta < 0.$$

第二步. 对于 $\Delta \geqslant 0$ 的情况, 由 (6.5.1) 给出的向量场 u 能够被改写成如下形式

$$u = \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2) \\ b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6.5.3}$$

因为 u 在 $x=0$ 是二阶非退化的, $\beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0$. 由 (6.5.3),$u = (0, \pm\varepsilon^2)^{\mathrm{T}}, \varepsilon \neq 0$, 等价于

$$x_1 = \alpha_i x_2, \quad \beta_i x_2^2 = \pm\varepsilon^2, \quad i = 1, 2. \tag{6.5.4}$$

如果 $\beta_1 \cdot \beta_2 > 0$, 那么在 (6.5.4) 中的一个方程, 不是对 $+\varepsilon^2$ 就是对 $-\varepsilon^2$, 没有解. 这就意味着

$$\operatorname{ind}(u, 0) = 0, \quad \text{当 } \beta_1 \cdot \beta_2 > 0.$$

第三步. 当 $\beta_1 \cdot \beta_2 < 0$ 时, 容易看到 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 及 $\Delta > 0$. 此时由 (6.5.3) 所给向量场 $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ 取如下形式

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}(x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2), \\ u_2 = \dfrac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}[\beta_1(x_1 - \alpha_2 x_2)^2 + \beta_2(x_1 - \alpha_1 x_2)^2 \\ \qquad + r(x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2)], \end{cases} \tag{6.5.5}$$

其中 $r=-(2b_{11}\alpha_1\alpha_2+b_{12}\alpha_1+b_{12}\alpha_2+2b_{22})$. 令

$$\beta_1>0,\beta_2<0,\text{若}a_{11}>0,$$

$$\beta_1<0,\beta_2>0,\text{若}a_{11}<0.$$

那么 (6.5.4) 的解 $y=(y_1,y_2)$ 由下式给出

$$\begin{cases} y_1^{\pm}=\begin{cases}\alpha_1 y_2^{\pm}, & \text{若}a_{11}>0,\\ \alpha_2 y_2^{\pm}, & \text{若}a_{11}<0,\end{cases}\\ y_2^{\pm}=\begin{cases}\pm\beta_1^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, & \text{若}a_{11}>0,\\ \pm\beta_2^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, & \text{若}a_{11}<0.\end{cases}\end{cases} \tag{6.5.6}$$

令

$$z_1=x_1-\alpha_1x_2,\quad z_2=x_1-\alpha_2x_2. \tag{6.5.7}$$

那么 u 的 Jacobi 矩阵可表达为

$$Du=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2}\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

从 (6.5.7) 可知

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1\\ 1 & -\alpha_2\end{pmatrix}=\alpha_1-\alpha_2.$$

因此从 (6.5.5) 和 (6.5.7) 推出

$$\det Du(x)=(\alpha_1-\alpha_2)\det\begin{pmatrix}a_{11}z_2 & a_{11}z_1\\ \dfrac{2\beta_2z_1+rz_2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} & \dfrac{2\beta_1z_2+rz_1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\end{pmatrix}. \tag{6.5.8}$$

在另一方面，由 (6.5.6) 得到

$$z_1^{\pm}=y_1^{\pm}-\alpha_1y_2^{\pm}=\begin{cases}0, & \text{若 }a_{11}>0,\\ \pm(\alpha_2-\alpha_1)\beta_2^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, & \text{若 }a_{11}<0,\end{cases} \tag{6.5.9}$$

$$z_2^{\pm}=y_1^{\pm}-\alpha y_2^{\pm}=\begin{cases}\pm(\alpha_1-\alpha_2)\beta_1^{-\frac{1}{2}}\varepsilon, & \text{若 }a_{11}>0,\\ 0, & \text{若 }a_{11}<0.\end{cases} \tag{6.5.10}$$

因此由 (6.5.8)~(6.5.10) 可以得到

$$\det Du(y^{\pm})=\begin{cases}2a_{11}\beta_1(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}(z_2^{\pm})^2, & 若\ a_{11}>0,\\ -2a_{11}\beta_2(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}(z_1^{\pm})^2, & 若\ a_{11}<0.\end{cases} \tag{6.5.11}$$

由 Brouwer 度理论知道

$$\text{ind}(u,0)=\deg(u,B_r,x_0), \tag{6.5.12}$$

其中 $x_0=(0,\varepsilon^2)\in B_r=\{x\in R^2||x|<r\}, r>0$ 充分小.

从 (6.5.11) 和 (6.5.12) 推出

$$\begin{aligned}\text{ind}(u,0)&=\text{sign}\ \det Du(y^+)+\text{sign}\ \det Du(y^-)\\&=2,\quad 对 a_{11}\beta_1>0\ 和\ a_{11}\beta_2<0.\end{aligned}$$

同理可得

$$\text{ind}(u,0)=-2,\quad 对 a_{11}\beta_1<0\ 和\ a_{11}\beta_2>0.$$

于是，公式 (6.5.2) 被证明．定理证毕.

§6.5.2　主要定理

在 (6.2.1) 和 (6.2.2) 条件下，记 m 和 r 为 L_λ 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 的代数重数与几何重数．这里假设 $m=r=2, G(u,\lambda)=G_2(u,\lambda)+o(\|u\|^2), G_2$ 是二重线性算子．令

$$\begin{aligned}a_{11}(\lambda)&=\langle G_2(e_1(\lambda),e_1(\lambda),\lambda),e_1^*(\lambda)\rangle,\\a_{22}(\lambda)&=\langle G_2(e_2(\lambda),e_2(\lambda),\lambda),e_1^*(\lambda)\rangle,\\a_{12}(\lambda)&=\langle G_2(e_1(\lambda),e_2(\lambda),\lambda)+G_2(e_2(\lambda),e_1(\lambda),\lambda),e_1^*\rangle,\\b_{11}(\lambda)&=\langle G_2(e_1(\lambda),e_1(\lambda),\lambda),e_2^*(\lambda)\rangle,\\b_{22}(\lambda)&=\langle G_2(e_1(\lambda),e_1(\lambda),\lambda),e_2^*(\lambda)\rangle,\\b_{12}(\lambda)&=\langle G_2(e_1(\lambda),e_2(\lambda),\lambda)+G_2(e_2(\lambda),e_1(\lambda),\lambda),e_2^*\rangle,\end{aligned}$$

其中 $e_i(\lambda)$ 和 $e_i^*(\lambda)(i=1,2)$ 分别为 L_λ 和 L_λ^* 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近对应于 $\beta_1(\lambda)$ 和 $\beta_2(\lambda)$ 的特征向量 $(\beta_1(\lambda_0)=\beta_2(0)=0)$, 即

$$\begin{cases}L_\lambda e_i(\lambda)=\beta_i(\lambda)e_i(\lambda),\\L_\lambda^*e_\lambda^*(\lambda)=\beta_i(\lambda)e_i^*(\lambda),\quad i=1,2.\end{cases}$$

这样获得一个二重线性向量场

$$u_0(\lambda)=\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda)x_1^2+a_{12}(\lambda)x_1x_2+a_{22}(\lambda)x_2^2\\b_{11}(\lambda)x_1^2+b_{12}(\lambda)x_1x_2+b_{22}(\lambda)x_2^2\end{pmatrix}. \tag{6.5.13}$$

当 u_0 是二阶非退化向量场, 即 $x=0$ 是 u_0 在 $\lambda=\lambda_0$ 的孤立奇点时, 根据定理 4.18, 在 (6.2.1) 和 (6.2.2) 条件下以及 $m=r=2$, 如果两个向量 (a_{11},a_{12},a_{22}) 和 (b_{11},b_{12},b_{22}) 是线性独立的, 那么 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边最多有三个, 最少有一个分歧解分支.

由定理 (6.16), 向量场 (6.5.13) 在 $x=0$ 的指标只取三种值 0 和 ± 2. 下面就每一种情况给出跃迁定理.

对于非连续的跃迁, 我们介绍连通跳跃区域的概念如下. 令 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 发生跃迁, $0\in U\in X$ 为跃迁区域. 称一个开集 $D\subset U$ 是 (6.0.1) 的一个连通的跳跃区域, 若对任何 $\varphi\in D$, (6.0.1) 的解 $u_\lambda(t,\varphi)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_\lambda(t,\varphi)\|_X\geqslant\delta,\quad \forall\lambda>\lambda_0,$$

∂D 为 (6.0.1) 的不变集, 并且对任 $\varphi_0\in\partial D$, 使得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|u_\lambda(t,\varphi_0)\|\to 0,\quad 当\lambda\to\lambda_0+0.$$

下面定理是关于 $\mathrm{ind}(u_0(\lambda_0),0)=-2$ 的情况.

定理 6.17 假设条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 及 $m=r=2$. 如果 (6.5.13) 所给向量场 u_0 是二阶非退化的并且 $\mathrm{ind}(u_0,0)=-2$, 那么下面结论成立:

(1) 方程 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 是一个跳跃型跃迁, 并且严格地具有三个连通跳跃区域, 如图 6.5 所示;

(2) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一侧 (6.0.1) 分歧出严格三个鞍点, 其 Morse 指数为 1.

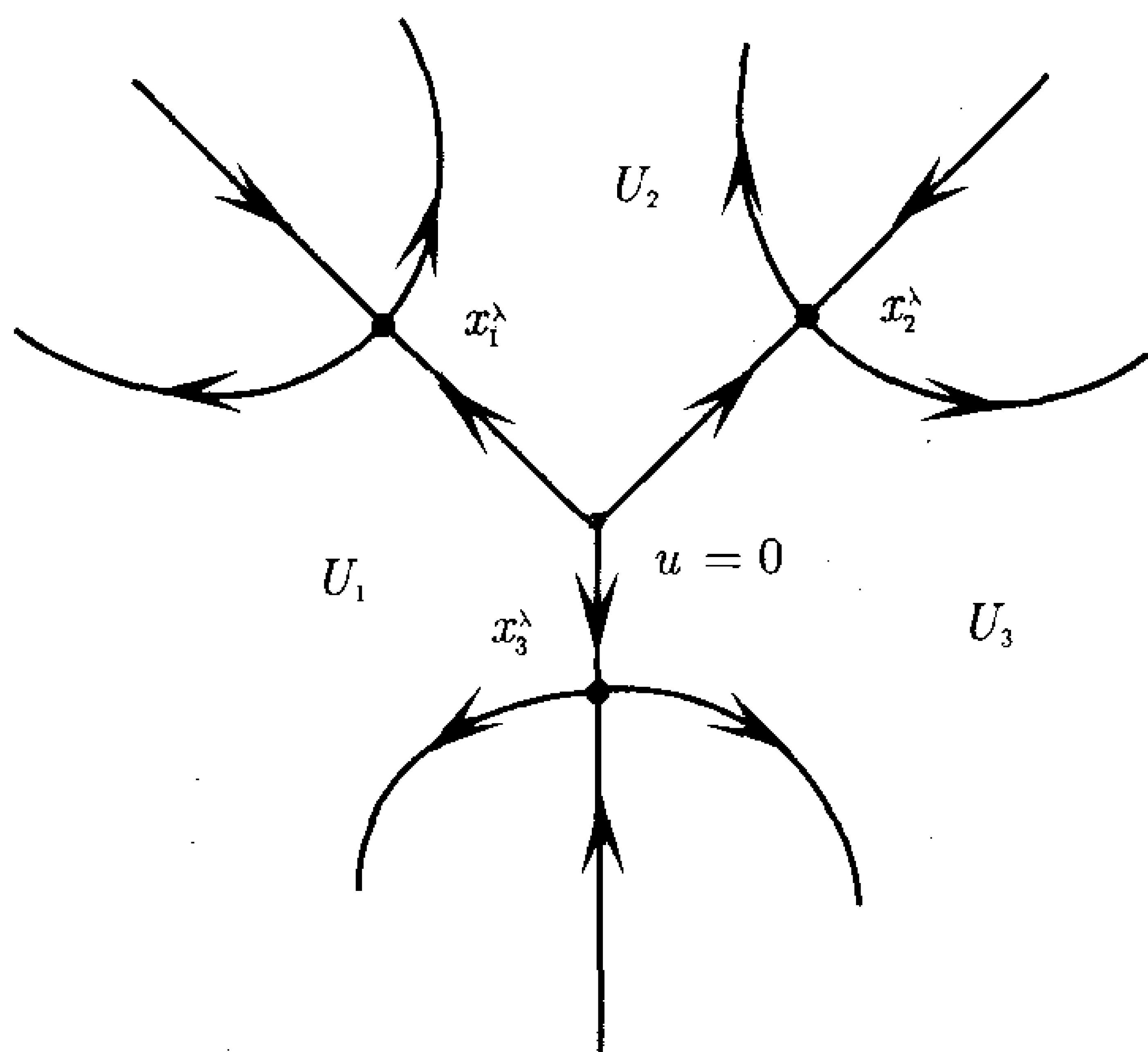


图 6.5 $U_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 是连通跳跃区域

为了刻画其他两种指标情况的跃迁状态, 需要介绍扇形区域的概念. 一个开集 $S(\theta)\subset R^2$ 称为是角度为 $\theta\in[0,2\pi]$ 的一个扇形区域, 如果 $S(\theta)$ 被两个从 $x=0$ 出发的曲线 r_1 和 r_2 及一个弧 Γ 所围, 并且 r_1 和 r_2 在 $x=0$ 之间的夹角

为 θ, 如图 6.6 所示. 记 $S_r(\theta)$ 是角度为 θ, 半径为 r 的扇形区域, 表达为

$$S_r(\theta) = \{x \in R^2 | \quad |x| < r, \quad x \in S(\theta)\}.$$

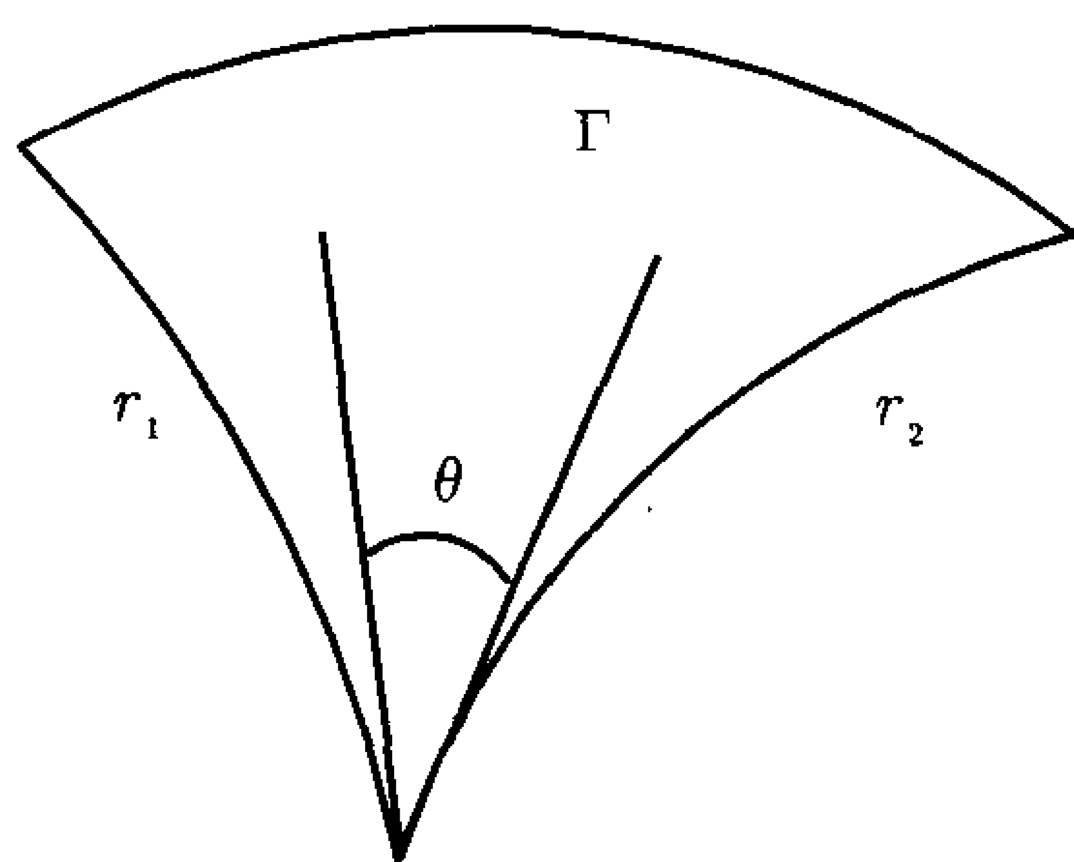


图 6.6

下面定理是关于指标为 2 的情况.

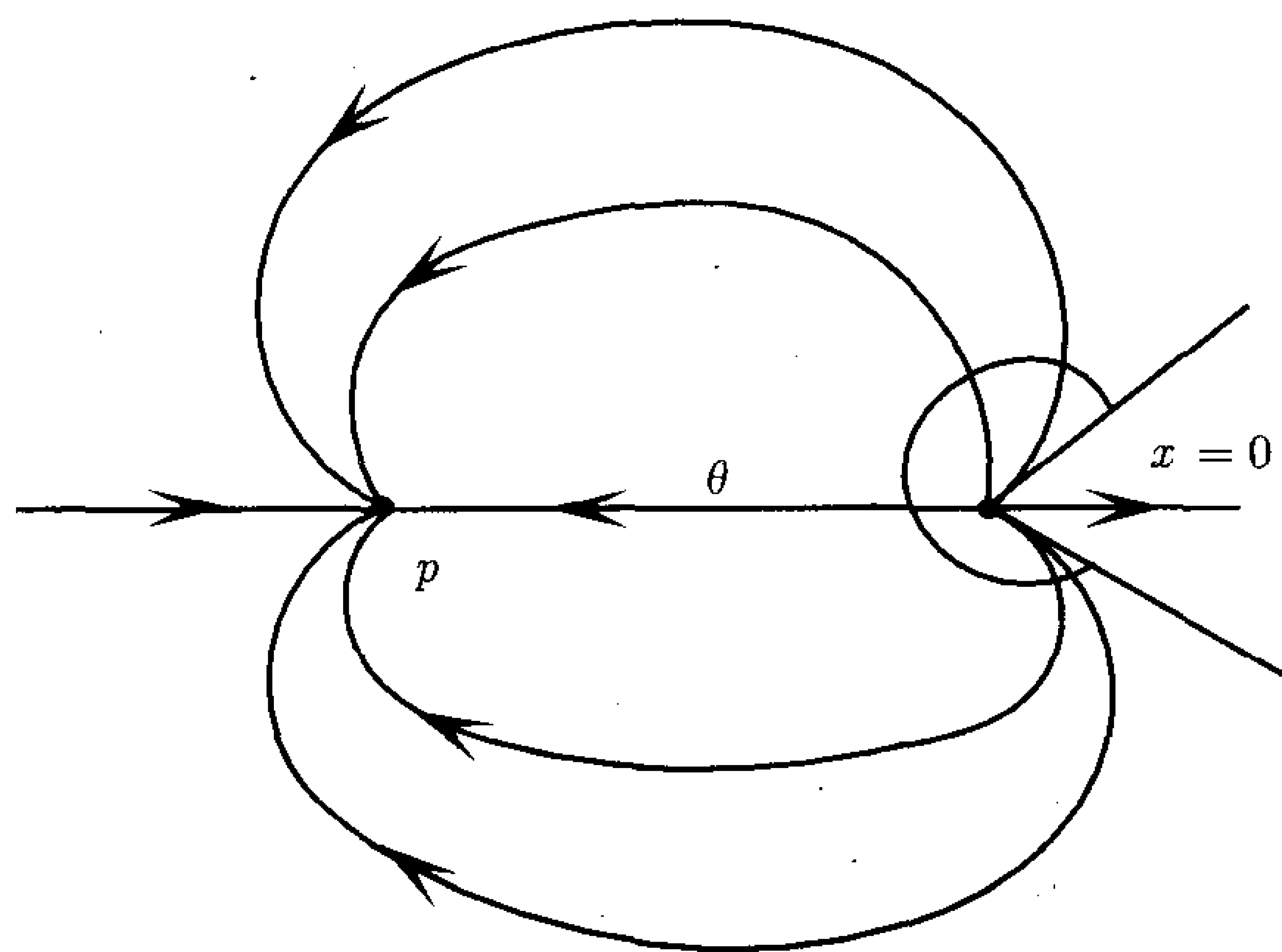
定理 6.18　在条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 假设下, $m = r = 2, \beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近. 如果 (6.5.13) 所给向量场 u_0 是二阶非退化的, 并且 $\mathrm{ind}(u_0, 0) = 2$, 那么下面结论成立:

(1) 方程 (6.0.1) 在 $(0, \lambda_0)$ 是一个混合型跃迁, 即 $u = 0$ 的一个邻域 U 分解成两个扇形区域 $D(\theta)$ 和 $D(\psi)(\theta + \psi = 2\pi, \pi < \theta \leqslant 2\pi$, 当 $\theta = 2\pi$ 时 $, D(\psi) = \varnothing)$, 其表达式为

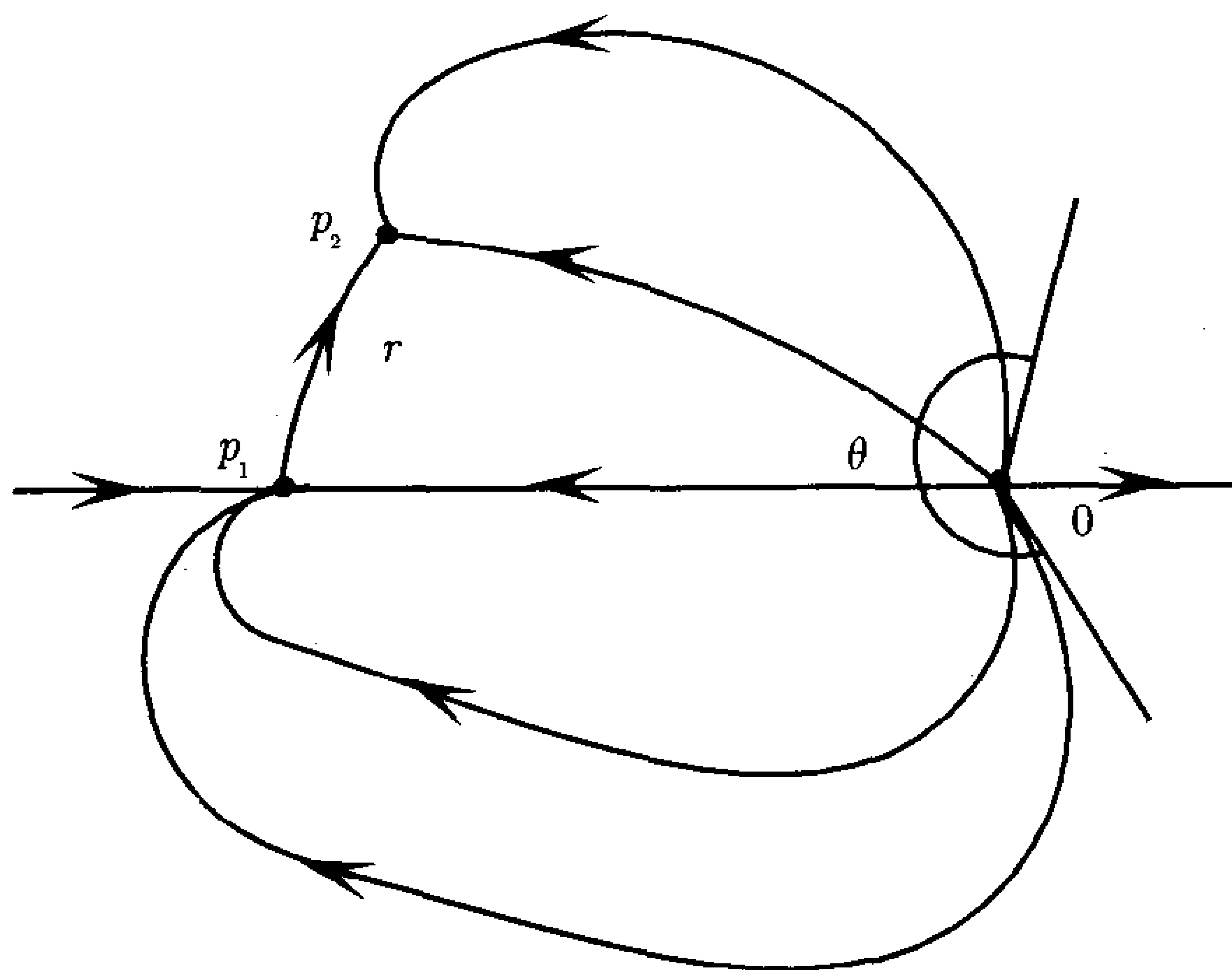
$$D_\theta = \{u = x + v \in U \subset X | \quad x = x_1e_1 + x_2e_2 \in S(\theta)\},$$

使得 $D(\theta)$ 是稳定型跃迁区域, $D(\psi)$ 为连通的跳跃型区域.

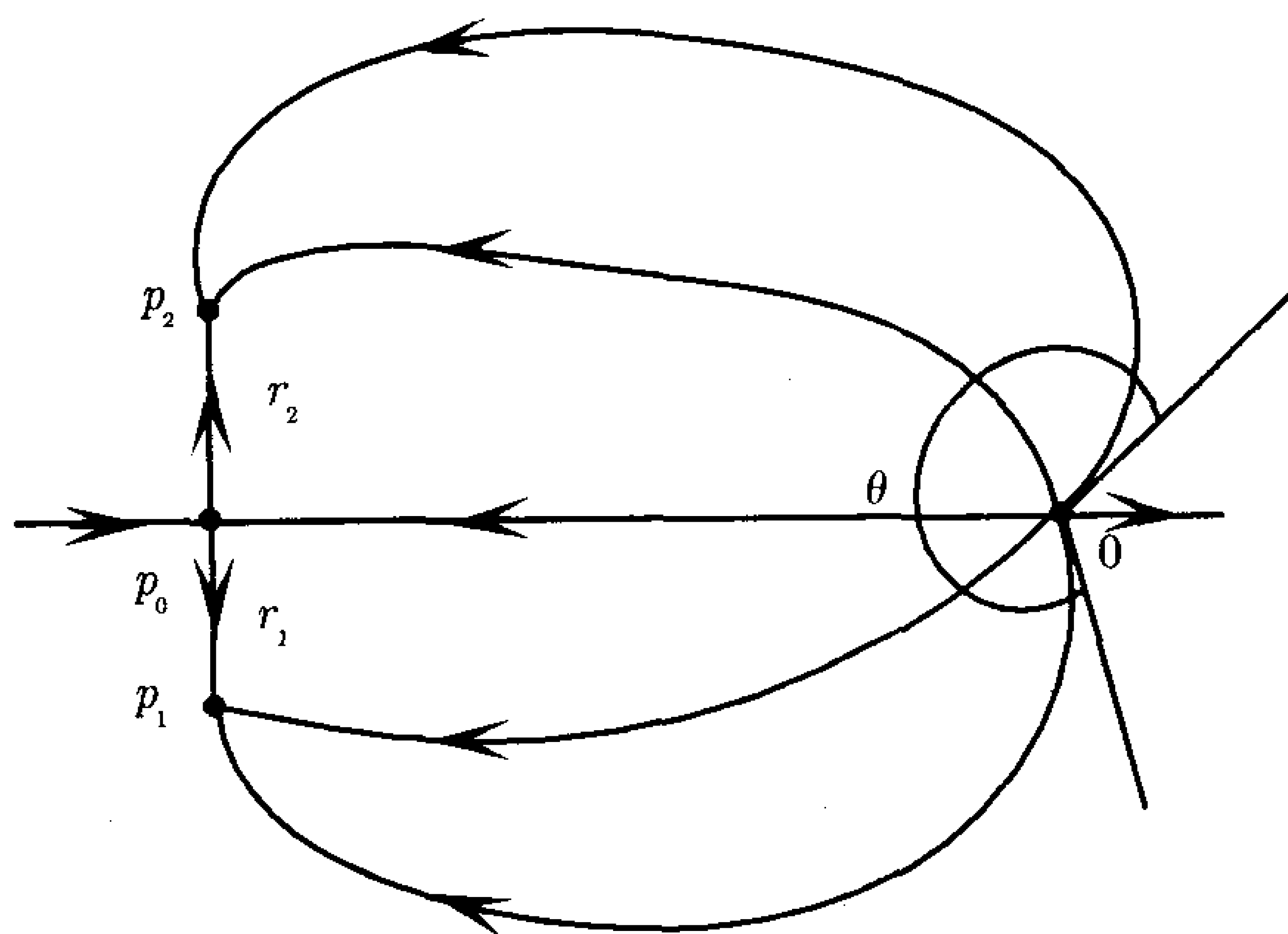
(2) 方程 (6.0.1) 在 $D(\theta)$ 中分岐出一个吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 吸引 $D(\theta)$, 并且 $\dim \mathcal{A}_\lambda \leqslant 1, \mathcal{A}_\lambda$ 含有一个奇点时, 其结构如图 6.7(a) 所示; 含有二个奇点时其结构如图 6.7(b) 所示; 含有三个奇点时其结构如图 6.7(c) 所示.



(a) (6.0.1) 分岐出一个奇点 p



(b) (6.0.1) 分歧出两个奇点 p_1, p_2



(c) (6.0.1) 分歧出三个奇点 p_0, p_1 和 p_2

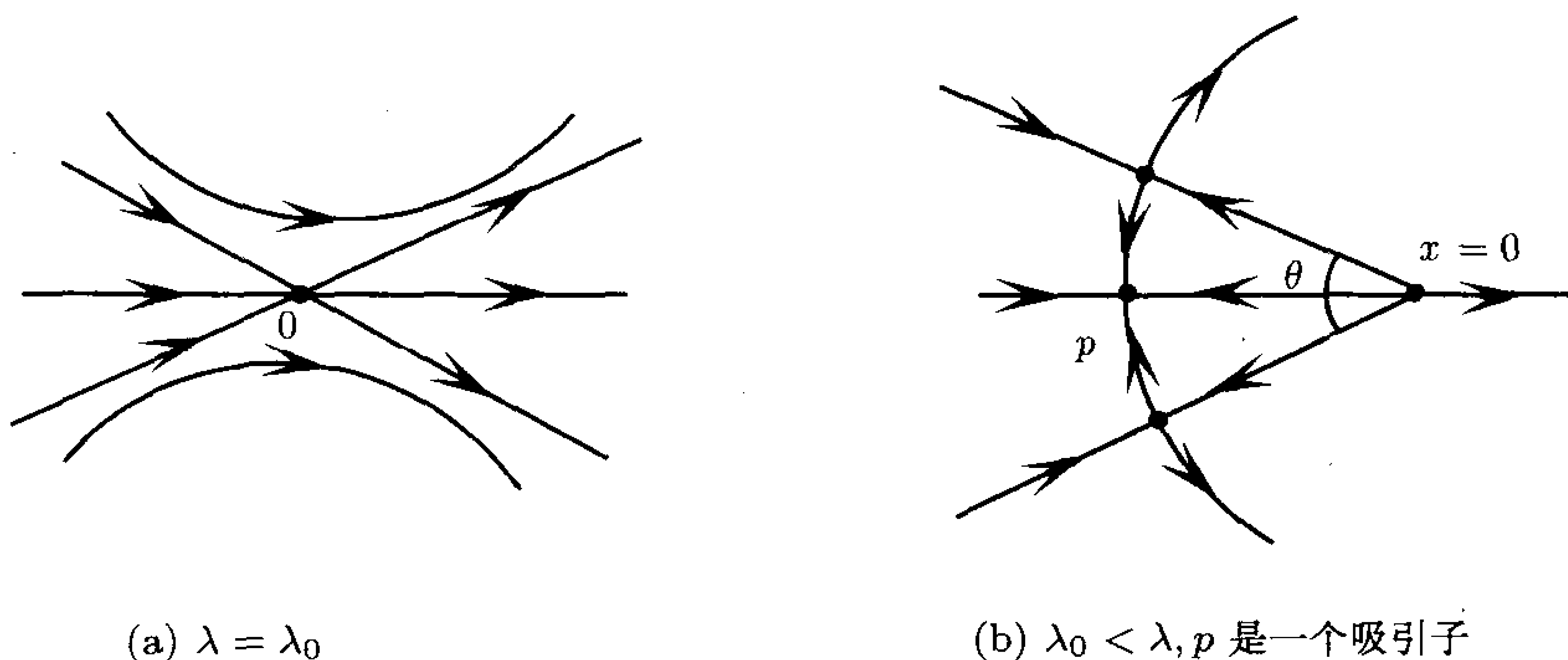
图 6.7

定理 6.19 令 $\mathrm{ind}(u_0, 0) = 0$, 其他条件与定理 6.18 相同，则有如下结论:

(1) 若 (6.0.1) 在 $\lambda_0 < \lambda$ 分歧出一个奇点，则在 $(0, \lambda_0)$ 的跃迁是跳跃型的，并且只有一个连通跳跃区域.

(2) 若 (6.0.1) 在 $\lambda_0 < \lambda$ 分歧出两个奇点，则在 $(0, \lambda_0)$ 的跃迁是混合型的，跃迁区域 U 分解为两个扇形区域 $D(\theta)$ 和 $D(\psi)(\theta + \psi = 2\pi)$, 使得 $D(\theta)$ 是稳定型区域， $D(\psi)$ 是一个连通的跳跃型区域，并且 $D(\theta)$ 内无分歧吸引子.

(3) 若 (6.0.1) 在 $\lambda_0 < \lambda$ 分歧出三个奇点，则跃迁为混合型， U 分解为 $D(\theta)$ 和 $D(\psi)(\theta + \psi = 2\pi, 0 \leqslant \theta < \pi)$, 使得 $D(\psi)$ 是一个连通的跳跃型区域，而 $D(\theta)$ 含有一个单一奇点吸引子 $\mathcal{A}_\lambda = \{p\}$, 其吸引 $D(\theta)$, 如图 6.8(a)~(b) 所示.



(a) $\lambda=\lambda_0$　　　　(b) $\lambda_0<\lambda, p$ 是一个吸引子

图 6.8

注 6.7　在定理 6.18 中，如果在 $\lambda=\lambda_0$ 附近及 $\lambda\neq\lambda_0$ 时，$\beta_1(\lambda)\neq\beta_2(\lambda)$，那么 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 也是混合型跃迁，但是其稳定区域 $U_1\subset U$ 可能不是扇形区域，并且不含吸引子. 例如考虑下面方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=4\lambda x_1+\lambda x_2+x_1^2-4x_1x_2-x_2^2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\lambda x_1+x_1x_2. \end{cases} \tag{6.5.14}$$

可以算出 (6.5.14) 的两个特征值为

$$\beta_1(\lambda)=(2+\sqrt{3})\lambda, \quad \beta_2(\lambda)=(2-\sqrt{3})\lambda.$$

即 $\lambda\neq\lambda_0=0$ 时，$\beta_1(\lambda)\neq\beta_2(\lambda)$. 其非线性项

$$G(x)=\begin{pmatrix} x_1^2-4x_1x_2-x_2^2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

是二阶非退化的，并且

$$\text{ind}(G,0)=2.$$

容易看出 $(x_1,x_2)=(0,\lambda)$ 是方程 (6.5.14) 从 $(0,\lambda_0)=(0,0)$ 分歧出的唯一奇点. 但是 (6.5.14) 在 $\lambda_0<\lambda$ 靠近 $(0,\lambda_0)$ 的地方没有吸引子，其局部拓扑结构如图 6.9 所示.

§6.5.3　主要定理的证明

方程约化的一阶近似

由中心流形约化一阶近似公式 (6.1.12)，从 (6.5.13) 可知方程 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$

附近的一阶近似约化可写为如下形式

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+F(x,\lambda)+o(|x|^2), \tag{6.5.15}$$

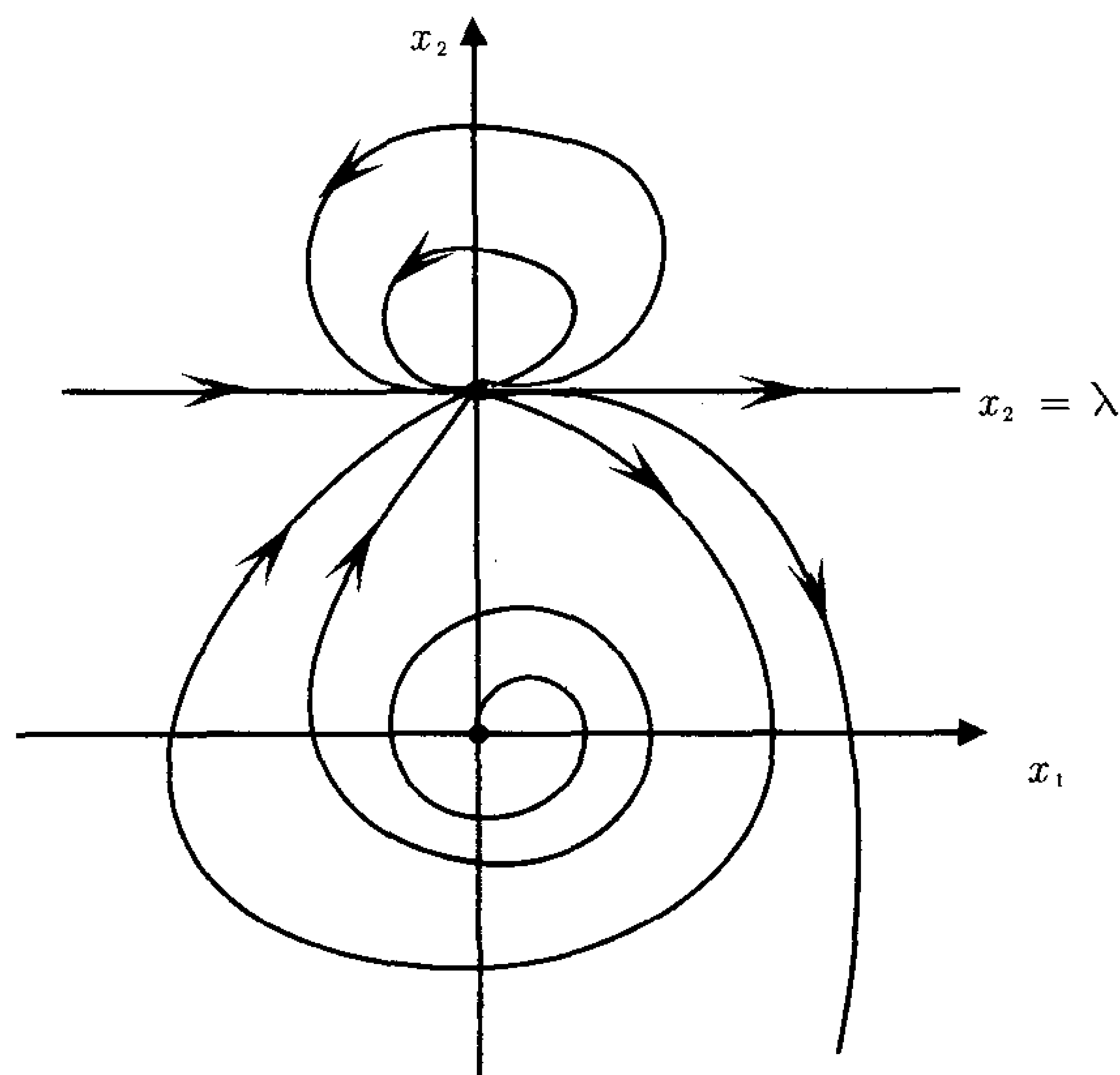


图 6.9

其中

$$J_\lambda x=\begin{pmatrix}\beta_1(\lambda) & 0\\ 0 & \beta_2(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1(\lambda)x_1\\ \beta_2(\lambda)x_2\end{pmatrix},$$

$$F(x,\lambda)=\begin{pmatrix}a_{11}(\lambda)x_1^2+a_{12}(\lambda)x_1x_2+a_{22}(\lambda)x_2^2\\ b_{11}(\lambda)x_1^2+b_{12}(\lambda)x_1x_2+b_{22}(\lambda)x_2^2\end{pmatrix},$$

这里 a_{ij} 和 b_{ij} 如 (6.5.13) 所定义.

因为 $F(x,\lambda)$ 在 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 是二阶非退化的, 在 $x=0$ 的附近 (6.5.15) 右边的向量场是 $J_\lambda+F$ 的一个摄动. 由非退化奇点及吸引子的稳定性 (定理 5.3), 只需对下面方程证明定理 6.17~6.19, 该方程为 (6.5.15) 的一阶逼近.

$$\frac{dx}{dt}=J_\lambda x+F(x,\lambda). \tag{6.5.16}$$

定理 6.17 的证明 结论 (1) 事实上是结论 (2) 的推论, 因为此时在 $\lambda_0<\lambda$ 分歧出的三个 Morse 指数为 1 的鞍点, 其稳定流形和不稳定流形都是 X 中余一维曲面, 因而可将 $u=0$ 的邻域 U 分解为如图 6.5 所示的九个开集, 并且 $u=0$ 和三个鞍点在这些开集的边界上. 这九个开集内的每个轨道都是远离平衡点 $u=0$ 的. 因而, 只需证明结论 (2).

结论 (2) 可由定理 4.9 和下面引理推得.

引理 6.1 如果 $\mathrm{ind}(F(\cdot,\lambda_0),0)=-2$, 那么 (6.5.16) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边都严格地分歧出三个鞍点，其 Morese 指数都为 1.

证明 由定理 6.16, 当 $\mathrm{ind}(F(\cdot,\lambda_0),0)=-2$ 时，这两个向量 (a_{11},a_{12},a_{22}) 和 (b_{11},b_{12},b_{22}) 是线性独立的，因而从定理 4.18 可知方程 (6.5.16) 从 $(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一边最多只能分歧出三个奇点，并且如果正好是三个奇点，则它们都是正则的. 我们将证明 (6.5.16) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的每一侧恰好分歧出三个奇点.

由

$$\mathrm{ind}(J_\lambda+F,0)=\mathrm{sign}[\beta_1(\lambda)\cdot\beta_2(\lambda)]=1,\quad 当\lambda\neq\lambda_0,$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{ind}(J_\lambda+F,p_i)+\mathrm{ind}(J_\lambda+F,0)=-2,$$

其中 $p_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 (6.5.16) 从 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的奇点. 因此，如果 $\lambda\neq\lambda_0$, 则有

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{ind}(J_\lambda+F,p_i)=-3. \tag{6.5.17}$$

如果 (6.5.17) 中的数 $k<3$, 那么 (6.5.16) 的一个分歧奇点，记为 p_1, 一定满足下面不等式

$$|\mathrm{ind}(J_\lambda+F,p_1)|\geqslant 2. \tag{6.5.18}$$

由 Brouwer 度理论，对于一个二维场如果奇点 p_1 的 Jacobi 矩阵不是零，即

$$D(J_\lambda+F)(p_1)\neq 0.$$

那么有

$$|\mathrm{ind}(J_\lambda+F,p_1)|\leqslant 1.$$

因而从 (6.5.18) 可推出 $J_\lambda+F$ 在 p_1 的 Jacobi 矩阵是零

$$D(J_\lambda+F)(p_1)=J_\lambda+\left(\frac{\partial F_i(p_1)}{\partial x_j}\right)=0. \tag{6.5.19}$$

令 $p_1=(z_1,z_2)$, 那么从 (6.5.19) 推出

$$\begin{cases}\beta_1+2a_{11}z_1+a_{12}z_2=0,\\ a_{12}z_1+2a_{22}z_2=0,\\ \beta_2+2b_{22}z_2+b_{12}z_1=0,\\ b_{12}z_2+2b_{11}z_1=0.\end{cases}$$

该方程组与 $J_\lambda p_1 + F(p_1, \lambda) = 0$ 合在一起可推出 $p_1 = 0$, 这与 $p_1 \neq 0$ 矛盾. 于是证得 $k = 3$.

从 (6.5.17) 和定理 4.18 可导出

$$\text{ind}(J_\lambda + F, p_i) = -1, \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

这就意味着 $p_i(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是 Morse 指数为 1 的鞍点. 定理证毕.

定理 6.18 的证明 为了证明定理 6.18, 首先引入下面引理, 该引理给出一个关于二维向量场奇点指标与其局部拓扑结构之间的一个公式, 称为 Poincaré 公式 [10].

引理 6.2 令 v 是一个二维 $C^r(r \geqslant 0)$ 向量场, $v(0) = 0$, 那么有下面指标公式, 称为 Poincaré 公式,

$$\text{ind}(v, 0) = 1 + \frac{1}{2}(e - h), \tag{6.5.20}$$

其中 e 是椭圆区域数, h 为双曲区域数, 这里在 $x = 0$ 的一个邻域内椭圆区域 E, 双曲区域 H 和抛物区域 P 定义如下, 如图 6.10 所示.

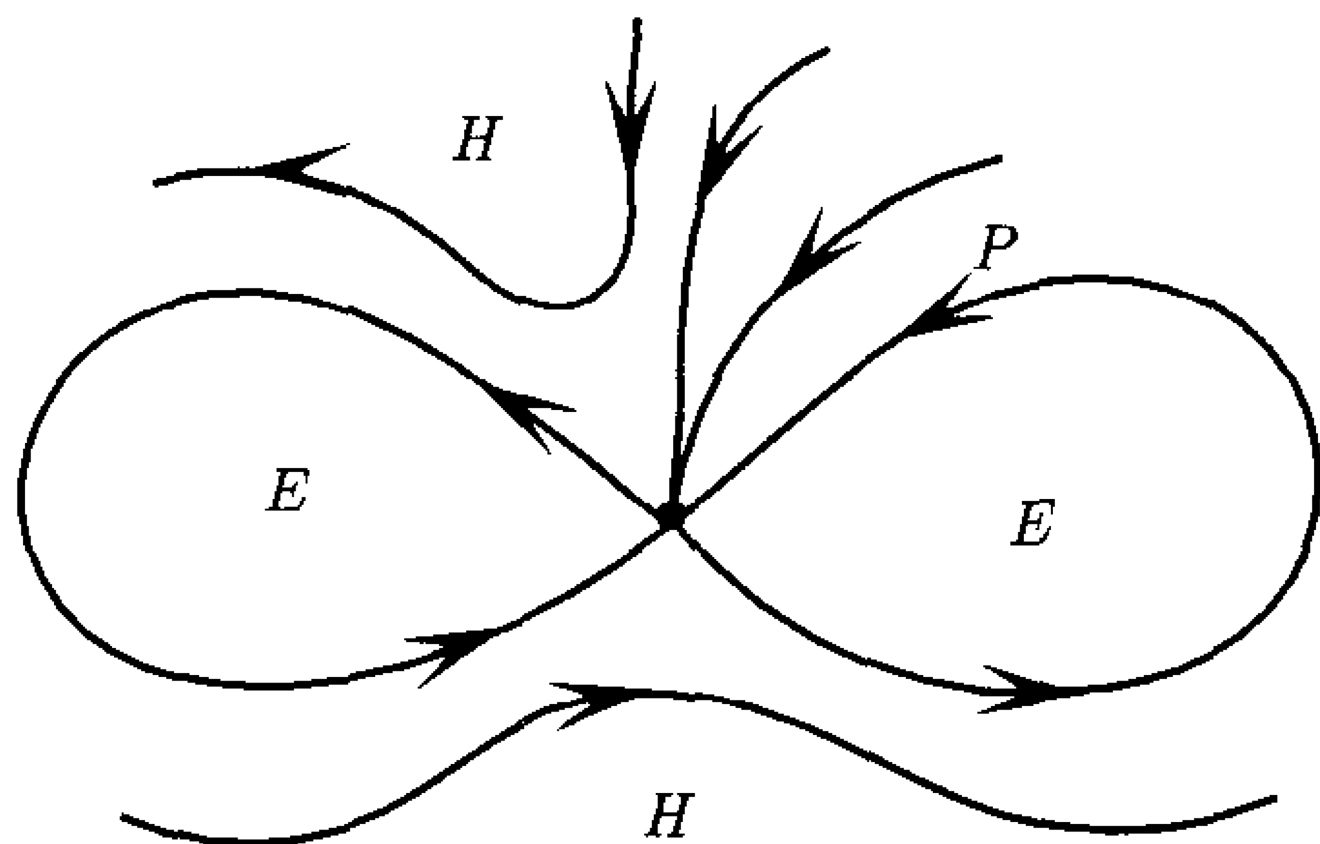


图 6.10

$$\begin{aligned}
E &= \{x \in U | S(t)x \text{ 和 } S(-t)x \to 0 \quad \text{当} t \to \infty\}, \\
H &= \{x \in U | S(t)x \text{ 和 } S(-t)x \notin U \text{ 对某个} t > t_0 > 0\}, \\
P &= \{x \in U | \text{ 或者} S(t)x \to 0 \quad (t \to \infty), \quad S(-t)x \notin U(t > t_0), \\
&\qquad \text{或者} S(-t) \to 0 \quad (t \to \infty), \quad S(t)x \notin U(t > t_0), \\
&\qquad \text{或者} S(t)x, S(-t)x \in U(n \to 0) \forall t \geqslant 0\}.
\end{aligned}$$

然后, 定理 6.18 的证明可由下面几个引理获得. 这里总是假设 $\beta(\lambda) = \beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda)$, 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近. 注意到, 由同伦不变性, 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近有

$$\text{ind}(F(\cdot, \lambda), 0) = \text{ind}(F(\cdot, \lambda_0), 0) = 2. \tag{6.5.21}$$

引理 6.3 对任 λ 在 λ_0 附近, 向量场 $F(\cdot,\lambda)$ 有 k 个直轨道线, 并且 $1\leqslant k\leqslant 3$, 其表达为

$$\alpha_i x_1+\beta_i x_2=0,\quad \alpha_i^2+\beta_i^2\neq 0,\quad 1\leqslant i\leqslant k, \tag{6.5.22}$$

这里 $\sigma_i=-\alpha_i/\beta_i$ 或 $\sigma_i=-\beta_i/\alpha_i$ 是下面代数方程解

$$\begin{cases} a_{22}\sigma^3+(a_{12}-b_{22})\sigma^2+(a_{11}-b_{12})\sigma-b_{11}=0, & \text{或者} \\ b_{11}\sigma^3+(b_{12}-a_{11})\sigma^2+(b_{22}-a_{12})\sigma-a_{22}=0. \end{cases} \tag{6.5.23}$$

证明 因为 $F(x,\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近为二阶非退化, 故 $a_{11}^2+b_{11}^2\neq 0$. 假设 $a_{11}\neq 0$. 由 $F(x,\lambda)$ 的二阶齐次性, 一个直线 $x_2=\sigma x_1$ 是 $F(x,\lambda)$ 的直轨道线充要条件为

$$\begin{aligned}\sigma&=\frac{F_2(x,\lambda)}{F_1(x,\lambda)}\\&=\frac{b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2}{a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2}\\&=\frac{b_{11}+b_{12}\sigma+b_{22}\sigma^2}{a_{11}+a_{12}\sigma+a_{22}\sigma^2}.\end{aligned}$$

因此满足 (6.5.23) 的直线 (6.5.22) 是 $F(x,\lambda)$ 的轨道线. 显然 (6.5.23) 中两个方程必有一个存在一个实数解. 这样就证得 (6.5.23) 解的个数 k 为 $1\leqslant k\leqslant 3$. 引理证毕.

引理 6.4 在 (6.5.21) 条件下, 有如下结论:

(1) $F(x,\lambda)$ 在 $x=0$ 没有双曲区域;

(2) $F(x,\lambda)$ 有严格两个椭圆区域 E_1 和 E_2;

(3) 如果 (6.5.23) 解的数 $k=1$ 则 $F(x,\lambda)$ 没有抛物区域, 若 $k\geqslant 2$ 则有严格两个抛物区域 P_1,P_2;

(4) 每个椭圆和抛物区域 E 和 P 是扇形区域 $E=S_r(\theta_1),P=S_r(\theta_z),0<\theta_1,\theta_2<\pi$ 及 $\theta_1+\theta_2=\pi$, 并且 $S_r(\theta_i)$ 的边是 $F(x,\lambda)$ 的直轨道线, 如图 6.11(a)~(c) 所示.

证明 根据引理 6.3, 取一个正交坐标变换 $Y=Ax$, 使得 $F(x,\lambda)$ 的一个直轨道线作为 y_1 轴. 在这个变换下, 向量场 $F(x,\lambda)$ 被变换为如下形式

$$\widetilde{F}(y,\lambda)=\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{11}y_1^2+\widetilde{a}_{12}y_1y_2+\widetilde{a}_{22}y_2^2\\ y_2(\widetilde{b}_1y_1+\widetilde{b}_2y_2)\end{pmatrix}, \tag{6.5.24}$$

由 (6.5.21), $\operatorname{ind}(\widetilde{F}(\cdot,\lambda),0)=2$, 从定理 6.16 可推知 $\widetilde{b}_1\neq 0$. 取另一个坐标变换如下

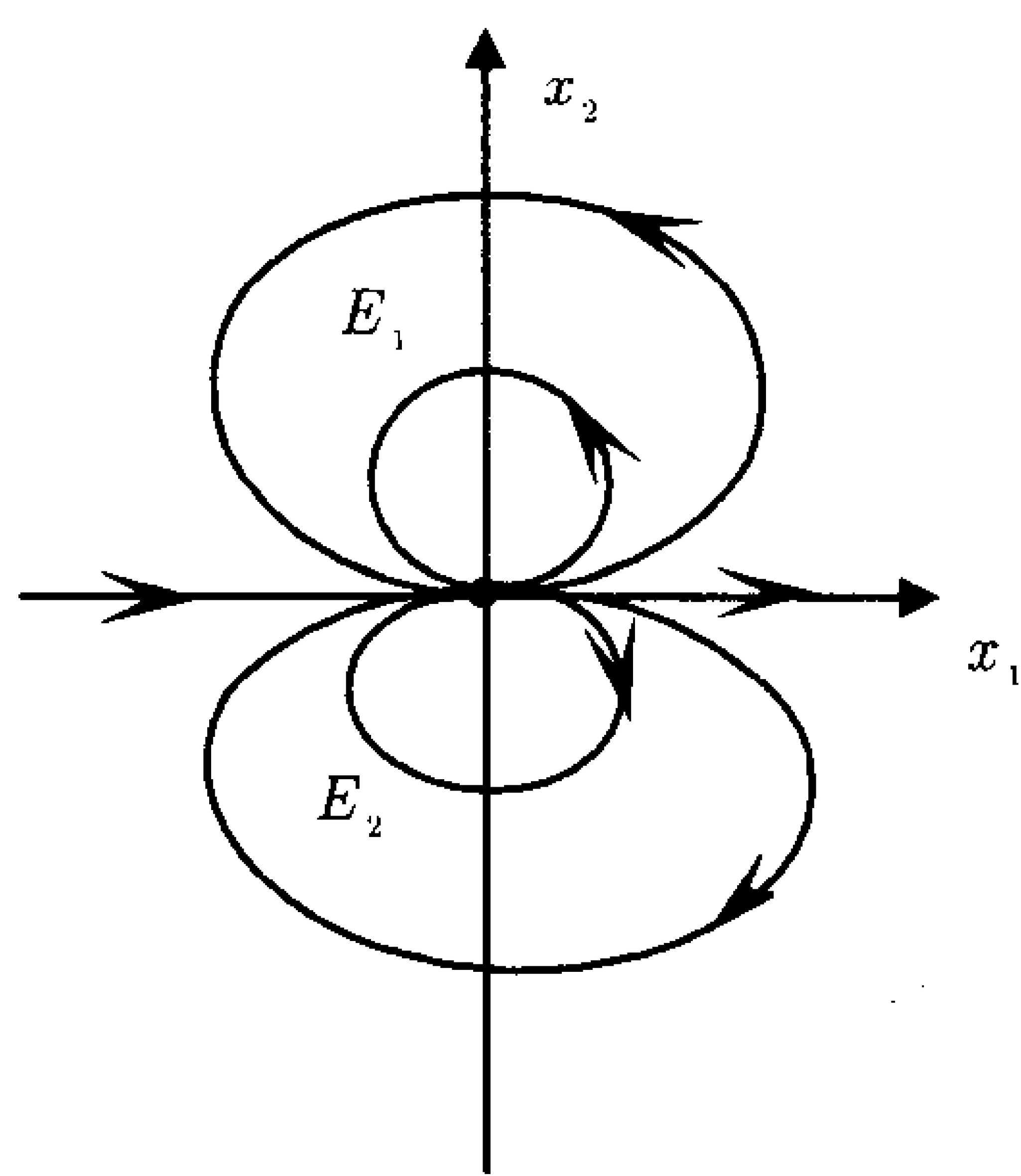
$$\begin{cases}x_1'=\widetilde{b}_1y_1+\widetilde{b}_2y_2,\\ x_2'=y_2,\end{cases}$$

那么由定理 6.9, 向量场 (6.5.24) 变为如下形式，为了简单，我们省去上撇：

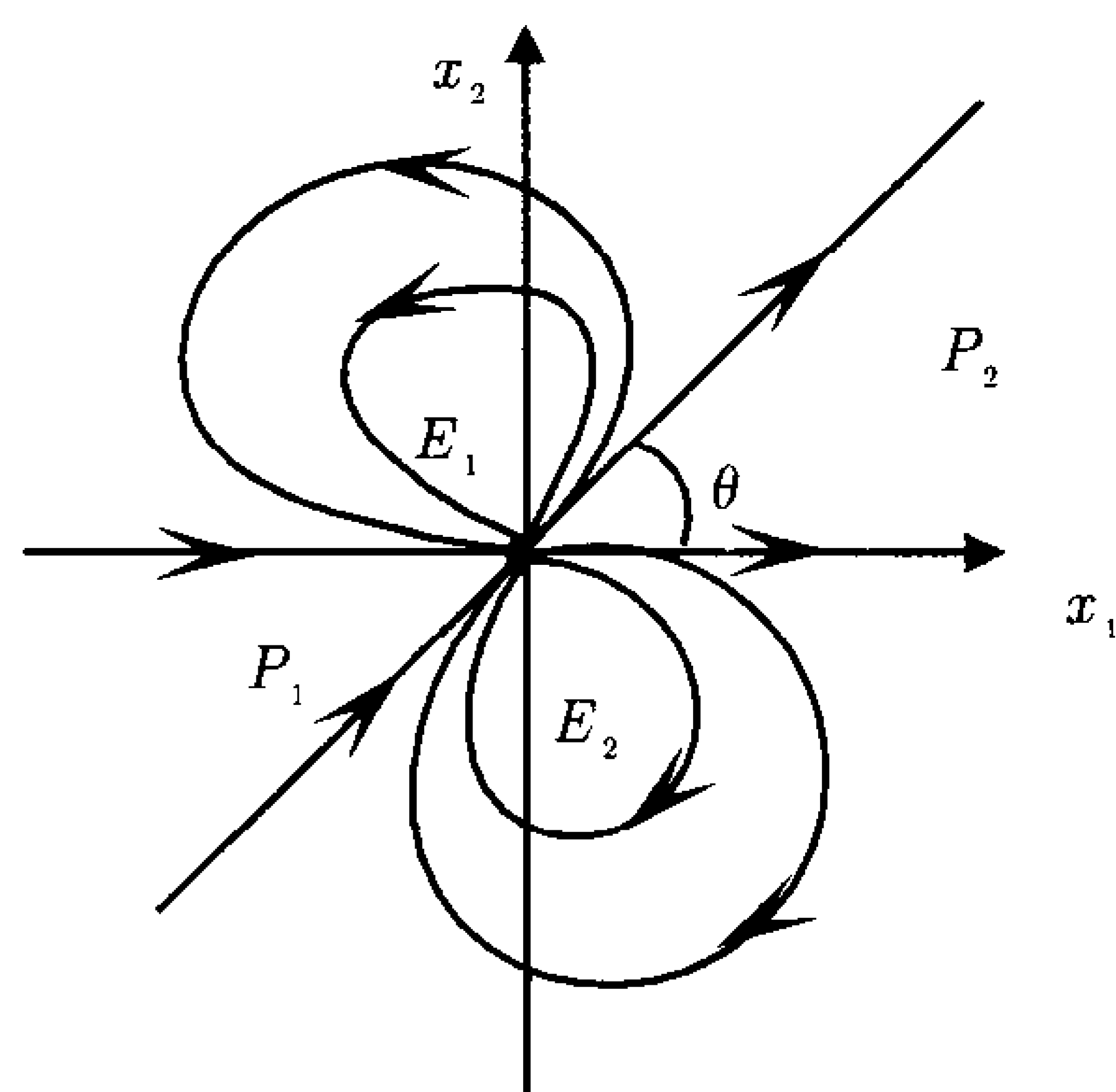
$$F(x,\lambda)=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x_1-\alpha_1x_2)(x_1+\alpha_2x_2)\\bx_1x_2\end{pmatrix},\qquad(6.5.25)$$

其中 $a\cdot b>0,\alpha_1,\alpha_2>0$.

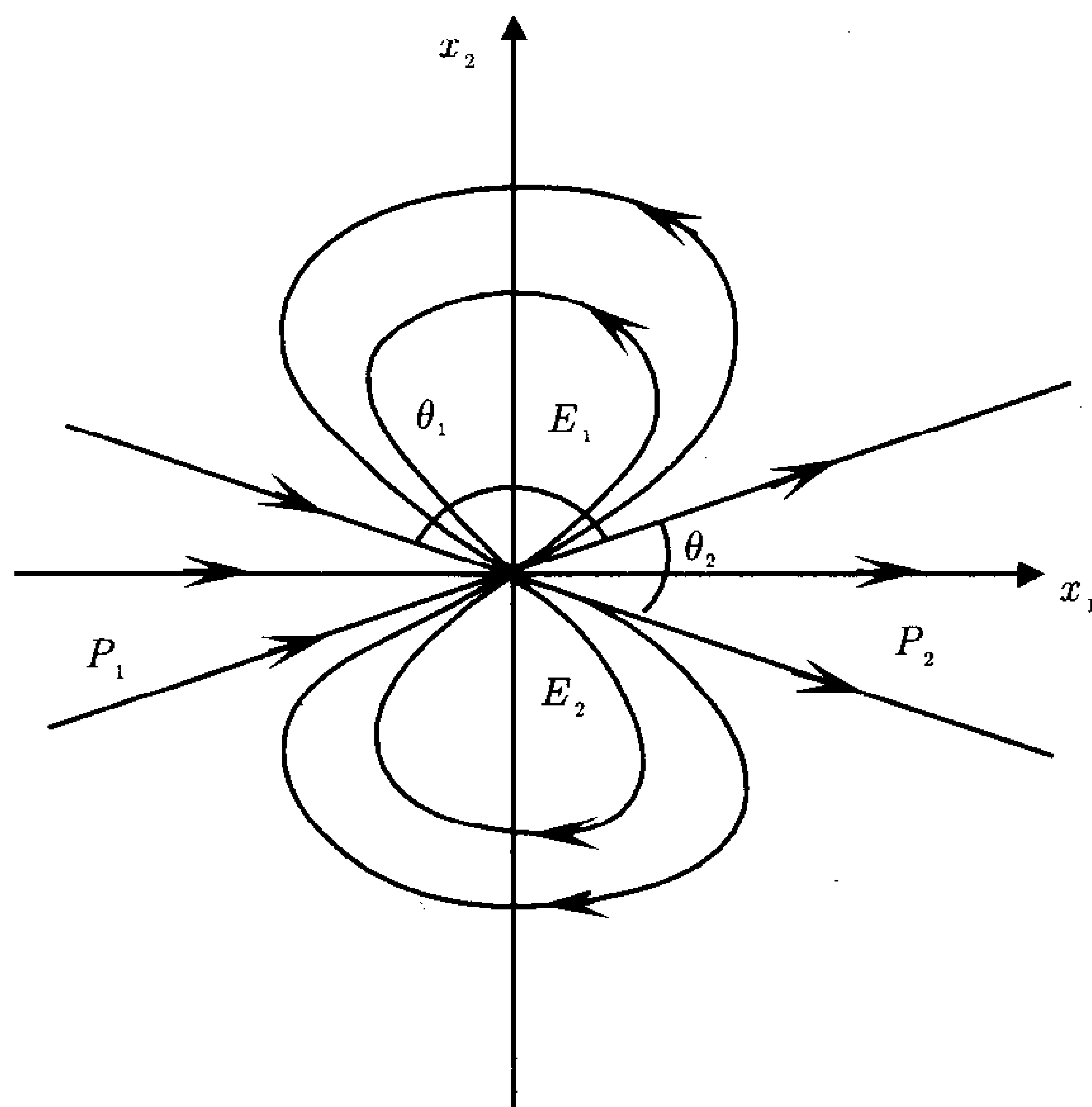
坐标变换不改变向量场 F 的拓扑结构. 下面的轨道分析让我们看到, (6.5.25) 在 $x=0$ 邻域有拓扑结构如图 6.11(a)~(c) 所表示那样.



(a) $k=1$ 的情况



(b) $k=2$ 的情况



(c) $k=3$ 的情况

图 6.11 向量场 (6.5.25) 的拓扑结构

为了得到向量场 (6.5.25) 在 $x=0$ 的如图 6.11(a)~(c) 所示的拓扑结构，记 D_1,D_2,D_3 和 D_4 为 R^2 中 x_1x_2 坐标系的四个象限，以及两个直线 $x_1-\alpha_1x_2=0$ 和 $x_1+\alpha_2x_2=0$ 也划分 R^2 为四个如下区域

$$\begin{aligned}
Q_1&=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1-\alpha_1x_2>0,x_1+\alpha_2x_2>0\},\\
Q_2&=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1-\alpha_1x_2<0,x_1+\alpha_2x_2>0\},\\
Q_3&=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1-\alpha_1x_2<0,x_1+\alpha_2x_2<0\},\\
Q_4&=\{(x_1,x_2)\in R^2|x_1-\alpha_1x_2>0,x_2+\alpha_2x_2<0\}.
\end{aligned}$$

从 (6.5.25) 容易看出

$$\begin{cases}
F_1>0, & 在Q_1和Q_3,\\
F_1<0, & 在Q_2和Q_4,\\
F_2>0, & 在D_1和D_4,\\
F_2<0, & 在D_2和D_3.
\end{cases}\tag{6.5.26}$$

性质 (6.5.26) 保证了 (6.5.25) 只有两个椭圆区域 E_1 和 E_2，并且 $E_1\subset R^2_+=\{(x_1,x_2)|x_2>0\},E_2\subset R^2_-=\{(x_1,x_2)|x_2<0\}$ 如图 6.12 所示. 再由公式 (6.5.20),$F(x,\lambda)$ 没有双曲区域.

这样，剩下来我们证明结论 (3) 和 (4). 由引理 6.3, 从 (6.5.26) 可以推出 $F(x,\lambda)$ 的直轨道线 $L_i(i=0,1,2)$ 由下式给出

$$L_0:x_2=0,\quad L_1:x_2=\sigma_1x_1,\quad L_2:x_2=\sigma_2x_1,$$

并且如果 σ_1,σ_2 是实数，则

$$\sigma_1=\frac{1}{\alpha_1}-\varepsilon_1,\quad \sigma_2=-\frac{1}{\alpha_2}+\varepsilon_2,$$

对某些实数 $0<\varepsilon_1<\dfrac{1}{\alpha_1}$ 和 $0<\varepsilon_2<\dfrac{1}{\alpha_2}$. 因此有

$$L_i\subset Q_1\cup Q_3,\quad i=0,1,2.\tag{6.5.27}$$

因而结论 (3) 和 (4) 从 (6.5.27) 及 F 的轴对称性推出. 引理证毕.

引理 6.5　在 (6.5.21) 条件下，(6.5.16) 从 $(x,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 在 $\lambda_0<\lambda$ 分歧出一个吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$, 它吸引一个扇形区域 $S_r(\theta)$, 其角度为 $\pi<\theta\leqslant 2\pi$. 事实上 $S_r(\theta)\subset E_1\cup E_2\cup P_1$, 其中 E_1,E_2 是两个椭圆区域，P_1 为抛物区域，这里 F 的轨道收敛到 $x=0$.

证明　在正交坐标变换下，下面线性算子

$$J_\lambda=\begin{pmatrix}\beta(\lambda) & 0\\ 0 & \beta(\lambda)\end{pmatrix}$$

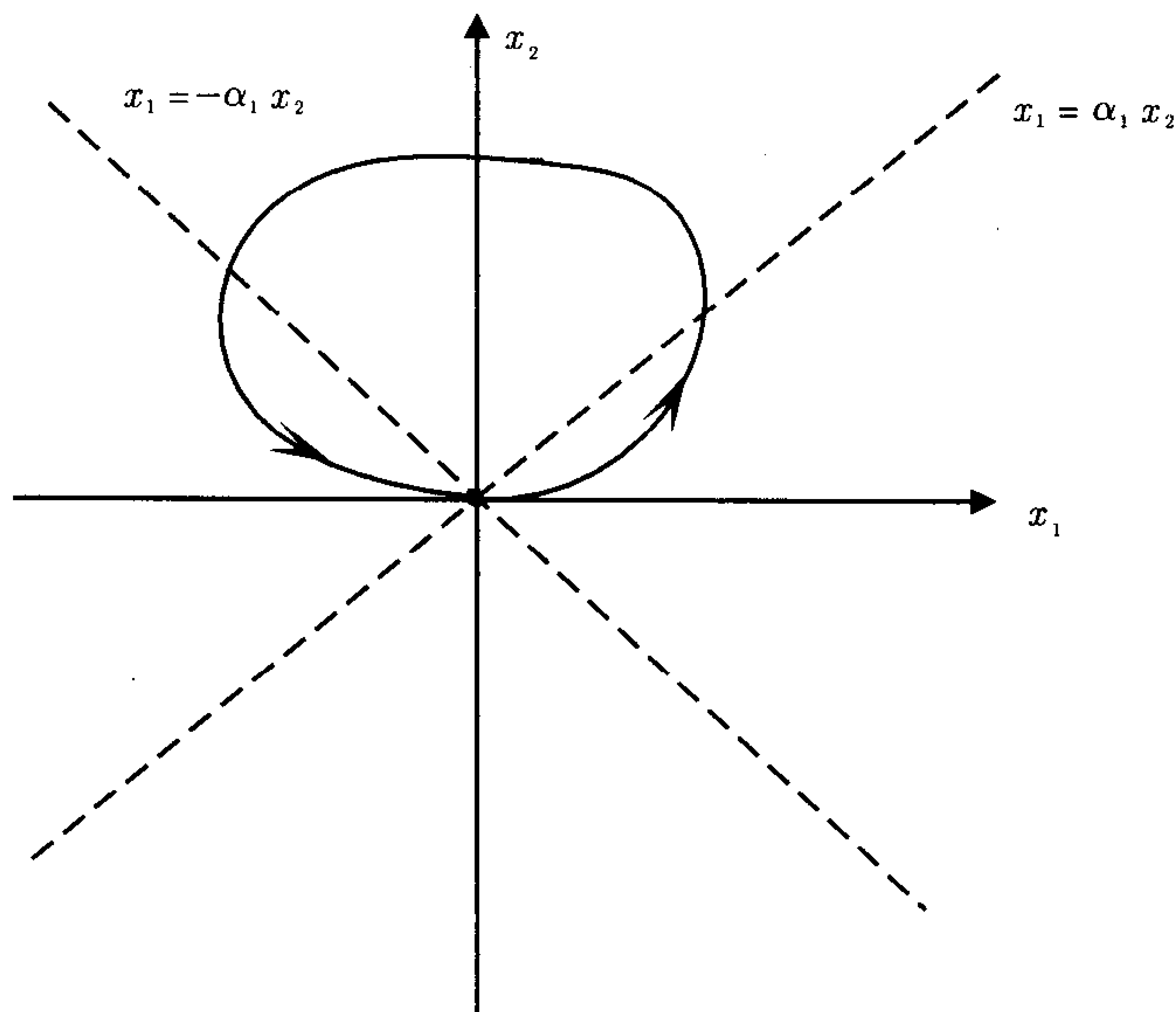


图 6.12

是不变的，因而不失一般性，取向量场 F 如 (6.5.24) 形式. 由定理 6.16, $F(x,\lambda)$ 能够写成

$$F=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x_1-\alpha_1x_2)(x_1-\alpha_2x_2)\\bx_2(x_1-\sigma x_2)\end{pmatrix}, \tag{6.5.28}$$

其中 $a\cdot b>0,\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$.

只对 $a,b>0$ 及 $\sigma>0$ 的情况进行证明，其他情况可用同样方式证得. 由定理 6.16 可知 $\alpha_2<\sigma<\alpha_1$, 这意味着这些直线

$$x_1-\alpha_ix_2=0,\quad i=1,2,\quad x_2=0,\quad x_1-\sigma x_2=0,$$

是在 R^2 中交错排列.

根据椭圆和抛物区域的定义，由引理 6.4 可得

$$\lim_{t\to\infty}S_{\lambda_0}(t)x=0,\quad \forall x\in E_1\cup E_2\cup P_1, \tag{6.5.29}$$

其中 $S_\lambda(t)$ 是由 $F(x,\lambda)$ 生成的算子半群.

在另一方面，从 (6.5.28) 可推出对任 $x\in E_1\cup E_2\cup P_1$, 存在一个 $t_0(x)\geqslant 0$, 使得

$$S_\lambda(t)x\in D=\{x\in R^2|\quad x_1-\sigma x_2<0\},\quad \forall t\geqslant t_0(x). \tag{6.5.30}$$

当 $\sigma=0$ 时, D 就是 $x_1=0$ 的左半平面. 很清楚, $P_1\subset D\subset E_1\cup E_2\cup P_1$. 记

$$D(r)=\{x\in D|\quad |x|<r\},$$

$$D(r_1,r_2)=\{x\in D|\quad 0<r_1<|x|<r_2\}.$$

令 $T_\lambda(t)$ 是由 $J_\lambda+F(\cdot,\lambda)$ 生成的算子半群. 因为对 $\lambda>\lambda_0, J_\lambda x$ 的所有轨道是从 $x=0$ 朝外辐射的直线. 因此, 由 (6.5.30) 推出

$$T_\lambda(t)x\in D,\quad \forall t>0,\quad x\in\partial D,\quad x\neq 0. \tag{6.5.31}$$

现在证明对任 $\lambda-\lambda_0>0$ 充分小, 存在 $0<r_1<r_2<r_3$, 使得

$$T_\lambda(t)x\in D(r_1,r_2),\quad \forall x\in D(r_3),\quad t>t_x, \tag{6.5.32}$$

对某个 $t_x\geqslant 0$.

当 $\lambda>\lambda_0$ 时, $J_\lambda+F$ 的奇点 $x=0$ 有一个不稳定流形 $W^u, \dim W^u=2$. 取 $r_1>0$, 使得球体 $B_r\subset W^u$. 那么由 (6.5.31) 可以推得

$$T_\lambda(t)x\in D(r_1,r_2),\quad \forall x\in D(r_1),\quad t>t_x,\quad x\neq 0. \tag{6.5.33}$$

如果 (6.5.32) 不成立, 那么由 (6.5.31) 和 (6.5.33), 存在 $\lambda_n\to\lambda_0+0, t_n\to\infty$ 和 $\{x_n\}\subset D(r_3)$, 使得

$$|T_{\lambda_n}(t_n)x_n|\geqslant r_2,\quad \forall n\geqslant 1. \tag{6.5.34}$$

令$x_n\to x_0\in D(r_3)$. 那么由延拓轨道的稳定性(引理 5.1)和 (6.5.34), $F(x,\lambda_0)$ 有一个以 $x_0\in D(r_3)$ 为起点的延拓轨道 r, 而 r 不收敛到 $x=0$, 这与 (6.5.29) 矛盾.

因而, 从 (6.5.31) 和 (6.5.32) 推出 $D(r_1,r_2)$ 是在它的一个邻域 U 中的吸收集. 再由吸引子存在性定理 (定理 3.4), 对 $\lambda>\lambda_0$, 下面集合

$$\mathcal{A}_\lambda=\omega_\lambda(D(r_1,r_2)),\quad 0\notin\mathcal{A}_\lambda$$

是一个 (6.5.16) 的吸引子, 并且吸引 $D(r_3)/\{0\}$.

再一次应用引理 5.1, 从 (6.5.29) 推出

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\max_{x\in\mathcal{A}_\lambda}|x|=0.$$

因而 $\mathcal{A}_\lambda$ 是 (6.5.16) 从 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的一个吸引子.

从 (6.5.30) 可以推得 $\mathcal{A}_\lambda$ 吸引一个扇形区域 $S_r(\theta)\subset E_1\cup E_2\cup P_1$, 其角度为 $\theta=2\pi-\theta_0$, 这里 θ_0 是抛物区域 P_2 的角度. 该引理证毕.

引理 6.6 对于 (6.5.16) 的吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$, 有下面结论:

(1) 当引理 6.3 中 $k=1$ 时, $\mathcal{A}_\lambda=\{p\}, p$ 为 (6.5.16) 单一奇点, 其结构如图 6.7(a) 所示.

(2) 当 $k=2$ 时, $\mathcal{A}_\lambda=r\cup\{p_1,p_2\}, p_1$ 和 p_2 为 (6.5.16) 的两个奇点, r 为连结 p_1 和 p_2 的轨道, p_2 为最小吸引子, 其结构如图 6.7(b) 所示.

(3) 当 $k=3$ 时, $\mathcal{A}_\lambda=r_1\cup r_2\cup\{p_0,p_1,p_2\}$, 其中 p_0, p_1 和 p_2 为 (6.5.16) 的三个奇点, r_i 为连结 p_0 和 $p_i (i=1,2)$ 的轨道. p_1 和 p_2 为最小吸引子, 其结构如图 6.7(c) 所示.

证明 显然吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 包含了所有 (6.5.16) 的分歧奇点. 将证明 $\mathcal{A}_\lambda$ 中不含同胚于 S^1 的延拓轨道.

因为 $J_\lambda x$ 的轨道是从 $x=0$ 出发辐射状的直线, 而由引理 6.3, 所有 $F(x,\lambda)$ 的轨道在 $x=0$ 点与 $F(x,\lambda)$ 的直线轨道相切, 因而在 $x=0$ 的邻域内 $J_\lambda x$ 与 $F(x,\lambda)$ 横截相交, 除了在 $F(x,\lambda)$ 的直线轨道上. 这样, (6.5.16) 的所有分歧奇点一定是在 $F(x,\lambda)$ 的直线轨道 L 上, 并且 L 是 (6.5.16) 的不变集, 它由轨道和奇点构成.

取正交坐标系 (x_1,x_2), 以 L 为 x_1 轴, 则 $F(x,\lambda)$ 取 (6.5.28) 的形式. 容易验证 $J_\lambda+F(\cdot,\lambda)$ 在 L 上 (即 x_1 轴) 只有一个非零奇点

$$x_0=(-\beta(\lambda)/a,0),$$

并且 $J_\lambda+F(\cdot,\lambda)$ 在 x_0 点的 Jacobi 矩阵为

$$D(J_\lambda+F)(x_0)=\begin{pmatrix}-\beta(\lambda) & * \\ 0 & \left(1-\dfrac{b}{a}\right)\beta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{6.5.35}$$

这意味着直线 L 上有两个轨道 $r_1,r_2\subset L$ 收敛到 x_0 点, 并且其中一个是从 $x=0$ 连结到 x_0. 这就推出包含所有分歧奇点的吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 没有闭延拓轨道, 并且 $J_\lambda+F(\cdot,\lambda)$ 的分歧奇点数等于引理 6.3 中的 k.

当 $k=1$ 时, 由 $\text{ind}(F(\cdot,\lambda_0),0)=2$ 知

$$\text{ind}(J_\lambda+F,z_0)=2-\text{ind}(J_\lambda+F,0)=1$$

再由 (6.5.35) 知 z_0 为 Morse 指数零的奇点, 因而 $\mathcal{A}_\lambda=\{z_0\}$ 其结构如图 6.7(a) 所示.

当 $k=2$ 时, $J_\lambda+F$ 有两个奇点 z_1,z_2. 由定理 4.18, z_1 是退化的, z_2 为非退化的. 再由 (6.5.35) 可知

$$\text{ind}(J_\lambda+F,z_1)=0,\quad \text{ind}(J_\lambda+F,z_2)=1,$$

并且 z_2 是 Morse 指数零的奇点，即 z_2 为一吸引子. 而由 Poincaré 公式 (6.5.20), z_1 有严格两个双曲区域及一个不稳定流形 r.r 即为连结 z_1 和 z_2 的轨道. 因此 $\mathcal{A}_\lambda = r \cup \{z_1, z_2\}$, 其结构如图 6.7(b) 所示.

当 $k = 3$ 时， $J_\lambda + F$ 有三个奇点 z_1, z_2, z_3, 并且由定理 4.18 它们都是非退化的. 因而有

$$\begin{cases} \text{ind}(J_\lambda + F, z_1) = -1, \\ \text{ind}(J_\lambda + F, z_2) = \text{ind}(J_\lambda + F, z_3) = 1. \end{cases}$$

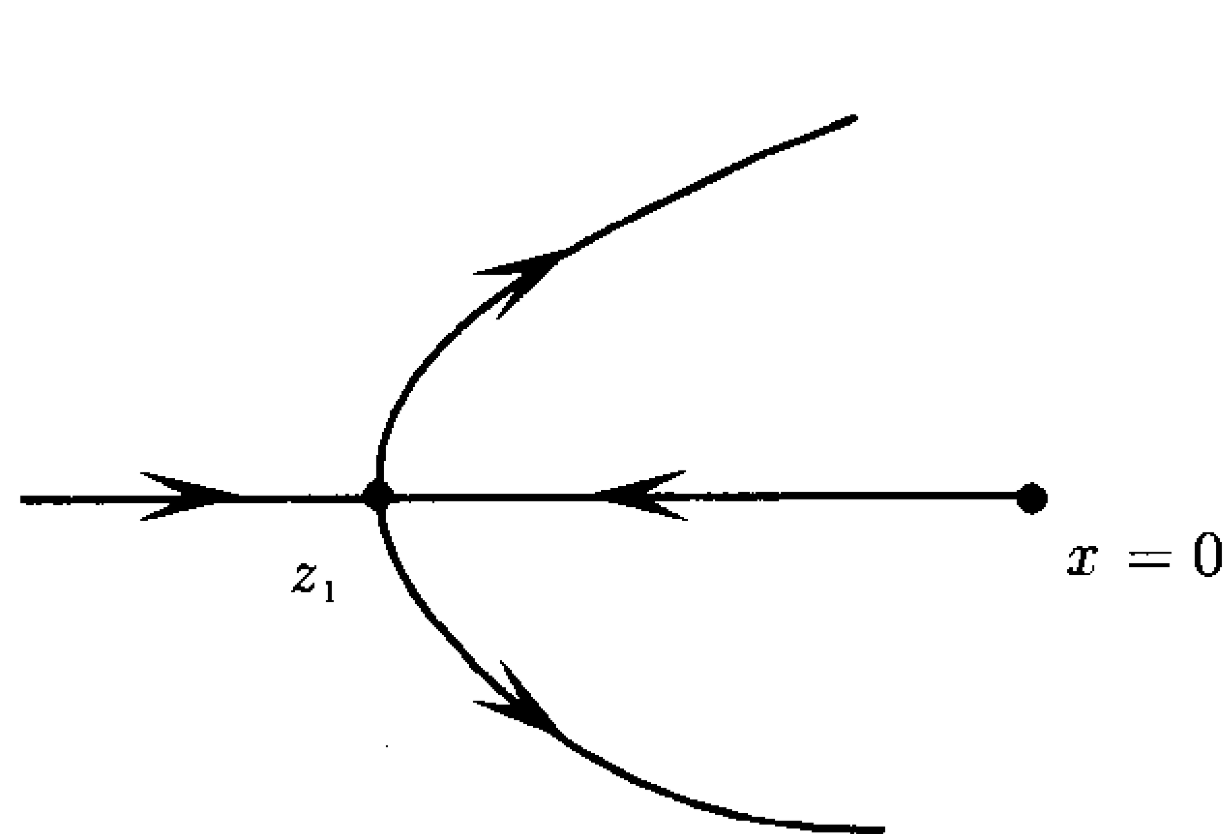
再由 (6.5.35) 可知， z_1 为鞍点， z_2 和 z_3 是吸引子. 在这种情况下 $\mathcal{A}_\lambda$ 有如图 6.7(c) 所示的结构. 引理证毕.

现在，从引理 6.4~6.6 就可以推得定理 6.18. 但需要说明一点的是，在引理 6.6 中 $k = 2$ 时， $J_\lambda + F$ 的一个奇点 z_1 具有指标零，因而在高阶摄动下，(6.5.15) 在 z_1 附近或者没有奇点，或者有两个奇点，或者仍保持为一个奇点. 当为两个奇点时，其指标分别为 +1 和 −1. 这是由 (6.5.35) 所保证的. 这样，在摄动下定理结论 (2) 仍成立. 定理证毕.

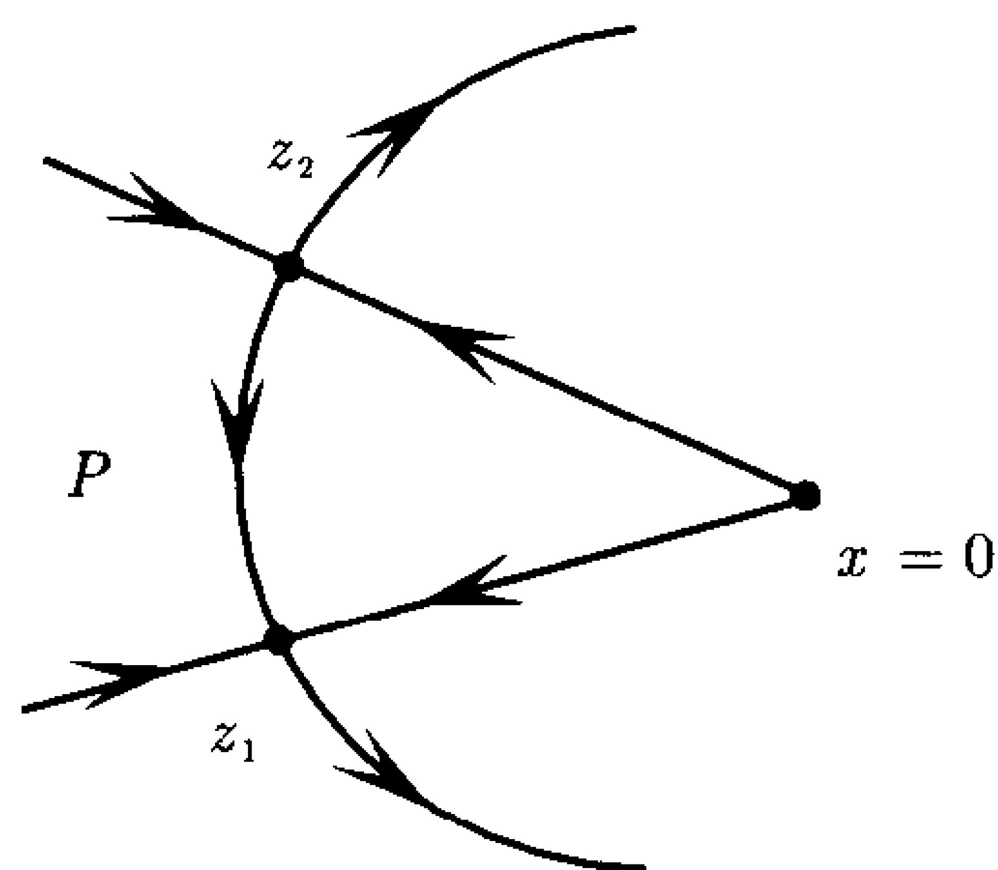
定理 6.19 的证明　当 $\lambda_0 < \lambda$ 时，所有在 $x = 0$ 附近的奇点其指标为

$$\sum_{i=1}^{k} \text{ind}(J_\lambda + F, z_k) = -\text{ind}(J_\lambda + F, 0) = -1. \tag{6.5.36}$$

因而当 $J_\lambda + F$ 只有一个分歧奇点 z_1 时， $\text{ind}(J_\lambda + F, z_1) = -1$. 这意味着 z_1 是一个鞍点，它有一个余一维的稳定流形和不稳定流形，其中稳定流形的一端连结到 $x = 0$. 这样，其稳定没有将 $x = 0$ 的邻域分为两个部分. 因而跳跃区域是连通的，如图 6.13(a) 所示.



(a) 一个分歧奇点 z_1 的情况



(b) 两个分歧奇点 z_1, z_2 的情况

图 6.13

当 $J_\lambda + F$ 只有两个分歧奇点 z_1, z_2 时，由 (6.5.35) 和 (6.5.36),

$$\text{ind}(J_\lambda + F, z_1) = 0, \quad \text{ind}(J_\lambda + F, z_2) = -1.$$

即 z_2 是一个鞍点, z_1 有严格两个双曲区域, 及一个抛物区域 P, P 内轨道收敛到 z_1. 这样 z_1 的抛物区域 P 是一个稳定区域, 它是由 $F(x,\lambda)$ 的两个直线轨道所围成, 因而是一个扇形区域 $D(\theta)(0<\theta\leqslant\pi)$. 而开集

$$D(\psi)=U/\overline{D(\theta)},\quad \psi+\theta=2\pi$$

是一个连通的跳跳型区域, 如图 6.13(b) 所示.

当 $J_\lambda+F$ 有三个分歧点 z_1,z_2,z_3 时, 则有

$$\begin{cases}\operatorname{ind}(J_\lambda+F,z_1)=1,\\ \operatorname{ind}(J_\lambda+F,z_2)=\operatorname{ind}(J_\lambda+F,z_3)=-1,\end{cases}$$

然后由 (6.5.35), z_1 是一个吸引子, 其结构如图 6.8 所示. 定理证毕.

§6.5.4　k 阶非退化奇点

现在考虑 $L_\lambda+G(\cdot,\lambda)$ 在 $(0,\lambda_0)$ 是 k 阶非退化的情况, 这里 $k\geqslant 2$ 为整数. 记

$$u_0(x)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{p+q=k}a^1_{pq}x_1^px_2^q\\ \sum\limits_{p+q=k}a^2_{pq}x_1^px_2^q\end{pmatrix},\tag{6.5.37}$$

其中 a^i_{pq} 是下面 k 重齐次项关于 x_1 和 x_2 的展开系数

$$\langle G_k(x_1e_1+x_2e_2,\lambda_0),e_i^*(\lambda_0)\rangle=\sum_{p+q=k}a^i_{pq}x_1^px_2^q,\quad i=1,2,$$

其中 $G(u,\lambda)=G_k(u,\lambda)+o(\|u\|^k), G_k:X_1\times\cdots\times X_1\to X$ 为 k 重线性算子. 引入下面代数方程

$$a^1_{0k}z^{k+1}+\sum_{p+q=k,\ p\neq0,q\neq0}(a^1_{pq-1}-a^2_{pq})z^q-a^2_{k0}=0.\tag{6.5.38}$$

下面定理是定理 4.18 的更一般观点, 它是后面跃迁定理的基础.

定理 6.20　假设 (6.1.2) 和 (6.1.3) 成立, $m=r=2$, 及 $\beta_1(\lambda)=\beta_2(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近. 如果 $L_\lambda+G(\cdot,\lambda)$ 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 是 k 阶非退化的, 那么下面结论成立:

(1) 方程 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的两边最多有 $2(k+1)$ 个分歧解;

(2) 若方程 (6.5.38) 有 r 个重数为 1 的实数解, 则 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 两侧至少有 $2r$ 个正则分歧解. 如果 (6.5.38) 所有 r 个解都是重数为 1 的, 则 (6.0.1) 有严格 $2r$ 个解并且当 $k=$ 偶数时, (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 两侧分歧解个数相等.

(3) 若 (6.0.1) 的分歧解个数为 $2(k+1)$, 则这些解都是正则的. $k=$ 偶数时, (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 每侧为 $k+1$ 个解.

证明　(6.0.1) 的分歧奇点由下面约化方程确定

$$\beta(\lambda)x+u_0(x)+o(|x|)=0,\quad x\in R^2, \tag{6.5.39}$$

其中 $\beta(\lambda)=\beta_1(\lambda)=\beta_2(\lambda), u_0$ 由 (6.5.37) 给出. (6.5.39) 的分歧可归为下面近似方程

$$\beta(\lambda)x+u_0(x)=0. \tag{6.5.40}$$

令 (6.5.40) 的解可表示为 $x_2=zx_1, z\in R^1$, 则 z 满足方程 (6.5.38). 此时 (6.5.40) 的解可写为

$$\begin{cases} x_1^{k-1}=\beta(\lambda)\Big/\displaystyle\sum_{p+q=k}a_{pq}^1z^q, \\ x_2=zx_1, \end{cases} \tag{6.5.41}$$

这里假设 $\displaystyle\sum_{p+q=k}a_{pq}^1z^q\neq 0$, 若不然可以考虑 $x_1=zx_2$.

这样, (6.5.40) 的解与 (6.5.38) 的解是相对应的. 正如定理 4.18 的证明那样, 如果 z 是 (6.5.38) 重数为 1 的解, 则对 (6.5.40) 的摄动方程 (6.5.39), 存在唯一 $\widetilde{z}\sim z$, 使得

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1^{k-1}=\beta(\lambda)\Big/\displaystyle\sum_{p+q=k}a_{pq}^1\widetilde{z}^q+o(|\beta(\lambda)|), \\ \widetilde{x}_2=\widetilde{z}\widetilde{x}_1 \end{cases} \tag{6.5.42}$$

是 (6.5.39) 的解, 其中 $\widetilde{z}$ 满足

$$a_{0k}^1z^{k+1}+\sum_{p+q=k}(a_{pq-1}^1-a_{pq}^2)z^q-a_{k0}^2+o(|\beta(\lambda)|)=0. \tag{6.5.43}$$

另一方面, 从 (6.5.41) 可以看到, 对应于每一个 (6.5.38) 的解 z, (6.5.40) 有严格两个解: 当 $k=$ 偶数时, 关于 $\beta(\lambda)<0(\lambda<\lambda_0)$ 和 $\beta(\lambda)>0(\lambda>\lambda_0)$ 各有一个解

$$\begin{cases} x_1^{\pm}=\left(\beta(\lambda)\Big/\displaystyle\sum_{p+q=k}a_{pq}^1z^q\right)^{1/k-1}, \quad 对\beta>0 和 \beta<0, \\ x_2=zx_1^{\pm}, \end{cases}$$

而当 $k=$ 奇数时, (6.5.41) 只允许 $\beta(\lambda)<0$ 和 $\beta(\lambda)>0$ 的一种情况有解, 并且解是成对出现.

因而当 (6.5.38) 有 r 个重数为 1 的解 $z_i(\leqslant i\leqslant r)$ 时，摄动方程 (6.5.43) 在每个 z_i 附近都有一个唯一解 $\widetilde{z}_i$. 这样方程 (6.5.39) 至少有 $2r$ 个解 (6.5.42) 在 $\lambda=\lambda_0$ 两侧. 因为 (6.5.38) 最多只有 $k+1$ 个实数解，并且如果达到 $k+1$ 个解，则它们全部是重数为 1 的. 此外这些重数为 1 的解在任何摄动下数目不会变化，这意味着对应的解 (6.5.41) 是非退化的. 这样结论 (1)~(3) 得证. 定理证毕.

下面定理是关于一般 k 情况的跃迁结果.

定理 6.21 在 (6.2.1) 和 (6.2.2) 条件下，$m=r=2,\beta_1(\lambda)=\beta_2(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近. 如果 (6.5.37) 所给 u_0 是 k 阶非退化的，那么下面结论成立.

(1) 向量场 u_0 在 $x=0$ 的指标满足

$$\mathrm{ind}(u_0,0)=\begin{cases}\text{偶数，当 } k=\text{偶数},\\ \text{奇数，当 } k=\text{奇数}.\end{cases}$$

并且其取值范围为

$$\mathrm{ind}(u_0,0)=\begin{cases}0,\pm 2,\cdots,\pm k, & \text{当 } k=\text{偶数},\\ \pm 1,\pm 3,\cdots,\pm k, & \text{当 } k=\text{奇数}.\end{cases}$$

(2) 当 $\mathrm{ind}(u_0,0)=-k$ 时，(6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 一定是一个跳跃型跃迁，并且有严格 k 个连通跃迁区域.

(3) 当 $\mathrm{ind}(u_0,0)\geqslant 2$ 时，(6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 是混合型跃迁，并且在稳定区域内分歧出一个吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 其维数 $\dim\mathcal{A}_\lambda\leqslant 1,\mathcal{A}_\lambda$ 吸引至少 n 个扇形区域 $D_r(\theta_i)(1\leqslant i\leqslant n),0<\theta_i$ 及 $\sum_{i=1}^n\theta_i\leqslant 2\pi$, 其中 $n=\mathrm{ind}(u_0,0)-1$.

(4) 当 $-1\geqslant\mathrm{ind}(u_0,0)\geqslant -k$ 时，(6.0.1) 分歧出至少 $2n$ 个鞍点，其中 $n=|\mathrm{ind}(u_0,0)|+1$.

证明 下面分别对每个结论进行证明.

结论 (1) 的证明. 指标为奇或偶的性质可由拓扑度的奇映射和偶映射定理推得.

由 Poincaré 指标公式 (6.5.20), 若 u_0 在 $x=0$ 的所有区域都是双曲的，则区域数 $2r$ 与指标关系为

$$\mathrm{ind}(u_0,0)=1-r. \tag{6.5.44}$$

而对 k 齐次向量场 $u_0,2r$ 个双曲区域意味着 u_0 具有严格的 r 个直轨道线. 因而 $J_\lambda x+u_0(x,\lambda)$ 在 $(0,\lambda_0)$ 处可分歧出至少 $2r$ 个奇点. 由定理 6.20, 最大分歧奇点数为 $2(k+1)$. 因而 r 最大能取到 $k+1$. 由 (6.5.44) 可知 u_0 在 $x=0$ 的指标 $\mathrm{ind}(u_0,0)\geqslant -k$.

同理, u_0 在 $x=0$ 的所有椭圆区域数为 $2r$ 时, 其指标为

$$\operatorname{ind}(u_0,0)=1+r. \tag{6.5.45}$$

而 $u_0=(u_1^0,u_2^0)$ 最多可分解为

$$u_1^0=(x_1-\alpha_1x_2)\cdots(x_1-\alpha_kx_2), \tag{6.5.46}$$

$-\infty<\alpha_k<\alpha_{k-1}<\cdots<\alpha_1\leqslant+\infty$. 这些直线 $x_1=\alpha_kx_2$ 将 R^2 分为 $2k$ 个区域 $Q_i(1\leqslant i\leqslant 2k)$. 正如引理 6.4 的证明那样 (见 (6.5.26) 式和图 6.12), u_1^0 在 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{2k}$ 内依次变号:

$$\begin{cases}u_i^0>0, & 在Q_1,Q_3,\cdots,Q_{2k-1},\\ u_i^0<0, & 在Q_2,Q_4,\cdots,Q_{2k}.\end{cases} \tag{6.5.47}$$

注意到, 在每个椭圆区域内 u_i^0 严格地变一次号. 因而 (6.5.47) 意味着 u_0 在 R^2 中最多只能有 $2(k-1)$ 个椭圆区域. 再由 (6.5.45) 可推出 $\operatorname{ind}(u_0,0)\leqslant k$. 这样结论 (1) 得证. 结论 (2) 的证明根据定理 6.20, 应用引理 6.1 的证明方法可以得到. 这里不再重复.

结论 (3) 的证明. 该证明是建立在这一事实之上的, 即当 $\operatorname{ind}(u_0,0)\geqslant 2$ 时, 由 Poincaré 指标公式 (6.5.20), 至少有 n 对 $(n=\operatorname{ind}(u_0,0)-1)$ 如图 6.14 所示的椭圆区域 E_1,E_2 和抛物区域 P(也许 $P=\varnothing$), 使得

$$\lim_{t\to\infty}S_\lambda(t)x=0,\quad \forall x\in E_1\cup E_2\cup P,$$

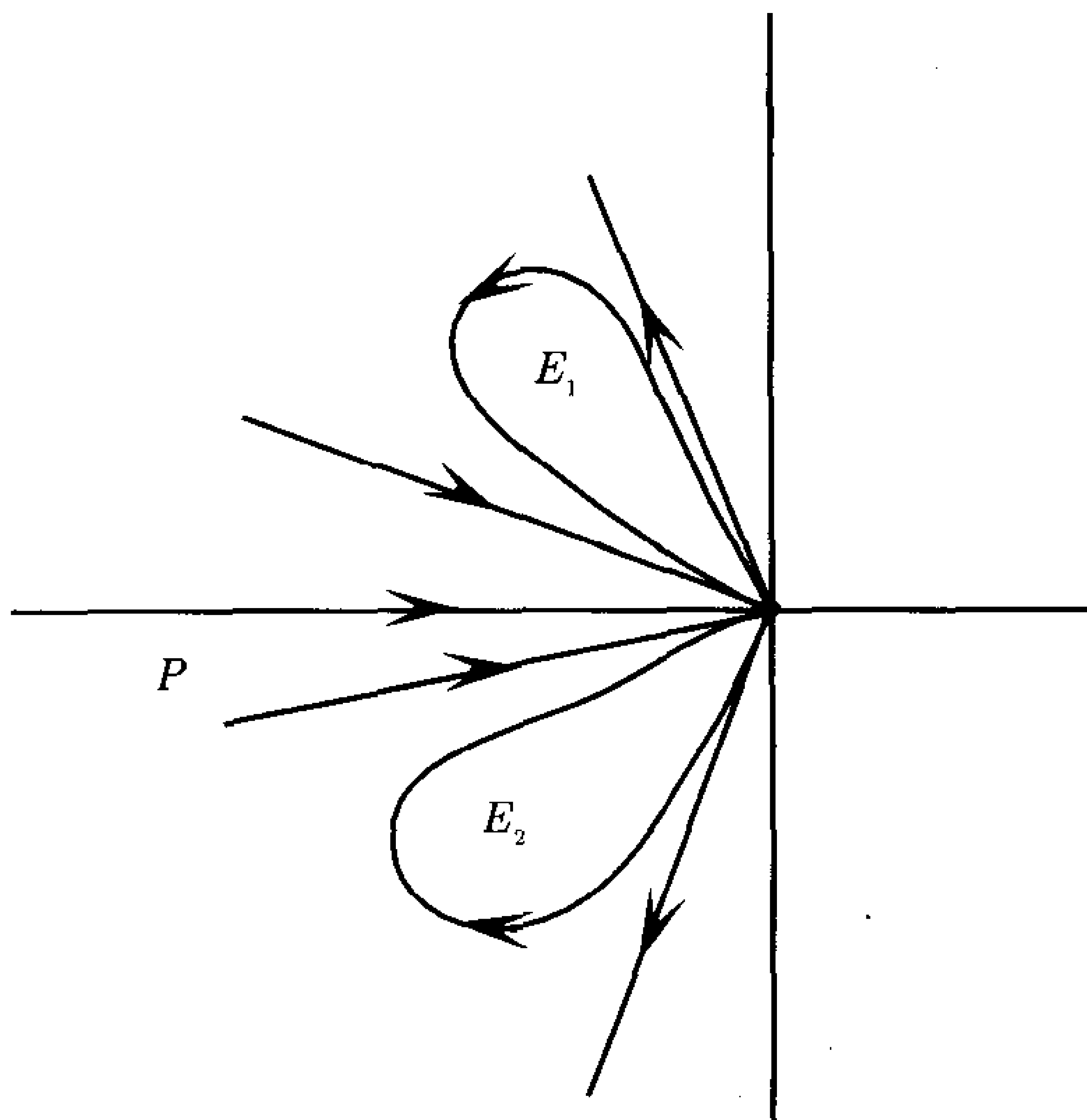


图 6.14

这里 $S_\lambda(t)$ 是由 $u_0(x,\lambda)$ 生成的算子半群. 然后应用引理 6.5 相同的证明方法可以得到结论 (2).

结论 (4) 的证明. 由公式 (6.5.20),u_0 在 $x=0$ 的邻域至少有 n 对 ($n = 1+|\text{ind}(u_0,0)|$) 双曲区域. 每一对双曲区域一定具有一个直轨道线. 而 $J_\lambda+u_0$ 在这些直轨道线上分歧出至少 $2n$ 个奇点, 它们的 Jacobi 矩阵满足 (6.5.35). 因而它们必是鞍点 (因为在双曲区域不会分歧出吸引子). 结论 (4) 得证.

定理 6.21 证毕.

§6.5.5 周期轨道的分歧

现在考虑 $m=2, r=1$ 及 $k=$ 奇数 $\geqslant 3$.

因为在 (6.2.1) 和 (6.2.2) 中 $m=2, r=1, L_\lambda$ 在 λ_0 的两个特征向量 e_1 和 e_2 具有下面性质 (见 §4.1) :

$$L_{\lambda_0}e_1=0,\quad L_{\lambda_0}e_2=ae_1,$$

$$L^*_{\lambda_0}e^*_2=0,\quad L^*_{\lambda_0}e^*_1=ae^*_2,\quad a\neq 0,$$

$$\langle e_i,e^*_j\rangle\begin{cases}>0, & i=j,\\ =0, & i\neq j,\end{cases}\quad i=1,2.$$

令 $\alpha\in R^1$ 是由下面定义的数

$$\alpha=\langle G_k(e_1,\lambda_0),e^*_2\rangle,\quad k\geqslant 3\text{为奇数}, \tag{6.5.48}$$

这里 $G_k(u,\lambda)$ 如 (6.1.1).

然后有下面周期轨道分歧定理.

定理 6.22 假设条件 (6.1.2) 和 (6.1.3),$m=2, r=1$ 以及 $k\geqslant 3$ 为奇数. 令 $\alpha\neq 0$ 由 (6.5.48) 给出. 如果 $\alpha\cdot a<0$, 那么有下面结论.

(1) 方程 (6.0.1) 从 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 分歧出一个周期轨道.

(2) 当条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 成立时, (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 的跃迁或者是连续型 (吸引子分歧), 或者是跳跃型的.

注 6.8 该定理正好是对定理 4.17 关于 $m=2, r=1, \alpha<0(a=1)$ 情况的补充, 在那里没有奇点分歧发生.

注 6.9 应用定理 6.12 相同的方法可以证明, 定理 6.22 中 (6.0.1) 关于周期轨道分歧的判别值 b 与 (6.4.11) 是一致的.

定理 6.22 的证明 分下面四步进行证明.

第一步. (6.0.1) 的规范约化方程 (6.1.11) 可表达为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \beta_1(\lambda)x_1 + ax_2 + \langle G(x+h(x,\lambda),\lambda), e_1^*(\lambda)\rangle, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \beta_2(\lambda)x_2 + \langle G(x+h(x,\lambda),\lambda), e_2^*(\lambda)\rangle, \end{cases} \tag{6.5.49}$$

其中 $x = x_1e_1(\lambda) + x_2e_2(\lambda), h(x,\lambda)$ 为中心流形函数,

$$\begin{aligned} &L_\lambda e_1(\lambda) = \beta_1(\lambda)e_1(\lambda), \\ &L_\lambda e_2(\lambda) = \beta_2(\lambda)e_2(\lambda) + ae_1(\lambda), \\ &L_\lambda^* e_2^*(\lambda) = \beta_2(\lambda)e_2^*(\lambda), \\ &L_\lambda^* e_1^*(\lambda) = \beta_1(\lambda)e_1^*(\lambda) + ae_2^*(\lambda), \\ &\langle e_i(\lambda), e_j^*(\lambda)\rangle = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

由 (6.5.48), 方程 (6.5.49) 在 $\lambda = \lambda_0$ 写为

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = \begin{cases} F_1(x), \\ F_2(x), \end{cases} \tag{6.5.50}$$

其中

$$F_1(x) = ax_2 + O(|x_1|^k, |x_2|^k),$$

$$F_2(x) = \alpha x_1^k + O(|x_1|^{k+1}, |x_2|^k, |x_2|^{k-1}|x_1|, \cdots, |x_2||x_1|^{k-1}).$$

因为 $\alpha \cdot a < 0$ 及 $k \geqslant 3$ 为奇数, 有

$$\text{ind}(F, 0) = 1. \tag{6.5.51}$$

第二步. 证明向量场 F 在 $x=0$ 的椭圆区域数为 0. 假设不然, 那么存在一个 (6.5.50) 的轨道 L 收敛到 $x=0$, 也就是说

$$\lim_{t\to\infty} S(t)x = 0, \quad \forall x \in L,$$

这里 $S(t)$ 是由 (6.5.50) 生成的算子半群. 令 L 在 $x=0$ 的邻域内能够表达为

$$x_2 = f(x_1), \quad (x_1, x_2) \in L.$$

从 (6.5.50) 可推出, 对任意 $(x_1, x_2) \in r$, 有

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\alpha x_1^k + O(|x_1|^{k+1}, |f(x_1)|^k, |x_1||f|^{k-1}, \cdots, |x_1|^{k-1}|f|)}{af(x_1) + O(|x_1|^k, |f|^k)}.$$

于是得到

$$aff' + O(|x_1|^k, |f|^k)f' = \alpha x_1^k + O(|x_1|^{k+1}, |x_1|^{k-i}|f|^i). \tag{6.5.52}$$

这意味着

$$f(x) = \beta x^m + o(|x|^m), \quad 2 \leqslant m = \frac{k+2}{2} < k, \quad \beta \neq 0. \tag{6.5.53}$$

因而从 (6.5.52) 和 (6.5.53) 得到

$$\alpha = am\beta^2, \tag{6.5.54}$$

其中 $m \geqslant 2, \beta \neq 0$. 由假设 $\alpha \cdot a < 0$, 此与 (6.5.54) 矛盾. 因此 $F(x)$ 在 $x = 0$ 没有椭圆区域.

第三步. 由 (6.5.51) 及 Poincaré 公式 (6.5.20), $F(x)$ 在 $x = 0$ 也没有双曲区域. 因为$F(x)$在 $x = 0$点只有一个抛物区域 P, 并且由第二步可知 P内轨道是绕 $x = 0$ 点盘旋的. 因此 $x = 0$ 一定是下述三种情况之一: (a) 一个稳定焦点; (b) 一个不稳定焦点; (c)$x = 0$ 附近有无穷多周期轨道.

对情况 (a), $x = 0$ 是 (6.5.50) 局部渐近稳定奇点. 因而由定理 5.1, 方程 (6.5.49) 从 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 分歧出一个 S^1 吸引子 Σ_λ 在 $\lambda > \lambda_0$.

对情况 (b), $x = 0$ 是向量场 $-F(x)$ 的渐近稳定奇点, 因而下面向量场

$$\begin{pmatrix} \beta_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \beta_2(\lambda) \end{pmatrix} x - F(x)$$

情况 (c) 意味着 (6.5.49) 有一个周期轨道的分歧. 从 $(0, \lambda_0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 分歧出一个 S^1 吸引子 Σ_λ, 这意味着方程 (6.5.49) 从 $(0, \lambda_0)$ 在 $\lambda < \lambda_0$ 分歧出一个 S^1 排斥子 Σ_λ.

第四步. 现在, 需要证明 (6.5.49) 分歧出的 S^1 不变集 Σ_λ 不必含奇点. 考虑下面方程

$$\beta_1(\lambda)x_1 + ax_2 + O(|x_1|^k, |x_2|^k) = 0,$$

$$\beta_1(\lambda)x_2 + \alpha x_1^k + O(|x_1|^{k+1}, |x_2|^{k-i}|x_1|^i) = 0.$$

有

$$\begin{cases} x_2 = -\beta_1(\lambda)a^{-1}x_1 + O(|x_1|^k, |x_2|^k), \\ a\alpha x_1^{k-1} - \beta_1(\lambda)\beta_2(\lambda) + O(|x_1|^k, |x_1|^k|\beta_1|) = 0. \end{cases} \tag{6.5.55}$$

由 $\alpha a < 0, \beta_1(\lambda)\beta_2(\lambda) > 0$. 对 $\lambda \neq \lambda_0$, 方程 (6.5.55) 在 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 附近没有解. 因此 Σ_λ 不含奇点. 这意味着 Σ_λ 一定含有一个周期轨道.

这样结论 (2) 被证明. 结论 (1) 的证明与定理 6.11 是相同的. 定理 6.22 证明完毕.

§6.5.6 一个例子

作为应用，考虑下面方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + \alpha_1 \lambda u_1 + a u_2 + g_1(u_1, u_2), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + \alpha_2 \lambda u_2 + g_2(u_1, u_2), \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0, u_2|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{6.5.56}$$

其中 α_1, α_2, a 为常数， $\Omega \subset R^n (n \geqslant 1)$ 有界光滑区域，以及

$$g_1 = \sum_{i+j=2} a_{ij}^1 u_1^i u_2^j + \sum_{i+j=3} a_{ij}^2 u_1^i u_2^j + o(|u|^3),$$

$$g_2 = \sum_{i+j=2} b_{ij}^1 u_1^i u_2^j + \sum_{i+j=3} b_{ij}^2 u_1^i u_2^j + o(|u|^3).$$

含 $\lambda_1 > 0$ 和 $h_1(x)$ 是下面方程的第一特征值和特征函数

$$\begin{cases} -\Delta h_1 = \lambda_1 h_1, \\ h_1|_{\partial\Omega} = 0,\ h_1 > 0, \quad 在\ \Omega\ 内. \end{cases}$$

记下面空间

$$\begin{cases} X = L^p(\Omega), \quad p \geqslant n \\ X_1 = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

然后定义对应的算子 $L_\lambda = -A + B_\lambda : X_1 \to X$ 和 $G : X_1 \to X$ 如下

$$-Au = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}, \quad B_\lambda u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \lambda & a \\ 0 & \alpha_2 \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad Gu = \begin{pmatrix} g_1(u_1, u_2) \\ g_2(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

知道对 L_λ 和 G 条件，(6.0.2) 和 (6.0.3) 成立.

情况 1. $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. 此时 $\beta_1(\lambda) = \alpha_1 \lambda - \lambda_1, \lambda_0 = \alpha_1^{-1} \lambda_1$, 以及 L_λ 和 L_λ^* 的第一特征向量 e_1 和 e_1^* 为

$$e_1 = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1^* = \begin{pmatrix} h_1 \\ -a\alpha_1 h_1/(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

令 $G_2(u)$ 是 G 的二重线性项，即

$$G_2(u) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j=2} a_{ij}^1 u_1^i u_2^j \\ \sum\limits_{i+j=2} b_{ij}^1 u_1^i u_2^j \end{pmatrix}.$$

令

$$\alpha = \langle G_2(e_1), e_1^* \rangle_H = \left[a_{20}^1 - \frac{\alpha_1 a}{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1} b_{20}^1 \right] \int_\Omega h_1^3 dx.$$

如果 $\alpha \neq 0$, 或者

$$a_{20}^1 - \frac{\alpha_1 a}{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda_1} b_{20}^1 \neq 0,$$

那么由定理 6.10, 方程 (6.5.56) 在 $(u, \lambda) = (0, \alpha_1^{-1}\lambda_1)$ 是一个混合型跃迁, 在 $u = 0$ 的一个邻域 U 可分为两个开集

$$U_1 = \left\{ u = (u_1, u_2) \in U | u_1 = \rho h_1 + v, \quad \text{其中} \rho \cdot \alpha > 0, \int_\Omega h_1(x) v_1(x) dx = 0 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ u = (u_1, u_2) \subset U | u_1 = \rho h_1 + v_1, \quad \text{其中} \rho \cdot \alpha < 0, \int_\Omega h_1(x) v_1(x) dx = 0 \right\},$$

使得 U_1 为 (6.5.56) 的跳跃区域, 而 U_2 为 (6.5.56) 的稳定区域. 并且 (6.5.56) 在 U_2 中分歧出一个奇点吸引子

$$v_\lambda = -\frac{\beta_1(\lambda)}{\alpha} \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(|\beta_1 \alpha^{-1}|) \in U_2,$$

v_λ 在 X 范数下吸引 U_2.

情况 2. $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$ 及 $a = 0$. 此时有 $\beta_1(\lambda) = \beta_2(\lambda) = \alpha_1 \lambda - \lambda_1$, 并且对应特征向量为

$$e_1 = e_1^* = \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = e_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix}.$$

此时对应于 (6.5.13) 的向量场 u_0 为

$$u_0(x) = c \begin{pmatrix} a_{20}^1 x_1^2 + a_{11}^1 x_1 x_2 + a_{02}^1 x_2^2 \\ b_{20}^1 x_1^2 + b_{11}^1 x_1 x_2 + b_{02}^1 x_2^2 \end{pmatrix},$$

其中 $c = \int_\Omega h_1^3(x) dx > 0$. 如果 $u_0(x)$ 是二阶非退化的, 那么定理 6.17~6.19 对方程 (6.5.56) 都适用.

情况 3. $\alpha_1 = \alpha_2 > 0, a_{ij}^1 = 0, b_{ij}^1 = 0$ 及 $a \neq 0$. 此时, 非线性项 $G(u) = G_3(u) + o(\|u\|^3)$, 其中

$$G_3(u) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i+j=3} a_{ij}^2 u_1^i u_2^j \\ \sum\limits_{i+j=3} b_{ij}^2 u_1^i u_2^j \end{pmatrix}.$$

此时第一特征值重数 $m=2, r=1$, 特征值为

$$\beta_1(\lambda)=\beta_2(\lambda)=\alpha_1\lambda-\lambda_1,\quad \lambda_0=\alpha_1^{-1}\lambda_1.$$

令

$$e_1=\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\h_1\end{pmatrix}.$$

$$e_1^*=\begin{pmatrix}h_1\\0\end{pmatrix},\quad e_2^*=\begin{pmatrix}0\\h_1\end{pmatrix}.$$

那么

$$L_{\lambda_0}e_1=0,\quad L_{\lambda_0}e_2=ae_1,$$

$$L_{\lambda_0}^*e_2^*=0,\quad L_{\lambda_0}^*e_1^*=ae_1^*.$$

令

$$\alpha=\langle G_3(e_1),e_2^*\rangle=\int_\Omega b_{30}^2h_1^3\cdot h_1dx=b_{30}^2\int_\Omega h_1^4dx.$$

由定理 6.22, 若 $b_{30}^2a<0$, 则方程 (6.5.56) 从 $(0,\alpha_1^{-1}\lambda_1)$ 分歧出一个周期轨道，其跃迁或为连续型的，或为跳跃型的，取决于如下判别值的符号

$$b=3(a_{30}^2+b_{03}^2)+(a_{12}^2+b_{21}^2).$$

若 $b<0$ 则跃迁为连续型的，方程 (6.5.56) 在 $\lambda>\alpha_1^{-1}\lambda_1$ 分歧出一个含有周期轨道的吸引子 Σ_λ. 若 $b>0$, 则为跳跃型的，(6.5.56) 在 $\lambda<\alpha_1^{-1}\lambda_1$ 分歧出一个含有周期轨道的排斥子 Σ_λ.

§6.6　摄动系统的跃迁理论

§6.6.1　一般情况

考虑 (6.0.1) 的摄动方程

$$\frac{du}{dt}=(L_\lambda+S_\lambda^\varepsilon)u+G(u,\lambda)+T_\lambda^\varepsilon(u),\tag{6.6.1}$$

其中, L_λ 和 $G(\cdot,\lambda)$ 如 (6.0.1) 所给出， $S_\lambda^\varepsilon: X_\sigma\to X$ 是一个线性摄动算子, $T_\lambda^\varepsilon: X_\sigma\to X$ 是一个 C^1 非线性摄动算子， X_σ 是分数次空间， $0\leqslant\sigma<1$. S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足

$$\begin{cases}\|S_{\lambda_0}^\varepsilon\|<\varepsilon,\quad \|T_{\lambda_0}^\varepsilon\|<\varepsilon,\\ T_\lambda(u)=o(\|u\|_{X_\alpha}).\end{cases}\tag{6.6.2}$$

由线性全连续场的谱理论[36], 在 (6.2.1) 和 (6.2.2) 条件下，对任何 $\varepsilon>0$ 充分小，存在一个参数 λ_0^ε,

$$\lambda_0^\varepsilon \to \lambda_0, \quad \text{当}\varepsilon \to 0,$$

使得 $L_\lambda + S_\lambda^\varepsilon$ 的特征值 $\{\beta_j^\varepsilon(\lambda)\}$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\beta_i^\varepsilon(\lambda) \begin{cases} <0, & \lambda<\lambda_0^\varepsilon, \\ =0, & \lambda=\lambda_0^\varepsilon, \quad 1\leqslant i\leqslant m_1 \\ >0, & \lambda>\lambda_0^\varepsilon, \end{cases} \\ \mathrm{Re}\beta_j^\varepsilon(\lambda_0^\varepsilon)<0, \quad \forall j\geqslant m_1+1, \end{cases} \tag{6.6.3}$$

其中 $1\leqslant m_1\leqslant m$, m 如 (6.2.1) 中的数.

下面定理是关于摄动系统 (6.6.1) 在临界态 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 跃迁到一个同调球吸引子的结果. 该定理在许多非线性科学问题中是非常有用的. 特别是在第八章中关于 Taylor 问题与赤道上大气层的 Walker 环流的研究中，摄动系统的跃迁理论起到关键作用.

定理 6.23 假设定理 6.2 条件成立，那么存在 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2), 并且 $0<\lambda-\lambda_0^\varepsilon<\delta$ 时，摄动系统 (6.6.1) 在 $(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁满足下面性质:

(1) 存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X$, 使得 (6.6.1) 有一个吸引子 $\Sigma_\lambda^\varepsilon\subset U$, 及 $\Sigma_\lambda^\varepsilon$ 吸引 U 中的一个开稠集 U_0, 并且

$$\begin{cases} \dim\Sigma_\lambda^\varepsilon\leqslant m, \quad 0\notin\Sigma_\lambda^\varepsilon, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0} d(\Sigma_\lambda^\varepsilon,\Sigma_\lambda)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{x\in\Sigma_\lambda^\varepsilon}\mathrm{dist}(x,\Sigma_\lambda)=0, \end{cases} \tag{6.6.4}$$

其中 Σ_λ 为方程 (6.0.1) 在 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的吸引子.

(2) 当 $\varepsilon>0$ 充分小时， $\Sigma_\lambda^\varepsilon$ 是一个 $(m-1)$ 维的同调球.

(3) 每一个 $u_\lambda\in\Sigma_\lambda^\varepsilon$ 能够表达为如下形式

$$\begin{cases} u_\lambda=v_\lambda+w_\lambda^\varepsilon, \quad v_\lambda\in E_0, \\ \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0,\ \varepsilon\to 0} v_\lambda=0, \\ \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0,\ \varepsilon\to 0} \|w_\lambda^\varepsilon\|/\|v_\lambda\|=0, \end{cases} \tag{6.6.5}$$

其中 E_0 如定理 6.2, 为 L_λ 在 $\lambda=\lambda_0$ 的第一特征空间.

(4) 如果 $u=0$ 是方程 (6.0.1) 的全局渐近稳定平衡点，并且 (6.6.1) 对任 $\lambda\in R^1$ 有一个全局吸引子，那么 $\Sigma_\lambda^\varepsilon$ 吸引 X/Γ, 这里 Γ 为 X 中余维 $\mathrm{codim}\,\Gamma\geqslant 1$ 的一个集合.

证明　应用定理 5.3 来证明该定理, 并且说明, 即使每个向量场的定义域依赖于该向量场, 定理 5.3 仍然成立.

$L_\lambda + S_\lambda^\epsilon$ 的特征值 $\{\beta_k^\epsilon(\lambda)\}$ 连续地依赖于算子 S_λ^ϵ[36]. 因此, 由条件 (6.2.2), 存在 $\varepsilon > 0$ 及 $\delta > 0$, 当 $S_\lambda^\epsilon : X_\sigma \to X$ 满足 (6.6.2) 及 $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ 时, $L_\lambda + S_\lambda^\epsilon$ 的特征值满足

$$\mathrm{Re}\beta_j^\epsilon(\lambda) < -\rho, \quad \forall j \geqslant m+1, \text{对某个}\rho > 0. \tag{6.6.6}$$

令 $L_\lambda^\epsilon = L_\lambda + S_\lambda^\epsilon$, 由 (6.2.1),(6.2.2) 和 (6.6.6), 空间 X_1 和 X 分别能够被分解为

$$X_1 = E_1^\lambda \oplus E_2^\lambda, \quad X = \widetilde{E}_1^\lambda \oplus \widetilde{E}_2^\lambda,$$

以及

$$X_1 = E_{1\varepsilon}^\lambda \oplus E_{2\varepsilon}^\lambda, \quad X = \widetilde{E}_{1\varepsilon}^\lambda \oplus \widetilde{E}_{2\varepsilon}^\lambda,$$

使得 $\dim E_1^\lambda$=$\dim E_{1\varepsilon}^\lambda = m$, 并且对 $i = 1, 2$,

$$\mathcal{L}_i^\lambda = L_\lambda|_{E_i^\lambda} \to \widetilde{E}_i^\lambda,$$

$$\mathcal{L}_{i\varepsilon}^\lambda = L_\lambda^\epsilon|_{E_{i\varepsilon}^\lambda} : E_{i\varepsilon}^\lambda \to \widetilde{E}_{i\varepsilon}^\lambda.$$

这些算子 $\mathcal{L}_1^\lambda$ 和 $\mathcal{L}_{1\varepsilon}^\lambda$ 分别有特征值 $\{\beta_1(\lambda), \cdots, \beta_m(\lambda)\}$ 和 $\{\beta_1^\epsilon(\lambda), \cdots, \beta_m^\epsilon(\lambda)\}$, 而这些算子 $\mathcal{L}_2^\lambda$ 和 $\mathcal{L}_{2\varepsilon}^\lambda$ 分别有特征值 $\{\beta_j(\lambda) | j \geqslant m+1\}$ 及 $\{\beta_j^\epsilon(\lambda) | j \geqslant m+1\}$.

这样, 由 §2.4 的中心流形定理, 存在 C^1 函数

$$h : O \to E_2^\lambda,$$

$$h_\varepsilon : O_\varepsilon \to E_{2\varepsilon}^\lambda,$$

这里 $O \subset E_1^\lambda$ 及 $O_\varepsilon \subset E_{1\varepsilon}^\lambda$ 为 $x = 0$ 的邻域, 使得方程 (6.0.1) 和 (6.6.1) 在中心流形上的吸引子是分别由下面约化方程确定

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{L}_1^\lambda x + PG(x + h(x), \lambda), \qquad x \in O \subset E_1^\lambda, \tag{6.6.7}$$

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \mathcal{L}_{1\varepsilon}^\lambda x_\varepsilon + P_\varepsilon G_\varepsilon(x_\varepsilon + h_\varepsilon(x_\varepsilon), \lambda), \quad x_\varepsilon \in O_\varepsilon \in E_{1\varepsilon}^\lambda, \tag{6.6.8}$$

其中 $G_\varepsilon(u, \lambda) = G(u, \lambda) + T_\lambda^\epsilon(u), P : X \to \widetilde{E}_1^\lambda : P_\varepsilon : X \to \widetilde{E}_{1\varepsilon}^\lambda$ 为规范投影.

我们知道 [32,98]

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} E_{1\varepsilon}^\lambda = E_1^\lambda, \lim\limits_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = h, \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}_{1\varepsilon}^\lambda = \mathcal{L}_1^\lambda, \lim\limits_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon = G. \end{cases} \tag{6.6.9}$$

此外, 由定理 6.2, 方程 (6.0.1) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 在 $\lambda > \lambda_0$ 分歧出一个吸引子 $\Sigma_\lambda \subset X$. 因此当 $\lambda_0 - \delta < \lambda \leqslant \lambda_0$ 时, (6.6.7) 在 O 中有唯一平凡吸引子 $x = 0$,

及当 $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ 时，(6.6.7) 从 $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 分歧出一个吸引子，仍记为 Σ_λ, 并且 Σ_λ 吸引 $O/\{0\}$.

由吸引子稳定性定理 (定理 5.3), 从 (6.6.9) 可推出，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，(6.6.8) 在 O_ε 中有一个吸引子 $\Sigma_\lambda^\varepsilon$, 对所有 $\lambda_0^\varepsilon < \lambda < \lambda_0^\varepsilon + \delta$, 使得

$$\Sigma_\lambda^\varepsilon \to \Sigma_\lambda, \quad \lambda_0^\varepsilon \to \lambda_0, \quad 当\varepsilon \to 0. \tag{6.6.10}$$

显然 $\dim\Sigma_\lambda^\varepsilon \leqslant m$. 由 (6.6.3) 可推出，$o \notin \Sigma_\lambda^\varepsilon$, 对所有 $\lambda_0^\varepsilon < \lambda$. 这样性质 (1) 被证明. 性质 (2) 可由定理 6.2 及这个事实推出，即对 $\lambda > \lambda_0^\varepsilon$, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时，$L_\lambda + S_\lambda^\varepsilon$ 的所有前 m 个特征值 $\mathrm{Re}\beta_i^\varepsilon(\lambda) > 0$, 因而，由不稳定流形定理保证了 $\dim \Sigma_\lambda^\varepsilon \geqslant m - 1$, 再由 (6.6.10) 可推知，$\Sigma_\lambda^\varepsilon$ 是一个 $(m-1)$ 维同调球. 定理中性质 (3) 可由 (6.6.9) 及定理 6.2 结论 (4) 推出. 最后，性质 (4) 可由定理 6.2 结论 (6) 和定理 3.5 推出. 定理证毕.

§6.6.2 单特征值情况

在这一小节，考虑在 (6.4.1) 条件下，即临界横穿单特征值情况的摄动系统跃迁问题.

首先，考虑摄动跃迁稳定性问题. 此时，非线性算子 $G(u, \lambda) = G_2(u, \lambda) + o(\|u\|^2)$, 并且

$$b = \langle G_2(e, \lambda_0), e^* \rangle \neq 0, \tag{6.6.11}$$

其中 $e \in X, e^* \in X^*$ 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 的特征向量，$G_2(u, \lambda)$ 为二重线性算子.

在 (6.6.11) 条件下，实数 b 就相当于 §5.3 节中动态分歧以结构稳定性定理中的分歧数. 事实上，在中心流形约化后，再应用定理 5.14 可立刻推出下面摄动跃迁稳定性定理. 下面总是假设 G 和 T_λ^ε 是 C^3 映射.

定理 6.24 假设条件 (6.4.1) 和 (6.6.11) 成立，则存在 $\varepsilon > 0$, 使对任何满足 (6.6.2) 的 S_λ^ε 和 T_λ^ε, 摄动系统 (6.6.1) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 具有与 (6.0.1) 在 $(0, \lambda_0)$ 完全相同的跃迁结构，即定理 6.10 的结论对 (6.6.1) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁成立.

下面，考虑可产生鞍结点分歧的摄动系统跃迁问题. 令 $h(x, \lambda)$ 为 (6.0.1) 在 $\lambda = \lambda_0$ 附近的中心流形函数，假设

$$\langle G(xe + h(x, \lambda_0), \lambda_0), e^* \rangle = b_1 x^3 + o(|x|^3), \tag{6.6.12}$$

其中 $b_1 \neq 0, e$ 和 e^* 如 (6.6.11). 然后，有下面定理.

定理 6.25 令 (6.4.1) 和 (6.6.12) 成立，并且 $b_1 < 0$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2) 时，摄动系统 (6.6.1) 在 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁或为连续型

或者是混合型. 若为连续型则定理 6.9 结论 (2) 和 (3) 成立, 若为混合型, 则下面结论成立:

(1) 方程 (6.6.1) 在 $\lambda<\lambda_0^\varepsilon$ 一侧具有一个鞍结分歧点 $(u^*,\lambda^*)\in X\times R^1$, 并且在 $\lambda^*<\lambda$ 分歧出严格两个奇点分支 $\Gamma_i^\lambda=\{(u_i^\lambda,\lambda)|\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta$, 对某个 $\delta>0\}$, 如图 6.15(a) 所示, 使得

$$\|u_1^\lambda\|_X\geqslant r>0,\quad \forall(u_1^\lambda,\lambda)\in\Gamma_1^\lambda,\quad \lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta,$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0^\varepsilon}\|u_2^\lambda\|_X=0,\quad 对(u_2^\lambda,\lambda)\in\Gamma_2^\lambda.$$

(2) 存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X$, 使得对每个 $\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta,\lambda\neq\lambda_0^\varepsilon,U$ 只包含 (6.6.1) 的两个非零奇点 u_1^λ 和 u_2^λ.

(3) 对每个 $\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta$, U 能够分解为两个开集 $U_1^\lambda,U_2^\lambda,\bar{U}=\bar{U}_1^\lambda+\bar{U}_2^\lambda,U_1^\lambda\cap U_2^\lambda=\varnothing$, 使当 $\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon$ 时, $u_1^\lambda\in U_0^\lambda,0\in U_2^\lambda,u_2^\lambda\in\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda$, 并且 u_1^λ 和 $u=0$ 是两个吸引子分别吸引 U_1^λ 和 U_2^λ; 而当 $\lambda_0^\varepsilon<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta$ 时, $u_1^\lambda\in U_1^\lambda,u_2^\lambda\in U_2^\lambda,0\in\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda$, 并且 u_1^λ,u_2^λ 是吸引子分别吸引 U_1^λ 和 U_2^λ.

(4) 在 $(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 附近 u_1^λ 和 u_2^λ 可表示为

$$\begin{cases}u_1^\lambda=\alpha_1(\lambda,\varepsilon)e+o(|\alpha_1|),\\ u_2^\lambda=\alpha_2(\lambda,\varepsilon)e+o(|\alpha_2|),\end{cases}\tag{6.6.13}$$

其中 e 如 (6.6.11),$\alpha_2(\lambda,\varepsilon)\to0$ 当 $\lambda\to\lambda_0^\varepsilon,\alpha_1(\lambda_0^\varepsilon,\varepsilon)\neq0$.

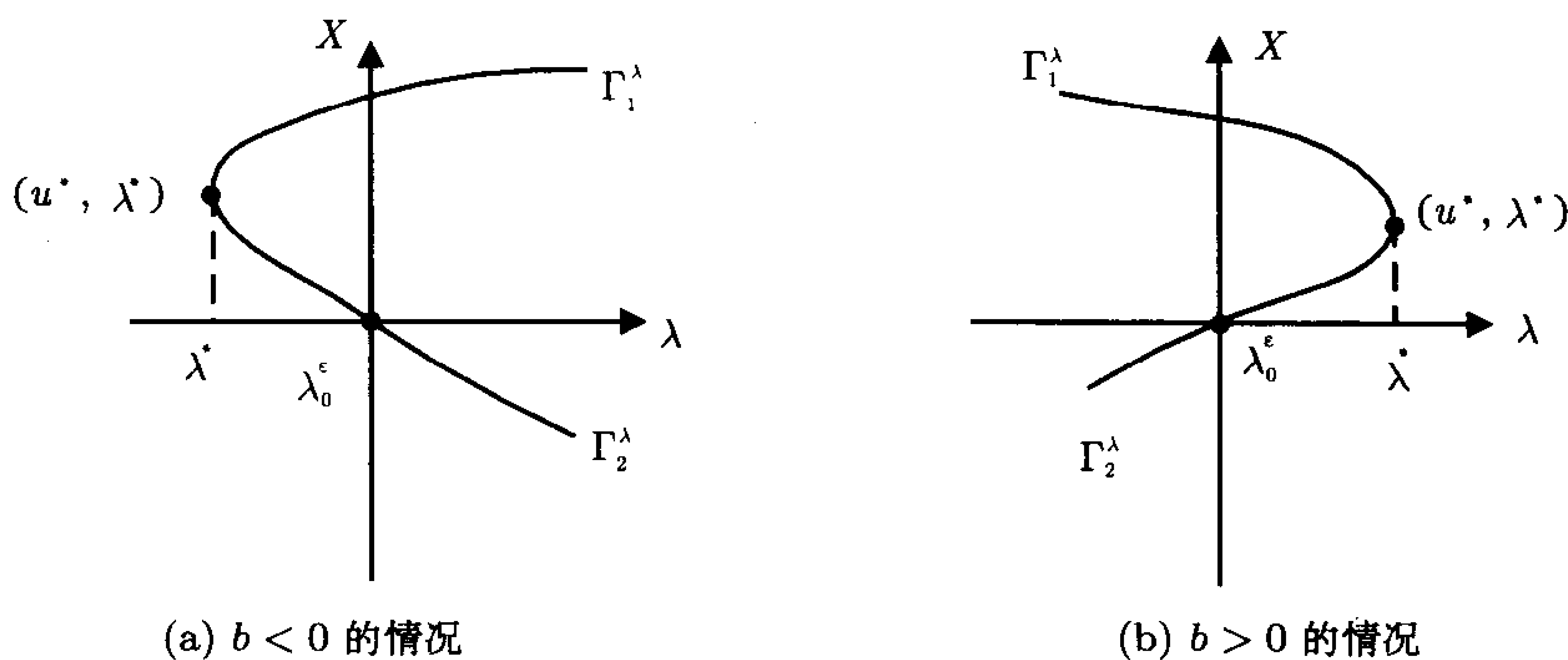


图 6.15

定理 6.26 令 (6.4.1) 和 (6.6.12) 成立, 并且 $b_1>0$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2) 时, 方程 (6.6.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁或为跳跃型的, 或为混合型的. 若是跳跃型则定理 6.9 结论 (1) 和 (3) 成立, 若为混合型则有下面结论:

(1) 方程 (6.6.1) 在 $\lambda_0^\varepsilon<\lambda$ 一侧具有一个鞍结分歧点 (u^*,λ^*), 并且在 $\lambda<\lambda^*$ 一边严格地分歧出两个奇点分支 $\Gamma_i^\lambda=\{(u_i^\lambda,\lambda)|\lambda_0^\varepsilon-\delta<\lambda<\lambda^*\}$, 如图 6.15(b) 所

示，使得

$$\|u_1^\lambda\|_X \geqslant r > 0, \quad \forall (u_1^\lambda, \lambda) \in \Gamma_1^\lambda, \quad \lambda_0^\varepsilon - \delta < \lambda < \lambda^*,$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0^\varepsilon} \|u_2^\lambda\|_X = 0, \quad 对 (u_2^\lambda, \lambda) \in \Gamma_2^\lambda.$$

(2) 存在 $u=0$ 一个邻域 $U \subset X$, 使对每个 $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda^*, \lambda \neq \lambda_0^\varepsilon$, U 仅包含两个 (6.6.1) 的奇点 u_1^λ, u_2^λ.

(3) 对每个 $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda^*, U$ 分解为三个开集 $\bar{U} = \bar{U}_0^\lambda + \bar{U}_1^\lambda + \bar{U}_2^\lambda, U_i \cap U_j = \varnothing (i \neq j)$, 使当 $\lambda_0^\varepsilon - \delta < \lambda < \lambda_0^\varepsilon$ 时, $u = 0 \in U_0^\lambda$ 是吸引 U_0^λ 的吸引子, $u_i^\lambda \in \partial U_i^\lambda \cap \partial U_0^\lambda (i = 1, 2)$ 是 Morse 指数 1 的鞍点; 而当 $\lambda_0^\varepsilon < \lambda < \lambda^*$ 时, $u_2^\lambda \in U_2^\lambda$ 是一个吸引 U_2^λ 的吸引子, $u_1^\lambda \in \partial U_1^\lambda \cap \partial U_2^\lambda, 0 \in \partial U_0^\lambda \cap \partial U_2^\lambda$ 是 Morse 指数 1 的鞍点, 并且 U_1^λ 和 U_0^λ 是 (6.6.1) 的两个连通跳跃区域.

(4) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 附近 u_1^λ 和 u_2^λ 可表达为 (6.6.13) 的形式.

注 6.10 定理 6.25 和 6.26 精确地给出了鞍结点分歧与跃迁之间的关系. 这种关系有助于对跃迁整体结构的理解.

定理 6.25 和定理 6.26 的证明 只需对定理 6.25 进行证明即可, 因为定理 2.6 的证明与该证明思路是一样的. 由 (6.4.1) 和 (6.6.12), 方程 (6.6.1) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 的中心流形约化方程可写为如下形式

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1^\varepsilon(\lambda)x + b_\lambda^\varepsilon x^3 + g(x, \varepsilon) + o(|x|^3), \tag{6.6.14}$$

其中 $x \in R^1, \beta_1^\varepsilon(\lambda)$ 如 (6.6.3) 给出 (其中 $m_1 = 1$), $b_\lambda^\varepsilon \to b$ 当 $\lambda \to \lambda_0$ 及 $\varepsilon \to 0$, 以及

$$g(x, \varepsilon) = \langle T_\lambda^\varepsilon(xe_\varepsilon(\lambda) + h_\varepsilon(x, \lambda)), e_\varepsilon^*(\lambda) \rangle,$$

这里 $e_\varepsilon(\lambda)$ 和 $e_\varepsilon^*(\lambda)$ 分别为 $L_\lambda + S_\lambda^\varepsilon$ 和 $L_\lambda^* + S_\lambda^{\varepsilon *}$ 对应于 $\beta_1^\varepsilon(\lambda)$ 的特征向量.

由于 $G_\lambda(u)$ 和 $T_\lambda^\varepsilon(u)$ 关于 u 是 C^3 的, 再由 (6.6.2)$g(x, \varepsilon)$ 有如下 Taylor 展开

$$\begin{cases} g(x, \varepsilon) = a_1(\varepsilon)x^2 + a_2(\varepsilon)x^3 + o(|x|^3), \\ a_i(\varepsilon) \to 0 \quad 当 \varepsilon \to 0, \quad i = 1, 2. \end{cases} \tag{6.6.15}$$

注意到 $b_\lambda^\varepsilon + a_2(\varepsilon) \to b_1$, 当 $\varepsilon \to 0, \lambda \to \lambda_0$, 因而当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, 如果 $a_1(\varepsilon) \equiv 0$, 则方程 (6.6.14) 和 (6.6.15) 与定理 6.9 中 $\alpha < 0$ 的情况是一样的. 此时 (6.6.1) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁是连续型的, 定理 6.9 的结论 (2) 和 (3) 成立.

当 $a_1(\varepsilon) \neq 0$ 时, 方程 (6.6.14) 和 (6.6.15) 满足定理 6.10 的条件. 因而根据定理 6.10, 只需证明下面方程

$$\beta_1^\varepsilon(\lambda)x + b_\lambda^\varepsilon x^3 + a_1(\varepsilon)x^2 + a_2(\varepsilon)x^3 + o(|x|^3) = 0 \tag{6.6.16}$$

在 $\lambda=\lambda_0^\varepsilon(\lambda\neq\lambda_0^\varepsilon)$ 附近有严格两个解 $x_1(\lambda)$ 和 $x_2(\lambda)$, 并且满足下面性质

$$\begin{cases} x_2(\lambda)\to 0, & \text{当}\lambda\to\lambda_0^\varepsilon, \\ x_1(\lambda)\neq 0, & \forall\lambda_0^\varepsilon-\delta<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta, \end{cases} \tag{6.6.17}$$

并且存在一个值 $\lambda^*<\lambda_0^\varepsilon$, 使当 $\lambda=\lambda^*$ 时，方程 (6.6.16) 在 $x=0$ 附近只有一个解 x^*, 使得

$$x_i(\lambda)\to x^* \quad \text{当}\lambda\to\lambda^*+0, \quad i=1,2, \tag{6.6.18}$$

而当 $\lambda<\lambda^*$ 时 (6.6.16) 无实数解.

记 $b_\lambda=b_\lambda^\varepsilon+a_2(\varepsilon)$, 则方程 (6.6.15) 等价于下面方程

$$b_\lambda x^2+a_1(\varepsilon)x+\beta_1^\varepsilon(\lambda)+o(|x|^2)=0. \tag{6.6.19}$$

容易看出方程 (6.6.19) 在 $x=0$ 附近只有两个解

$$x_{1,2}=\frac{-a_1(\varepsilon)\mp\sqrt{a_1^2(\varepsilon)-4b_\lambda\beta_1^\varepsilon(\lambda)}}{2b_\lambda}+o(|x_{1,2}|). \tag{6.6.20}$$

由假设 $b<0$, 故 $b_\lambda<0$, 而

$$\beta^\varepsilon(\lambda)\begin{cases} <0, & \lambda<\lambda_0^\varepsilon, \\ =0, & \lambda=\lambda_0^\varepsilon, \\ >0, & \lambda>\lambda_0^\varepsilon. \end{cases}$$

显然由 (6.6.20) 给出的解 $x_1(\lambda)$ 和 $x_2(\lambda)$ 满足 (6.6.17). 并且对于满足下面方程的 $\lambda^*<\lambda_0^\varepsilon$,

$$a_1^2(\varepsilon)=4b_{\lambda^*}\beta_1^\varepsilon(\lambda^*),$$

(6.6.18) 成立，并且当 $\lambda<\lambda^*$ 时 ,$a_1^2<4b_\lambda\beta_1^\varepsilon(\lambda)$, 因而 (6.6.19) 无实数解. 定理证明完毕.

下面考虑一个特殊情况，这种情况具有典型意义，它是直接从流体动力学方程抽象而来.

对摄动系统 (6.6.1), 假设

$$\begin{cases} L_\lambda: X_1\to X\text{是对称的}, X_1, X\text{为 Hilbert 空间}, \\ G: X_1\to X\text{是双线性算子，并且} \\ \langle G(u,v),v\rangle_X=0, \quad \forall u,v\in H_\sigma, \quad 0\leqslant\sigma<1. \end{cases} \tag{6.6.21}$$

定理 6.27　令 (6.4.1) 和 (6.6.21) 成立. 那么存在 $\varepsilon>0$, 使当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2) 时，定理 6.25 的结论成立.

证明 只需证明在 (6.6.12) 中的展开系数 $b<0$ 即可. 由于 L_λ 是对称的, 故第一特征向量 $e=e^*$. 记中心流形函数为 $y=h(x,\lambda_0)$, 则由 (6.6.21) 可得

$$\begin{aligned}\langle G(xe+y),e\rangle &= \langle G(xe+y,xe+y),e\rangle\\ &= x\langle G(e,y),e\rangle+\langle G(y),e\rangle\\ &= -x\langle G(e),y\rangle+\langle G(y),e\rangle.\end{aligned} \tag{6.6.22}$$

令 $\{e_k|k=1,2,\cdots\}$ 为 L_λ 的所有特征向量, $e_1=e$, 它是 X 的一个规范正交基. 因而 y 可展开为

$$y=\sum_{j=2}^{\infty}y_je_j.$$

由定理 6.1, 中心流形函数 $y=y(x)$ 可表达为

$$\mathcal{L}_\lambda y=-P_2G(xe)+o(|x|^2)+O(|\beta_1||x|^2), \tag{6.6.23}$$

其中 $\mathcal{L}_\lambda e_j=\beta_j(\lambda)e_j, P_2:X\to E_2=\mathrm{span}\{e_2,e_3,\cdots\}$ 为规范投影. 因而 (6.6.23) 可写为

$$y_j=-\beta_j^{-1}(\lambda)\alpha_jx^2+o(|x|^2,|x||\beta_1|), \tag{6.6.24}$$

其中

$$\alpha_j=\langle G(e),e_j\rangle_X,\quad j=2,3,\cdots.$$

将 (6.6.24) 代入 (6.6.22) 可得

$$\begin{aligned}\langle G(xe+y),e\rangle_X &= -\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_jxy_j+O(\|y\|^2)\\ &= b_\lambda x^3+o(|x|^3,|x|^2|\beta_1|),\end{aligned}$$

其中 $b_\lambda=\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j^2\beta_j(\lambda)$.

由条件 (6.4.1), $\beta_1(\lambda_0)=0,\beta_j(\lambda_0)<0,\forall j\geqslant 2$. 因而 $b=b_{\lambda_0}<0$. 这样, 由定理 6.26 可得到该定理. 证毕.

§6.6.3 复单特征值情况

这里将讨论在条件 (6.4.5) 假设下, 摄动系统 (6.6.1) 的整体跃迁性质. 令 $e_1(\lambda),e_2(\lambda)$ 和 $e_1^*(\lambda),e_2^*(\lambda)$ 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_1(\lambda)=\overline{\beta_2(\lambda)}$ 的特征向量. 记 $h(x,\lambda)$ 为 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近的中心流形函数.

首先考虑跃迁的稳定性. 为此假设下面展开

$$\langle G(x+h(x,\lambda),\lambda),e_i^*(\lambda)\rangle=\sum_{2\leqslant p+q\leqslant 3}a_{pq}^ix_1^px_2^q+o(|x|^2), \tag{6.6.25}$$

这里 $i=1,2, x=x_1e_1+x_2e_2$.

在 (6.4.11) 中给出 $k\geqslant 3$ 的跳迁判别值 b. 对于 (6.6.25) 的 $k=2$ 情况，给出判别值如下

$$\begin{aligned} b=&\frac{3\pi}{4}(a^1_{30}+a^2_{03})+\frac{\pi}{4}(a^1_{12}+a^2_{21}) \\ &+\frac{\pi}{4}(a^1_{11}a^1_{20}+a^1_{11}a^1_{02}-a^2_{11}a^2_{20}-a^2_{11}a^2_{02})+\frac{\pi}{2}(a^1_{02}a^2_{02}-a^1_{20}a^2_{20}). \end{aligned} \tag{6.6.26}$$

由 (6.6.26) 给出的判别值 b 实质上就是在动态分歧结构稳定性定理 (定理 5.14) 中的分歧数. 因而 b 给出下面摄动系统跃迁稳定性判别定理.

定理 6.28 在 (6.4.5) 和 (6.6.25) 条件下，如果由 (6.6.26) 给出的判别值 $b\neq 0$, 则摄动系统 (6.6.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda^\varepsilon_0)$ 的跃迁结构与原方程 (6.0.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 的跳迁结构是一样的. 更具体地说，当 $b<0$ 时 (6.6.1) 在 $(0,\lambda^\varepsilon_0)$ 是连续型跃迁，并分歧出唯一的一个周期轨道吸引子；当 $b>0$ 时，跃迁为跳跃型的，并在 $\lambda<\lambda^\varepsilon_0$ 分歧出唯一的周期轨道排斥子.

证明 在条件 (6.4.5) 假设下，方程 (6.0.1) 的中心流形上规范约化方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\alpha(\lambda)x_1-\rho(\lambda)x_2+\langle G(x+h,\lambda),e^*_1(\lambda)\rangle, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\rho(\lambda)x_1+\alpha(\lambda)x_2+\langle G(x+h,\lambda),e^*_2(\lambda)\rangle, \end{cases} \tag{6.6.27}$$

其中 $\alpha(\lambda)+i\rho(\lambda)=\beta_1(\lambda),\rho(\lambda_0)>0,\alpha(\lambda)$ 满足 (6.4.7).

根据 (6.6.25), 由 (5.3.17) 给出的判别值 b 的主部为

$$b(\lambda)=\int_0^{2\pi}[u_1(\theta)v_1(\theta)+u_2(\theta)]d\theta, \tag{6.6.28}$$

其中

$$\begin{aligned} u_1(\theta)&=\cos\theta\sum_{p+q=2}a^1_{pq}\cos^p\theta\sin^q\theta+\sin\theta\sum_{p+q=2}a^2_{pq}\cos^p\theta\sin^q\theta, \\ v_1(\theta)&=\sin\theta\sum_{p+q=2}a^1_{pq}\cos^p\theta\sin^q\theta-\cos\theta\sum_{p+q=2}a^2_{pq}\cos^p\theta\sin^q\theta, \\ u_2(\theta)&=\cos\theta\sum_{p+q=3}a^1_{pr}\cos^p\theta\sin^q\theta+\sin\theta\sum_{p+q=3}a^2_{pq}\cos^p\theta\sin^q\theta. \end{aligned}$$

经过计算可得到，由 (6.6.28) 定义的 $b(\lambda)$ 是等于 (6.6.26) 给出的值.

这样，由定理 5.4 可推出，摄动系统 (6.6.1) 与原方程 (6.0.1) 在中心流形上具有相同的分歧结构，因而有相同的跃迁结构. 再应用与定理 6.12 相同的证明方法可得到定理的其余结论. 定理证毕.

下面再考虑摄动系统不稳定的跃迁. 正如定理 6.25 和 6.26 那样，当 (6.6.26) 给出的判别值为零时，方程 (6.6.1) 的跃迁结构就会与原方程产生差别，此时也可能发生周期解的鞍结点分歧.

为此假设 $G(x+h,\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0$ 附近有如下展开

$$\begin{aligned}&\langle G(x+h(x,\lambda),\lambda),e_i^*(\lambda)\rangle\\=&\sum_{3\leqslant p+q\leqslant 5}a_{pq}^i x_1^p x_2^q+o(|x|^5),\quad i=1,2.\end{aligned}\tag{6.6.29}$$

首先给出周期轨道鞍结点分歧的定义.

定义 6.3 令 $\Gamma^*\subset X$ 是 (6.0.1) 在 $\lambda=\lambda^*$ 的一个周期轨道. 称 (6.0.1) 在 (Γ^*,λ^*) 有一个周期轨道的鞍结点分歧, 如果在 $\lambda>\lambda^*$(或 $\lambda<\lambda^*$) 有两个以上周期轨道分支 $\Gamma_i^\lambda(i=1,\cdots,N,N\geqslant 2)$ 从 Γ^* 分歧出来, 即

$$\sup_{u\in\Gamma_i^\lambda}\text{dist}(u,\Gamma^*)\to 0 \text{ 当 } \lambda\to\lambda^*,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant N,$$

而在 $\lambda<\lambda^*$(或 $\lambda^*<\lambda$) 一侧在 Γ^* 附近没有周期轨道.

对于 (6.6.29), 再引入下面两个值

$$b_1(\lambda)=\frac{3\pi}{4}(a_{30}^1+a_{03}^2)+\frac{\pi}{4}(a_{12}^1+a_{21}^2),\tag{6.6.30}$$

$$b_2(\lambda)=\frac{5\pi}{8}(a_{50}^1+a_{05}^2)+\frac{\pi}{8}(a_{32}^1+a_{14}^1+a_{23}^2+a_{41}^2).\tag{6.6.31}$$

然后, 有下面定理.

定理 6.29 在 (6.4.5) 和 (6.6.29) 条件下, 如果由 (6.6.30) 给出的判别值 $b_1(\lambda_0)=0$, 而 (6.6.31) 的数 $b_2(\lambda_0)<0$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2) 时, 摄动系统 (6.6.1) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁若为连续型, 则从 $(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 分歧出唯一的一个周期解吸引子, 若为跳跃型则下面结论成立:

(1) 方程 (6.6.1) 在 $\lambda<\lambda_0^\varepsilon$ 一侧存在一个周期轨道的鞍结分歧点 $(\Gamma^*,\lambda^*)\subset X\times(-\infty,\lambda_0^\varepsilon)$, 并且在 $\lambda^*<\lambda$ 一边严格地分歧出两个周期轨道分支 $\Gamma_1^\lambda(\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta$, 对某个 $\delta>0)$ 和 $\Gamma_2^\lambda(\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon)$, 如图 6.16(a), 使得

$$\text{dist}(\Gamma_1^\lambda,0)\geqslant r>0,\quad \forall\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta,$$

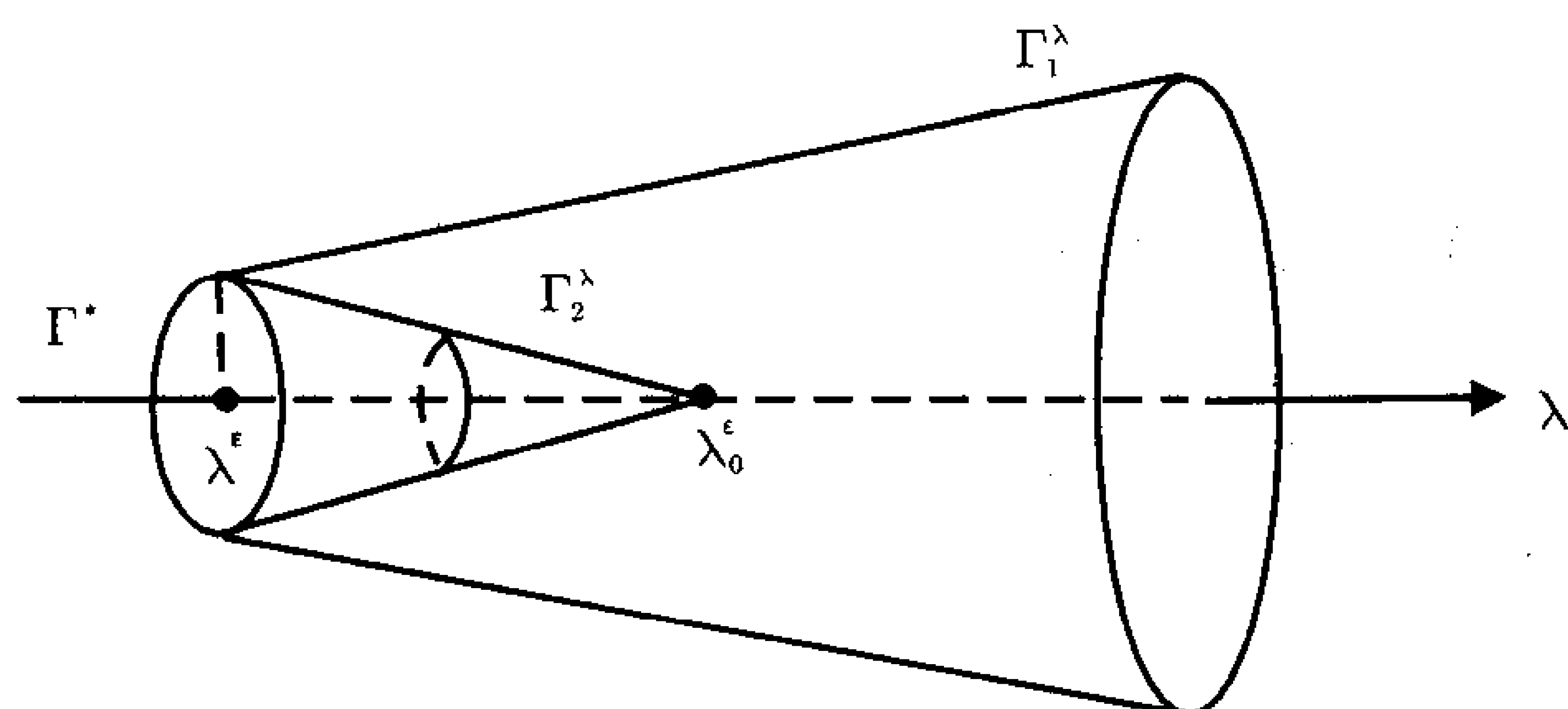
$$\Gamma_2^\lambda\to\{0\},\quad \text{当}\lambda\to\lambda_0^\varepsilon-0.$$

(2) 存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset X$, 使当 $\lambda^*<\lambda<\lambda_0^\varepsilon$ 时, U 分解为两个开集 $U_1^\lambda,U_2^\lambda,\bar U=\bar U_1^\lambda+\bar U_2^\lambda,U_1^\lambda\cap U_2^\lambda=\varnothing$, 使得 $\Gamma_1^\lambda\subset U_1^\lambda,O\in U_2^\lambda,\Gamma_2^\lambda\in\partial U_1^\lambda\cap\partial U_2^\lambda$, 并且 Γ_1^λ 和 $u=0$ 都是吸引子分别吸引 U_1^λ 和 U_2^λ.

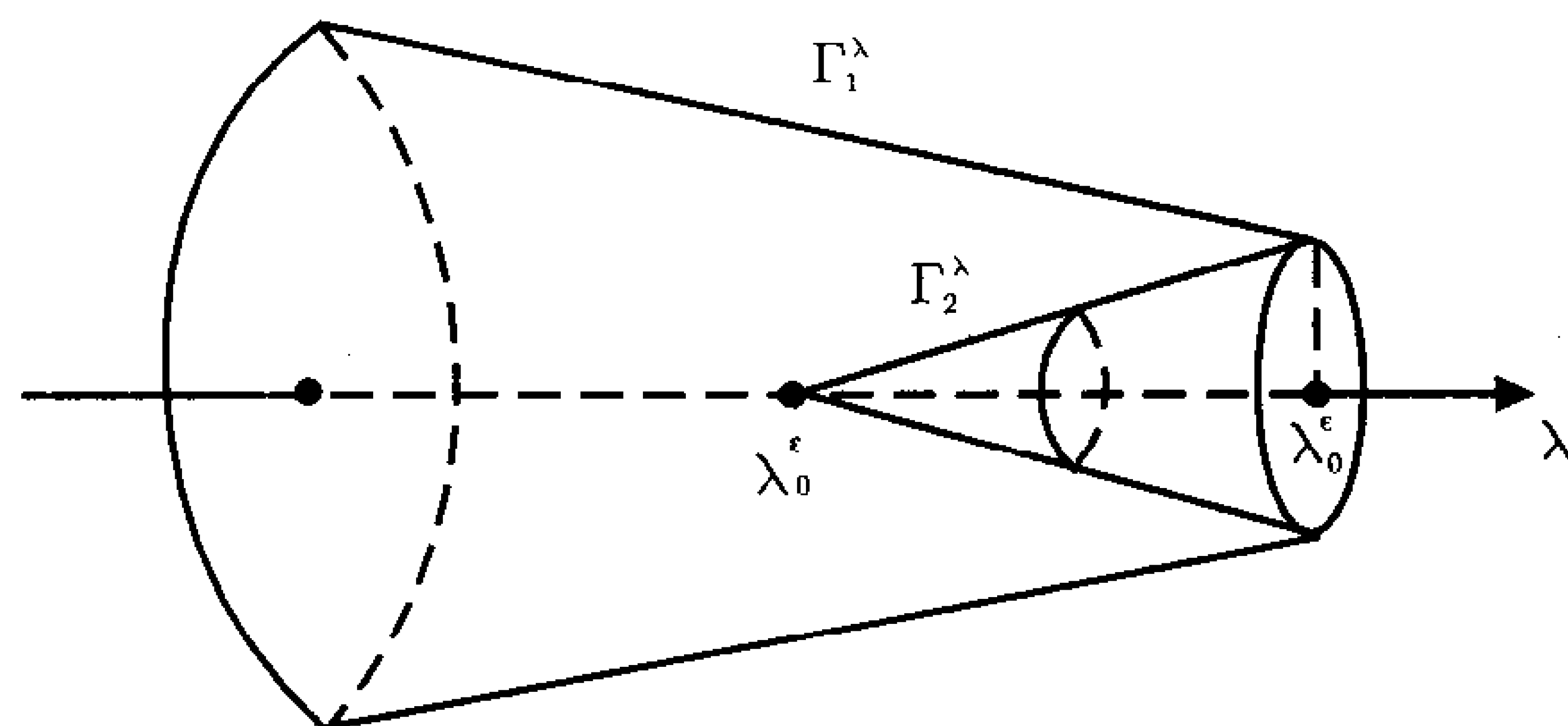
(3) 当 $\lambda_0^\varepsilon\leqslant\lambda<\lambda_0^\varepsilon+\delta$ 时, Γ_1^λ 是吸引 U/Σ 的一个吸引子, 其中 Σ 为 $u=0$ 的稳定流形, 有余维 2.

定理 6.30 在 (6.4.5) 和 (6.6.29) 条件下, 如果 (6.6.30) 的判别值 $b_1(\lambda_0)=0$, 而 (6.6.31) 的值 $b_2(\lambda_0)>0$, 则存在 $\varepsilon>0$, 当 S_λ^ε 和 T_λ^ε 满足 (6.6.2) 时, 方程

(6.6.1) 在 $(0,\lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁若为跳跃型，则在 $\lambda<\lambda_0^\varepsilon$ 分歧出唯一的一个周期轨道排斥子，若为连续型的，则下面结论成立.



(a) $b_2<0$ 的情况



(b) $b_2>0$ 的情况

图 6.16

(1) 方程 (6.6.1) 在 $\lambda_0^\varepsilon<\lambda$ 一侧具有一个周期轨道的鞍结分歧点 (Γ^*,λ^*), 并在 $\lambda<\lambda^*$ 一边严格地分歧出两个周期轨道分支 $\Gamma_1^\lambda(\lambda_0^\varepsilon-\delta<\lambda<\lambda^*$, 对某个 $\delta>0)$ 及 $\Gamma_2^\lambda(\lambda_0^\varepsilon<\lambda<\lambda^*)$, 如图 6.16(b) 所示，使得

$$\operatorname{dist}(\Gamma_1^\lambda,0)\geqslant r>0,\quad \forall\lambda_0^\varepsilon-\delta<\lambda-\lambda^*,$$

$$\Gamma_2^\lambda\to\{0\},\quad 当\lambda\to\lambda_0^\varepsilon+0.$$

(2) 当 $\lambda_0^\varepsilon<\lambda<\lambda^*$ 时，Γ_2^λ 是一个吸引子, 它吸引 $u=0$ 的一个邻域 $U_\lambda/\Sigma,\Sigma$ 为 $u=0$ 的稳定流形具有余维 2, 而 $\Gamma_1^\lambda\subset\partial U_\lambda$, 并且 ∂U_λ 为 Γ_1^λ 的稳定流形.

(3) 当 $\lambda_0^\varepsilon-\delta<\lambda<\lambda^*$ 时，$u=0$ 是一个吸引子，吸引它的一个邻域 U_λ, 而 $\Gamma_1^\lambda\subset\partial U_\lambda$, 并且 ∂U_λ 为 Γ_1^λ 的稳定流形.

注 6.11　如果在展开式 (6.6.29) 中考虑有指数为二次项, 即含有 $x_1^px_2^q(p+q=2)$ 的项时，则判别值 $b_2(\lambda)$ 就需要包括所有系数 $a_{pq}(2\leqslant p+q\leqslant5)$, 形式变得非常复杂. 这就是为什么只考虑 $p+q\geqslant3$ 情况的原因.

定理 6.29~6.30 的证明 同样地，只对定理 6.29 进行证明就行了，定理 6.30 可用同样方法得到.

方程 (6.6.1) 的中心流形上约化可写为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \alpha_\varepsilon(\lambda)x_1 - \rho_\varepsilon x_2 + \displaystyle\sum_{2\leqslant p+q\leqslant 5} a_{pq}^{\varepsilon 1}x_1^p x_2^q + o(|x|^5), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \rho_\varepsilon(\lambda)x_2 + \alpha_\varepsilon(\lambda)x_2 \displaystyle\sum_{2\leqslant p+q\leqslant 5} a_{pq}^{\varepsilon 2}x_1^p x_2^q + o(|x|^5), \end{cases} \tag{6.6.32}$$

其中 $\rho_\varepsilon > 0, \alpha_\varepsilon(\lambda)$ 满足

$$\alpha_\varepsilon(\lambda)\begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0^\varepsilon, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0^\varepsilon, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{6.6.33}$$

以及

$$\begin{cases} a_{pq}^{\varepsilon i} \to 0, & \text{当}\varepsilon \to 0, i = 1,2, \quad p+q = 2, \\ a_{pq}^{\varepsilon i} \to a_{pq}^i, & \text{当}\varepsilon \to 0, i = 1,2, \quad 3 \leqslant p+q \leqslant 5. \end{cases} \tag{6.6.34}$$

采用极坐标 $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$, 则 (6.6.32) 变为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r\cos\theta\dfrac{dx_1}{dt} + r\sin\theta\dfrac{dx_2}{dt}}{\cos\theta\dfrac{dx_2}{dt} - \sin\theta\dfrac{dx_1}{dt}} \\ &= \frac{\alpha_\varepsilon(\lambda)r + \sum_{k=2}^5 r^k u_k^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) + o(r^5)}{\rho_\varepsilon - \sum_{k=2}^5 r^{k-1}v_k^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) + o(r^4)}, \end{aligned} \tag{6.6.35}$$

其中

$$\begin{cases} u_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{p+q=k} [a_{pq}^{\varepsilon 1}\cos^{p+1}\theta\sin^q\theta + a_{pq}^{\varepsilon 2}\cos^p\theta\sin^{q+1}\theta], \\ v_k^\varepsilon = \displaystyle\sum_{p+q=k} [a_{pq}^{\varepsilon 1}\cos^p\theta\sin^{q+1}\theta - a_{pq}^{\varepsilon 2}\cos^{p+1}\theta\sin^q\theta]. \end{cases}$$

方程 (6.6.35) 可写为如下形式

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\alpha_\varepsilon(\lambda)}{r} + \sum_{k=2}^5 r^{k-2}f_k^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) + o(r^3), \tag{6.6.36}$$

其中

$$f_2^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) = u_2^\varepsilon + \alpha_\varepsilon v_2^\varepsilon,$$

$$f_3^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) = u_3^\varepsilon + u_2 v_2^\varepsilon + \alpha_\varepsilon v_3^\varepsilon,$$
$$f_4^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) = u_4^\varepsilon + u_3^\varepsilon v_2^\varepsilon + u_2^\varepsilon v_3^\varepsilon + \alpha_\varepsilon v_4^\varepsilon,$$
$$f_5^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta) = u_5^\varepsilon + u_4^\varepsilon v_2^\varepsilon + u_3^\varepsilon v_3^\varepsilon + u_2^\varepsilon v_4^\varepsilon + \alpha_\varepsilon v_5^\varepsilon.$$
$$r(0,\lambda,a) = a, \quad a > 0. \tag{6.6.37}$$

再令 $r(\theta,\lambda,a)$ 在 $a=0$ 有如下 Taylor 展开

$$r(\theta,\lambda,a) = a + r_2(\theta,\lambda)a^2 + r_3(\theta,\lambda)a^3 + \alpha_\varepsilon(\lambda)h + o(a^3). \tag{6.6.38}$$

将 (6.6.38) 代入 (6.6.36) 得到

$$\frac{dr}{d\theta} = f_2^\varepsilon(a + r_2 a^2)^2 + f_3^\varepsilon a^3 + \alpha_\varepsilon H(\theta,\lambda,a) + o(a^3).$$

对上式两边关于 θ 积分，由 (6.6.37) 得

$$\begin{aligned} r(\theta,\lambda,a) = {} & a + a^2\int_0^\theta f_2^\varepsilon d\theta + a^3\int_0^\theta (f_3^\varepsilon + 2r_2 f_2^\varepsilon) \\ & + \alpha_\varepsilon(\lambda)\int_0^\theta H(\theta,\lambda,a)d\theta + o(a^3). \end{aligned} \tag{6.6.39}$$

从 (6.6.38) 和 (6.6.39) 对比系数可得

$$\begin{cases} r_2(\theta,\lambda) = \displaystyle\int_0^\theta f_2^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta),d\theta, \\ r_3(\theta,\lambda) = \displaystyle\int_0^\theta [f_3^\varepsilon + 2r_2(\theta,\lambda)f_2^\varepsilon]d\theta. \end{cases} \tag{6.6.40}$$

将 (6.6.40) 代到 (6.6.36) 右端，再从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 积分，整理后可得

$$\begin{aligned} \frac{r(2\pi,a)-r(0,a)}{r(2\pi,a)} = {} & \sigma(a,\lambda)\alpha_\varepsilon(\lambda) + a\int_0^{2\pi} f_2^\varepsilon d\theta + a^2\int_0^{2\pi} f_3^\varepsilon d\theta \\ & + a^3\int_0^{2\pi}\left[f_4^\varepsilon + f_3^\varepsilon\left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon\right)\right]d\theta \\ & + a^4\int_0^{2\pi}\left[f_5^\varepsilon + 2f_4^\varepsilon\left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon\right) + f_3^\varepsilon\left(\int_0^\theta f_3^\varepsilon\right)\right. \\ & \left. + 2f_3^\varepsilon\left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon\left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon\right)\right)\right]d\theta \\ & + \alpha_\varepsilon(\lambda)g(\lambda,a) + o(a^4), \end{aligned} \tag{6.6.41}$$

其中 $g(\lambda,0)=0, \sigma(a,\lambda)=2\pi+o(a)$. 由计算可得

$$\int_0^{2\pi} f_2^\varepsilon(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f_4^\varepsilon(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f_3^\varepsilon \left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon d\theta \right) d\theta = \frac{2}{3} a_{02}^{\varepsilon 2} \int_0^{2\pi} f_3^\varepsilon + O(\alpha_\varepsilon).$$

因而 (6.6.41) 可简化为如下形式

$$\frac{r(2\pi, a) - r(0, a)}{r(2\pi, a)} = \alpha(\lambda, a) + \delta(\varepsilon)a^2 + +\delta_1(\varepsilon)a^3 + b_\varepsilon(\lambda)a^4 + o(a^4), \tag{6.6.42}$$

其中 $\alpha(\lambda, a)$ 满足

$$\alpha(\lambda, a) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0^\varepsilon, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0^\varepsilon, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0^\varepsilon. \end{cases} \tag{6.6.43}$$

以及

$$\delta(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} f_3^\varepsilon d\theta,$$

$$\delta_1(\varepsilon) = \frac{2}{3} a_{02}^{\varepsilon 2} \delta(\varepsilon),$$

$$b_\varepsilon(\lambda) = \int_0^{2\pi} \left[f_5^\varepsilon + 2f_4^\varepsilon \left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon \right) + f_3^\varepsilon \left(\int_0^\theta f_3^\varepsilon \right) + 2f_3^\varepsilon \left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon \left(\int_0^\theta f_2^\varepsilon \right) \right) \right] d\theta.$$

由 (6.6.34) 及假设 $b_1(\lambda_0) = 0$ 可以推出

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon) \to 0, & \text{当}\lambda \to \lambda_0^\varepsilon,\ \varepsilon \to 0, \\ b_\varepsilon(\lambda) \to b_2(\lambda), & \text{当}\varepsilon \to 0. \end{cases} \tag{6.6.44}$$

因而对任何 $\varepsilon > 0$ 充分小，在 $\lambda = \lambda_0^\varepsilon$ 附近有

$$b_\varepsilon(\lambda) < -C, \quad C > 0\text{为某个常数}. \tag{6.6.45}$$

(6.6.42) 的每个正解 $a_0 > 0$ 对应着 (6.6.32) 的一个周期轨道，并且若

$$r(2\pi, a) - r(0, a) \begin{cases} < 0, & \text{对}a_0 < a, \\ > 0, & \text{对}a_0 > a, \end{cases}$$

则该周期轨道为吸引子，若

$$r(2\pi, a) - r(0, a) \begin{cases} > 0, & \text{若}a_0 < a, \\ < 0, & \text{若}a_0 > a, \end{cases}$$

则周期轨道为排斥子. 因而由 (6.6.43)~(6.6.45) 从 (6.6.42) 可证得, 当 $\delta(\varepsilon) \leqslant 0$ 时, 方程 (6.6.32) 在 $(0, \lambda_0^\varepsilon)$ 的跃迁为连续型的, 当 $\delta(\varepsilon) > 0$ 时跃迁为跳跃型的, 并且定理 6.29 的结论 (1)~(3) 成立. 定理证毕.

注 6.12 从公式 (6.6.41) 可以看到, 如果考虑如下情况

$$\langle G(x+h(x,\lambda),\lambda), e_i^*(\lambda)\rangle = \sum_{2\leqslant p+q\leqslant 5} a_{pq}^i x_1^p x_2^q + o(|x|^5),$$

然后取 $b_1(\lambda)$ 和 $b_2(\lambda)$ 如下

$$b_1(\lambda) = \int_0^{2\pi} f_3(\theta)d\theta,$$

$$b_2(\lambda) = \int_0^{2\pi}\left[f_5(\theta) + 2f_4(\theta)\left(\int_0^\theta f_2(\theta)d\theta\right)\right.$$
$$\left. +2f_3(\theta)\left(\int_0^\theta f_2(\theta)\left(\int_0^\theta f_2(\theta)d\theta\right)d\theta\right)\right]d\theta,$$

其中

$$f_k(\theta) = u_k(\theta) + \sum_{i=1}^{k-2} v_{i+1}u_{k-i}, \quad 2 \leqslant k \leqslant 5,$$

$$u_k = \sum_{p+q=k} a_{pq}^1 \cos^{p+1}\theta \sin^q\theta + a_{pq}^2 \cos^p\theta\sin^{q+1}\theta,$$

$$v_k = \sum_{p+q=k} a_{pq}^1 \cos^p\theta\sin^{q+1}\theta - a_{pq}^2\cos^{p+1}\theta\sin^q\theta.$$

那么当 $b_1(\lambda_0) = 0, b_2(\lambda_0) < 0$ 和 $b_2(\lambda_0) > 0$ 时, 定理 6.29 和 6.30 成立.

§6.7 评 注

§6.1~6.2 这两节的内容归于文献 [52].

§6.3 这一节是作者首次建立的理论, 该理论是从非线性科学中各种临界现象与相变中抽象出的数学理论.

§6.4 定理 6.9 和 6.10 是文献 [52] 中定理 6.4 和 6.5 的变形观点. 定理 6.11 和 6.12 首次给出. 定理 6.13~6.15 是文献 [52] 中定理 6.7 和 6.8 的变形观点.

§6.5 这一节是文献 [52] 中 6.3 节的变形观点.

§6.6 定理 6.23 取自文献 [52], 定理 6.24~6.30 是作者新证明的结果.

第七章　物理与化学中耗散系统相变的数学理论

§7.1　非线性科学动力学原理

为了提高本书的可读范围，在这一节专门用通俗的语言对物理、化学以及数学之间相关的概念及理论作一综合性的论述，以达到各学科之间的沟通与理解.

§7.1.1　耗散系统的非平衡相变

在物理与化学中，相变问题的研究是一个重要的课题. 与数学的概念不同，在物理与化学中，相的概念不是可以明确定义的. 在传统的意义上，它主要是指化学或热力学中一个系统的物质组合结构与表象形式. 然而更广义的，现在人们经常用相来表达物理与化学某个系统在一种状态下所表现出来的相，如流体动力学中流的形状与结构，超导体中超导电子的概率分布，以及化学反应中各类反应物质浓度与分布等. 对于不同的系统，其状态所表现出来的相具有完全不同的内涵.

在这里，我们采用的相的概念已超越具体的科学内涵，而统一表达可用数学模型控制的所有系统各类不同状态下解的形态. 因而，相在这里具有普遍的意义，它不仅适用于物理与化学，并且还适用于生物、生态、经济等所有非线性科学中的动力学系统.

所谓相变就是指当一个系统的参变量超过某个临界值后，该系统原来所处的稳定状态变为不稳定从而跃迁到一个新的稳定状态.

非线性耗散系统的非平衡相变理论是由 Prigogine 为首的比利时学派从化学反应动力学研究中提出的一种学说. 该学说的一个显著特点，就是强调在一个具有非线性耗散结构的动力学系统中，当与外界有能量和物质交换时，该系统的状态可以远离热力学平衡态而跃迁到一个新的具有有序结构的稳定状态中. 这种新的有序结构稳定状态与传统的平衡相变的稳定状态不同，它不具有某种能量的局部最小特征，并且需要能量维持.

需要指出的是，Prigogine 的非线性耗散结构自组织学说到目前为止都缺乏一个统一的数学框架作为其理论支撑，而这一点是该理论能否深入下去的关键. 这里提出的非线性耗散系统的跃迁理论是朝着这个方向的一种努力，期待着这一学说能在非线性科学动力学中得到进一步发展，并且在非平衡相变与混沌之间建立联系.

为了较全面地了解非线性耗散系统的非平衡相变理论，先从化学反应动力学的角度开始论述，然后在下一小节中再利用数学的跃迁理对非平衡相变在非线性科学动力学中的作用进行更广泛的解释.

首先，考察一个具体的化学反应例子，即氨的合成反应


$$N_2+3H_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2NH_3. \tag{7.1.1}$$

为了简单，用 X_1 记为氮分子 N_2, 用 X_2 记为氢分子，用 X_3 记为氨分子. k_1 为合成反应系数，k_2 为分解系数. 此时反应 (7.1.1) 式可表达为下面抽象形式


$$X_1+3X_2 \xrightarrow{k_1} 2X_3, \tag{7.1.2}$$


$$2X_3 \xrightarrow{k_2} X_1+3X_2. \tag{7.1.3}$$

令 u_i 代表 $X_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 的浓度 (摩尔密度). 由化学反应动力学中质量作用定律，组元 X_1 的浓度在合成反应 (7.1.2) 中变化率为

$$\frac{\delta_1 u_1}{\delta t}=-k_1u_1u_2^3, \tag{7.1.4}$$

在分解反应 (7.1.3) 中变化率为

$$\frac{\delta_2 u_1}{\delta t}=k_2u_3^2. \tag{7.1.5}$$

因而总变化率为

$$\frac{du_1}{dt}=\frac{\delta_1 u_1}{\delta t}+\frac{\delta_2 u_1}{\delta t}=-k_1u_1u_2^2+k_2u_3^2. \tag{7.1.6}$$

这是因为浓度变化率正比与反应速度. 而在合成反应 (7.1.2) 中，反应速度与组元 X_1 和三个组元 X_2 发生碰撞的概率成正比，该概率为 $u_1u_2^3$. 又因为每一次合成反应失去一个 X_1 分子，故 u_1 变化率为负值. 这就得到合成反应变化率 (7.1.5). 同理，在分解反应 (7.1.3) 中，两个 X_3 相撞产生分解的概率与 u_3^2 成正比，每次反应产生一个 X_1, 因而得到 (7.1.6) 式.

再次应用质量作用定律，对 u_2 和 u_3 的变化率可得

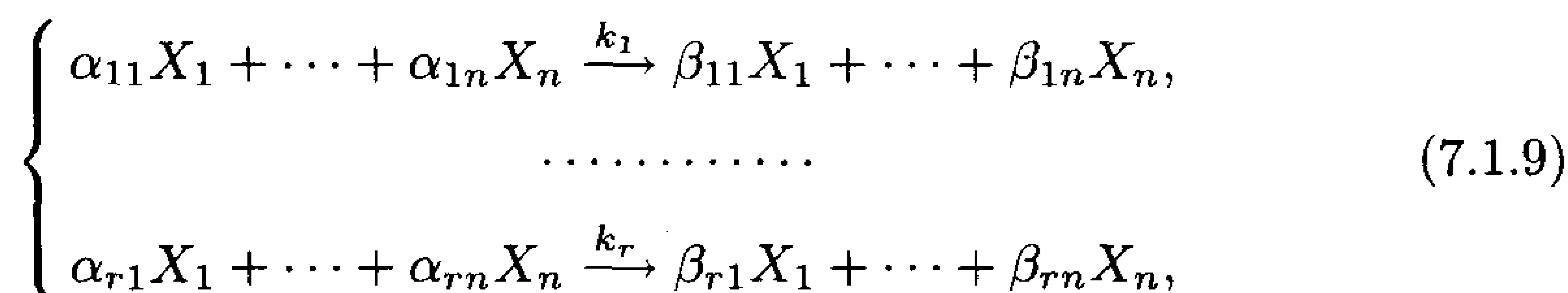
$$\frac{du_2}{dt}=-3k_1u_1u_2^3+3k_2u_3^2, \tag{7.1.7}$$

$$\frac{du_3}{dt}=2k_1u_1u_2^3-2k_2u_3^2. \tag{7.1.8}$$

方程 (7.1.6)~(7.1.8) 就构成合成氨反应每种分子浓度变化率方程组.

上面例子只是帮助理解化学反应动力学的基本原理. 有了这个基础，就可以介绍化学反应中相变理论. 令 $X_1,\cdots,X_n$ 代表 n 种不同化学物质，有 r 种化

学反应，其反应式为



$$\begin{cases} \alpha_{11}X_1+\cdots+\alpha_{1n}X_n \xrightarrow{k_1} \beta_{11}X_1+\cdots+\beta_{1n}X_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{r1}X_1+\cdots+\alpha_{rn}X_n \xrightarrow{k_r} \beta_{r1}X_1+\cdots+\beta_{rn}X_n, \end{cases} \tag{7.1.9}$$

其中 $\alpha_{ij},\beta_{ij}\geqslant 0$ 为实数，称为化学计量系数， k_i 为反应系数. 令 u_j 为组元 X_j 的摩尔密度 (单位体子分子数). 由质量作用定律，从反应式 (7.1.9) 可推出浓度变化率方程为

$$\frac{du_j}{dt}=\sum_{i=1}^{r}(\beta_{ij}-\alpha_{ij})k_i u_1^{\alpha_{i1}}\cdots u_n^{\alpha_{in}}, \quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{7.1.10}$$

另一方面，在 (7.1.9) 中对应于每一种反应，在化学中都引入一种能量来度量其反应能力，称为化学亲和势，它起到化学反应的动力作用，定义为

$$a_i=-\sum_{j=1}^{n}(\beta_{ij}-\alpha_{ij})\mu_j, \quad i=1,\cdots,n, \tag{7.1.11}$$

其中 μ_j 为组元 X_j 的化学势. 它是温度 T, 压力 p 和及浓度 u_i 的函数.

化学动力学理论表明, 当反应 (7.1.9) 处在平衡状态时, 即从宏观上看 (7.1.9) 的反应不再进行时，其亲和势为零

$$a_i(T,p,u)=0, \quad \forall i=1,\cdots,n, \tag{7.1.12}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_n)$. 这种平衡态称之为热力学平衡态. 换句话说，若方程 (7.1.10) 有一个局部 Lyapunov 渐近稳定的稳态解 $u_0=(u_1^0,\cdots,u_n^0), u_i^0\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$, 使得 (7.1.12) 成立，则 u_0 称为 (7.1.10) 的热力学平衡解. 显然一个热力学平衡解一定是与时间和空间位置无关的常值解.

在 20 世纪 60 年代之前，人们认为化学反应一般是处在一个热力学平衡态上. 然而著名的 Belousov-Zhabotinsky 化学反应告诉我们，不仅存在时间周期变化的稳定态, 并且还存在随空间变化的稳定态. 这种稳定的化学反应状态显然不是 (7.1.10) 的热力学平衡解. 这就是说，远离热力学平衡态 (有大的亲和势) 仍可能存在稳定的反应状态.

所谓非平衡相变就是指这种偏离热力学平衡态而产生出新的稳定状态. Prigogine 等人从 Belousov-Zhabotinsky 型化学反应研究中发现，这种远离平衡态的相变是具有非线性耗散结构的普遍现象. 一个具有耗散结构的反应系统在反应进行时具有某种能量损耗. 当外界给系统输入能量或物质流小于这种能量损耗时，系统将处在热力学平衡中，而一旦超过这种损耗，系统将从原来的平衡态中

跳到一个新的稳定的非热力学态上. 这就是非线性耗散系统非平衡理论的基本观点.

在第一章中, 已经简单介绍了什么是非线性耗散系统及其方程形式. 我们注意到, 对应于反应式 (7.1.9) 的动力学方程 (7.1.10) 是一个常微分方程. 这种模型主要控制的化学反应是在充分搅拌的条件下, 各种反应组元的浓度在空间中均匀分布. 当化学反应是在没有搅拌的情况下, 反应式 (7.1.9) 的模型还应该加上各组元浓度的扩散项. 因而其方程应该是如下形式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \mu_j \Delta u_j + \sum_{i=1}^{r} (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) k_i u_1^{\alpha_{i1}} \cdots u_n^{\alpha_{in}}, \tag{7.1.13}$$

其中 $\mu_j > 0$ 是组元 X_j 的扩散系统.

模型 (7.1.13) 就是化学反应 (7.1.9) 在非搅拌条件下的反应扩散方程, 这是一个典型的具有耗散结构的动力学系统. 当一个化学反应系统还伴随有温度和流体运动时, 那么该系统控制方程还应与热扩散和流体动力学进行耦合. 毫无疑问, 非线性耗散系统动力学是一门具有非常丰富内容的学科.

§7.1.2 跃迁理论的科学意义

在这一小节中, 将对第六章中建立的跃迁理论的科学实在意义进行说明, 并进一步解说, 耗散系统的一般相变理论在非线性科学动力学中更广泛的作用.

首先, 为了方便, 在这里再回忆一下跃迁理论的基本原理, 即定理 6.6. 一个动力学系统的控制方程可写为

$$\frac{du}{dt} = L_\lambda u + G_\lambda u, \tag{7.1.14}$$

其中 u 代表系统状态, λ 为参变量代表着某种能量的输入强度, L_λ 为线性算子, 满足

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B_\lambda \text{为扇形算子}, \\ A: X_1 \to X \text{为线性同胚}, \\ B_\lambda : X_1 \to X \text{为线性紧算子}, \end{cases} \tag{7.1.15}$$

$X_1 \subset X$ 为两个 Banach 空间, G_λ 为非线性算子满足

$$\begin{cases} G_\lambda : X_1 \to X \text{为紧算子}, \\ G_\lambda u = o(\|u\|_{X_1}). \end{cases} \tag{7.1.16}$$

令 L_λ 的所有特征值为

$$\{\beta_k(\lambda) | \quad k = 1, 2, \cdots\} \subset C.$$

假设它们满足

$$\mathrm{Re}\beta_i(\lambda)\begin{cases}<0, & \lambda<\lambda_0,\\ =0, & \lambda=\lambda_0,\ 1\leqslant i\leqslant m,\\ >0, & \lambda>\lambda_0,\end{cases} \tag{7.1.17}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0)<0, \quad \forall j\geqslant m+1. \tag{7.1.18}$$

然后有下面跃迁理论的基本定理.

定理 7.1(跃迁基本原理) 在条件 (7.1.15)~(7.1.18) 假设下, 方程 (7.1.14) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 有一个跃迁, 并且一定是下述三种类型之一: (1) 连续型跃迁 (或吸引子分歧); (2) 跳跃型跃迁 (或不连续型跃迁); (3) 混合型跃迁.

现在我们来解释跃迁基本原理的科学实在意义.

条件 (7.1.15) 在实际中意味着线性算子 $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 的两个部分中 $-A$ 起到消耗能量作用. 通常代表椭圆算子 $(-1)^{m+1}\Delta^m(m\geqslant 1)$; B_λ 一般起到补充能量的作用, λ 代表补充能量的强度. 当 $A=(-1)^m\Delta^m$ 时, 作为微分算子 B_λ 最高只含 $2m-1$ 阶导数项.

条件 (7.1.16) 表明, G_λ 在 $u=0$ 附近是一个高阶非线性项, 即 G_λ 代表 Taylor 展开的高阶项. 因而在 $u=0$ 附近线性算子 L_λ 起到主要控制作用. G_λ 一般有三个部分:

$$G_\lambda=G_1+G_2+G_3, \tag{7.1.19}$$

其中 G_1 是消耗能量的, G_2 的补充能量的, G_3 即不补充也不消耗能量. G_λ 中所含导数项也不能超过 $2m-1$ 阶的导数. G_λ 在远离 $u=0$ 的区域起到主要控制作用.

显然 $u=0$ 是方程 (7.1.14) 的一个平衡态. 在相变理论中, 它经常代表热力学平衡态 (若热力学平衡态 $u_0\neq 0$, 作一变换 $u'=u-u_0$, 则 $u'=0$ 即代表 u_0). 条件 (7.1.17) 和 (7.1.18) 表明, 当能量输入强度 λ 小于某个临界值 λ_0 时, 热力学平衡态 $u=0$ 处在稳定状态, 而当 $\lambda>\lambda_0$ 时, $u=0$ 不再稳定, 跃迁基本原理告诉我们, 此时系统 (7.1.14) 将从 $u=0$ 跃迁到一个新的状态上.

跃迁基本原理中有三种类型的跃迁模型. 第一种模式典型地刻画了非平衡相变的基本特征: (a) 远离热力学平衡态 $u=0$ 的新状态 Σ 具有稳定性 (吸引子特征); (b) 新状态 Σ 具有有序结构, 即自组织结构 ($\Sigma=S^{m-1}$ 为 $m-1$ 维球面, 并且 Σ 中状态被第一特征向量控制). 第二种模式代表了状态的突变. 状态突变是自然的一种普遍现象, 这中间即存在跳跃式的相变, 又存在混沌发生的可能. 第三种模式表现了跃迁的某种不确定性, 这种不确定性表明系统在临界点附近的变化有很大的随机性, 一个很小的外界扰动就可造成系统出现性质

完全不同的跃迁模式和状态，可能有序也可能混沌，可能连续也可能跳跃，出现哪种模式和状态是随机地依赖于系统的涨落.

这三种类型的跃迁完全取决于 $L_\lambda + G_\lambda$ 在临界点 $\lambda = \lambda_0$ 的相互作用. 如果在 (7.1.19) 中的耗散项 G_1 在 $u = 0$ 附近起到控制作用，则系统在 $(0, \lambda_0)$ 是连续型跃迁. 若 G_2 项在 $u = 0$ 附近起主导作用，而在远离 $u = 0$ 处 G_1 占主要地位，则系统是跳跃式相变，即系统跃迁到一个稳定有序状态. 而当 G_2 和 G_3 在整修区域都很强时，系统一定是跳跃到混沌状态. 最后，G_1, G_2 和 G_3 都相对均等时，系统处在随机跃迁状态. 在非线性项中，G_1 起到稳定作用，G_2 具有强化运动的作用，而 G_3 即有稳定作用又有造成混乱的作用. 特别是 G_2 很强时，G_3 是造成混乱的主要因素.

总结上面的分析，再结合第六章建立的整个跃迁理论，对于非线性科学动力学可归纳为如下几个要点：

(1) 具有非线性耗散结构的动力系统在自然界中是一类具有普遍意义的运动，该系统由三个部分构成：能量耗散项、能量补充项及中和项. 这里能量是指广义能量.

(2) 每一个耗散系统都具有若干种不同的稳定状态，记为 $\Sigma_1^\lambda, \Sigma_2^\lambda, \cdots, \Sigma_n^\lambda$. 其每一种状态 Σ_i^λ 都具有一个稳定能量范围

$$\Sigma_i^\lambda : \lambda_i^1 < \lambda < \lambda_i^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

其中 λ 表示对系统的补给能量, 使得只有当外界给系统输入的能量在 $\lambda_i^1 < \lambda < \lambda_i^2$ 范围内时，Σ_i^λ 状态才能够维持和存在，否则系统将跃迁到别的状态上.

(3) 如果系统存在混沌状态 Σ_n^λ, 则能量范围为

$$\,_n^\lambda : \lambda_n^1 < \lambda < \infty,$$

即一旦出现混沌，当能量补给 λ 增长时，不再会出现新的有序状态.

(4) 最低能量态 Σ_1^λ 是系统的基本态，其能量范围为

$$\Sigma_1^\lambda : \lambda_1^1 < \lambda < \lambda_1^2,$$

即基本态为系统损耗能量最小的态. 在化学反应动力学中 Σ_1^λ 就是热力学平衡态.

(5) 每一种稳定态 Σ_i^λ 在系统的控制方程中都是一个局部吸引子，其临界能量值 λ_i^1 代表了 Σ_i^λ 的能级，而 λ_i^2 代表了 Σ_i^λ 的束缚能量，当输入能量超过 λ_i^2 时，系统将从 Σ_i^λ 跳到更高能级的状态上，当 $\lambda < \lambda_i^1$ 时系统将落到低能态上.

(6) 当 Σ_j 是从 Σ_i 分歧出来的稳定态时，则 $\lambda_i^2 = \lambda_j^1$. 而当 $\lambda_{i+1}^1 < \lambda_i^2$ 时，从 Σ_i 到 Σ_{i+1} 的跃迁一定是不连续的.

上述几点基本原理表明，除基本态 Σ_1^λ 外，系统的所有稳定态都需要一定能量来维持. 一旦这种能量低于 Σ_i^λ 所需值 λ_i^1, 则系统就跃迁到低能量态上. 因

为混沌是系统的最高能量态，一般来讲混沌出现需要很高能量补充才能维持. 这种高能量的损耗一般不可能维持很长时间，这就是为什么自然界中观察到的混沌现象时间都较短.

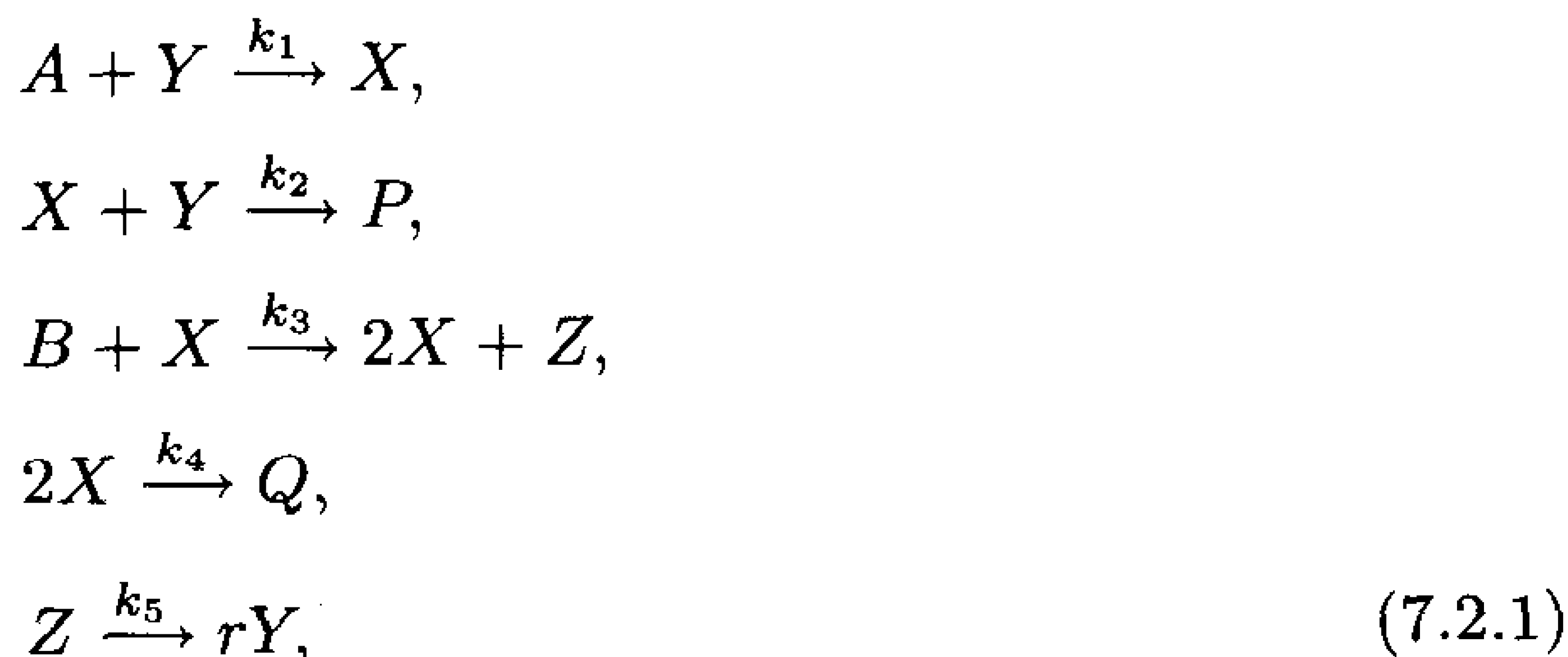
需要说明一点，在跃迁基本原理 (定理 7.1) 中，$u = 0$ 并不一定代表 (6.1.10) 的基本态. 但在具体应用中，多数情况下 (6.1.10) 的平凡稳态解 $u = 0$ 是基本态. 从 Σ_1^λ 到 Σ_2^λ 的跃迁称为第一次跃迁. 一般来说，一个具有混沌的耗散系统经过几次跃迁后便进入混沌状态.

§7.2 Belousov-Zhabotinsky 型化学反应

§7.2.1 Field-Noyes 方程

Belousov-Zhabotinsky 化学反应过程是一个有机分子被溴酸根离子氧化，氧化过程由氧化还原体 (C_e^{4+}/C_e^{3+}) 进行催化. 这个反应经过 18 个步骤，非常复杂.

Field 和 Noyes[18] 对 Belousov-Zhabotinsky 反应给出一个简化的反应模型，它涉及三个变量控制下面五个不可逆的反应过程



$$
\begin{aligned}
&A + Y \xrightarrow{k_1} X,\\
&X + Y \xrightarrow{k_2} P,\\
&B + X \xrightarrow{k_3} 2X + Z,\\
&2X \xrightarrow{k_4} Q,\\
&Z \xrightarrow{k_5} rY,
\end{aligned}
\tag{7.2.1}
$$

其中 r 为计量系数，P 和 Q 为产品，一经产出就不再加入反应，而

$$X = HB_rO_2, \quad Y = B_r^-, \quad Z = C_e^{4+}, \quad A = B = B_rO_3^-.$$

在 Field-Noyes 的原模型中只考虑了充分搅拌的情况，因而是一个常微分方程. 在这里只考虑非搅拌情形，并且允许 X, Y, Z 变化，而 A, B 保持不变. 从一般非搅拌反应方程 (7.1.13) 可得到关于反应 (7.2.1) 的控制方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{du_1}{dt} = \sigma_1 \Delta u_1 + k_1 a u_2 - k_2 u_1 u_2 + k_3 b u_1 - 2k_4 u_1^2,\\
\dfrac{du_2}{dt} = \sigma_2 \Delta u_2 - k_1 a u_2 - k_2 u_1 u_2 + r k_5 u_3,\\
\dfrac{du_3}{dt} = \sigma_3 \Delta u_3 + k_3 b u_1 - k_5 u_3,
\end{cases}
\tag{7.2.2}
$$

这里 u_1, u_2, u_3, a 和 b 分别代表 X, Y, Z, A 和 B 的浓度， σ_i 为 u_i 的扩散系数，$k_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 为 (7.2.1) 的反应系数， σ_i 和 k_i 都与温度 T 有关，事实上，$k_i = k_i^0 e^{-E_i/RT}, E_i$ 为活化能， R 为 Boltzmann 常数.

令 $\Omega \subset R^n(1 \leqslant n \leqslant 3)$ 为反应容器. 考虑在边界 $\partial\Omega$ 上允许有物质交换以控制 X, Y, Z 在 $\partial\Omega$ 的浓度为零. 在这种情况下有边界条件

$$u = (u_1, u_2, u_3) = 0, \quad \text{在}\partial\Omega\text{上}. \tag{7.2.3}$$

需要对 (7.2.2) 无量纲化. 注意到下面的量纲

$$k_i(1 \leqslant i \leqslant 4) : M^{-1}t^{-1}; \quad k_5 : t^{-1};$$

$$a, b, u_i(1 \leqslant i \leqslant 3) : M; \quad \sigma_i(1 \leqslant i \leqslant 3) : L^2 t^{-1},$$

其中 t 为时间， M 为摩尔密度， L 为长度. 取下面无量纲变量

$$\begin{aligned}
&u_1 = \frac{k_1 a}{k_2} u_1'; \qquad u_2 = \frac{k_3 b}{k_2} u_2'; \quad u_3 = \frac{k_1 k_3}{k_2 k_5} ab u_3';\\
&t = (k_1 k_3 ab)^{-\frac{1}{2}} t'; \quad x = Lx';\\
&\alpha = \left(\frac{k_3 b}{k_1 a}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \beta = \frac{2k_1 k_4 a}{k_2 k_3 b};\\
&\delta = k_5 (k_1 k_3 ab)^{\frac{1}{2}};\\
&\mu_i = \frac{\sigma_i}{L^2 (k_1 k_2 ab)^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

在上面变换下，方程 (7.2.2) 及边界条件 (7.2.3) 化为如下无量纲形式 (为了简单，去掉上撇)：

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \mu_1 \Delta u_1 + \alpha(u_1 + u_2 - u_1 u_2 - \beta u_2^2),\\
\dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \mu_2 \Delta u_2 + \dfrac{1}{\alpha}(r u_3 - u_2 - u_1 u_2),\\
\dfrac{\partial u_3}{\partial t} = \mu_3 \Delta u_3 + \Delta(u_1 - u_3),\\
u|_{\partial\Omega} = 0,\\
u(x, 0) = \varphi,
\end{cases} \tag{7.2.4}$$

其中 $u = (u_1, u_2, u_3), u_i \geqslant 0(i = 1, 2, 3)$, 及无量纲常数

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0,$$

$\Omega \subset R^n(n = 1, 2, 3)$ 为一有界区域.

§7.2.2 数学框架

由 Smoller[91] 知道下面区域

$$D = \{(u_1, u_2, u_3)| \quad 0 \leqslant u_i \leqslant a_i, \quad i = 1, 2, 3\} \tag{7.2.5}$$

对于方程 (7.2.4) 是不变的，其中 $a_i(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 满足

$$a_1 > \max\{1, \beta^{-1}\}, \quad a_2 > \gamma a_3, \quad a_3 > a_1.$$

记

$$R_+^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \in R^m | x_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$\lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \gamma, \delta) \in R_+^6.$$

建立下面空间

$$X_1 = H^2(\Omega, R^3) \cap H_0^1(\Omega, R^3),$$
$$X = L^2(\Omega, R^3).$$

定义算子 $L_\lambda = -A_\lambda + B_\lambda$ 和 $G_\lambda : X_1 \to X$ 为

$$A_\lambda u = (-\mu_1 \Delta u_1, -\mu_2 \Delta u_2, -\mu_3 \Delta u_3),$$
$$B_\lambda u = \left(\alpha u_1 + \alpha u_2, -\frac{1}{\alpha} u_2 + \frac{\gamma}{\alpha} u_3, -\delta u_3 + \delta u_1\right),$$
$$G(u, \lambda) = \left(-\alpha u_1 u_2 - \alpha \beta u_1^2, -\frac{1}{\alpha} u_1 u_2, 0\right).$$

那么 Field-Noyes 方程 (7.2.4) 可写为如下抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{7.2.6}$$

其中 $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \gamma, \delta) \in R_+^6$.

下面将应用定理 6.10 讨论 Field-Noyes 方程 (7.2.4) 在 (7.2.5) 给出的不变区域 D 内跃迁问题，以获得 Belousov-Zhabotinsky 化学反应 (7.2.1) 非平衡相变的条件. 必须注意到，方程 (7.2.4) 的解 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 代表化学物浓度，$u_i \geqslant 0(1 \leqslant i \leqslant 3)$, 因而只有非负解才具有化学意义.

§7.2.3 相变定理

令 ρ_k 和 e_k 是 Dirichlet 边界条件下 Laplace 算子第 k 个特征值和特征向量

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \rho_k e_k, \\ e_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots. \end{cases} \tag{7.2.7}$$

(7.2.7) 的第一特征函数是正的

$$e_1(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{7.2.8}$$

令 $\wedge(\lambda)$ 是 $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \gamma, \delta) \in R^6_+$ 的函数，定义为

$$\wedge(\lambda) = \alpha\gamma\delta - (\mu_1\rho_1 - \alpha)(\mu_2\alpha\rho_1 + 1)(\mu_3\rho_1 + \delta),$$

并且记 $\lambda_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \alpha^0, \gamma^0, \delta^0)$ 满足

$$\wedge(\lambda_0) = 0, \tag{7.2.9}$$

其中 ρ_1 为 (7.2.7) 的第一特征值. 令

$$\Gamma = \{\lambda_0 \in R^6_+ | \lambda_0\text{满足}(7.2.9)\}.$$

定义矩阵 E_λ 为

$$E(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\mu_1\rho_1 - \alpha) & \alpha^0 \\ 0 & -(\mu_2\rho_1 + \alpha^{-1})\alpha^{-1}\gamma \\ \delta & 0 - (\mu_3\rho_1 + \delta) \end{pmatrix}, \tag{7.2.10}$$

以及两个正实数 $a, b > 0$ 为

$$\begin{cases} a = \Big[\alpha^0\delta^0(1 + \mu_2^0\alpha^0\rho_1)(\mu_3^0\rho_1 + \delta^0) \\ \qquad + \dfrac{(\alpha^0)^3(\delta^0)^2\gamma^0}{1 + \mu_2^0\alpha^0\rho_1} + \dfrac{\alpha^0\gamma^0(\delta^0)^2}{\delta^0 + \mu_3^0\rho_1}\Big] \cdot \displaystyle\int_\Omega e_1^2 dx, \\ b = \delta^0(\mu_3^0\rho_1 + \delta^0)(\alpha^0)^2 \Big[\beta(\mu_3^0\rho_1 + \delta^0)(\mu_2^0\alpha^0\rho_1 + 1) \\ \qquad + \alpha^0\delta^0\gamma^0 + \dfrac{1}{\alpha^0}\dfrac{\delta^0\gamma^0(\alpha^0)^2}{1 + \mu_2^0\alpha^0\rho_1}\Big] \cdot \displaystyle\int_\Omega e_1^3 dx. \end{cases} \tag{7.2.11}$$

然后, 对 Field-Noyes 方程 (7.2.4), 有下面吸引子分歧定理, 它给出 Belousov-Zhabotinsky 化学反应非平衡相变的条件.

定理 7.2 对任何λ_0= $(\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \alpha^0, \gamma^0, \delta^0) \in \Gamma$,如果$\lambda = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \gamma, \delta) \in R^6_+$ 满足 $\lambda \neq \lambda_0$ 及

$$\wedge(\lambda) > \wedge(\lambda_0) = 0, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon, \quad \text{对某个小量}\varepsilon > 0,$$

那么 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 是 (7.2.4) 的跃迁点，并且下面结论成立：

(1) 方程 (7.2.4) 从 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 分歧出一个唯一奇点 $u_\lambda \in X_1, u_\lambda > 0$ 在 Ω 中，并且 u_λ 是一个吸引子.

(2) 奇点 $u_\lambda(x)$ 能够表达为

$$\begin{cases} u_\lambda(x) = \beta_1(\lambda)xb^{-1}v_0(x) + o(|\beta_1(\lambda)|), \\ v_0(x) = \left(\alpha^0(\delta^0 + \mu_3^0\rho_1)e_1, \dfrac{\alpha^0\gamma^0\delta^0}{1+\mu_2^0\alpha^0\rho_1}e_1, \alpha^0\delta^0 e_1\right), \end{cases} \tag{7.2.12}$$

其中 $a, b > 0$ 由 (7.2.11) 给出， $\beta_1(\lambda)$ 是 (7.2.10) 的正特征值，即 $\beta_1(\lambda) > 0$.

(3) 存在一个开集 $O \subset X, u = 0 \in O$, 使得 u_λ 吸引 $O \cap \dot{D}$, 这里 $\dot{D}$ 是由 (7.2.5) 给出的不变集内部. 也就是说，对任何 $\varphi \in O \cap \dot{D}$,(7.2.4) 的解 $u(x,t,\varphi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega |u(x,t,\varphi) - u_\lambda(x)|^2 dx = 0.$$

证明 这个证明能够通过应用定理 6.10 对方程 (7.2.6) 而获得. 需要验证条件 (6.0.2) (6.0.3) 及 (6.4.1).

首先，对于方程 (7.2.6), 由 §2.5 我们知道 L_λ 是一个扇形算子，并且是一个全连续场. 显然 G_λ 满足

$$\begin{cases} G_\lambda : X_\theta \to X \text{是} C^\infty \text{的，对某个} \theta < 1, \\ G_\lambda(u,\lambda) = o(\|u\|_{X_\theta}). \end{cases}$$

因而条件 (6.0.2) 和 (6.0.3) 成立.

现在验证条件 (6.4.1). L_λ 的所有特征值 $\beta_{jk}(\lambda)(j = 1,2,3, k = 1,2,\cdots)$ 满足

$$\det(\beta_{jk}I - E_k(\lambda)) = 0, \tag{7.2.13}$$

其中 $E_k(\lambda)(k = 1,2,\cdots)$ 是如下矩阵

$$E_k(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\mu_1\rho_k - \alpha) & \alpha_0 \\ 0 & -(\mu_2\rho_k - \alpha^{-1})\alpha^{-1}\gamma \\ \delta & 0 - (\mu_3\rho_k + \delta) \end{pmatrix}, \tag{7.2.14}$$

其中 ρ_k 是 (7.2.7) 第 k 个特征值.

容易看出，函数 $\wedge(\lambda)$ 由下式给出

$$\wedge(\lambda) = \alpha\det E_1(\lambda). \tag{7.2.15}$$

因此有

$$\det E_1(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Gamma.$$

进一步，容易看到

$$\text{grad} \wedge (\lambda) = \left(\frac{\partial\wedge}{\partial\mu_1}, \frac{\partial\wedge}{\partial\mu_2}, \frac{\partial\wedge}{\partial\mu_3}, \frac{\partial\wedge}{\partial\alpha}, \frac{\partial\wedge}{\partial\gamma}, \frac{\partial\wedge}{\partial\delta}\right) \neq 0, \quad \forall\lambda \in \Gamma,$$

并且 Γ 能够被表达为一个单值函数

$$\gamma = \frac{(\mu_1\rho_1 - \alpha)(\mu_2\alpha\rho_1 + 1)(\mu_3\rho_1 + \delta)}{\alpha\delta},$$

其中 $\alpha, \delta, \mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$. 因而可推出，$\Gamma$ 是 R^6_+ 中的一个 5 维流形，并且分 R^6_+ 为两个不相交的连通开集

$$R^6_+ = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2, \quad D_1 \cap D_2 = \varnothing, \quad \partial D_1 \cap \partial D_2 = \Gamma,$$

使得

$$\det E_1(\lambda) = \beta_{11}(\lambda)\beta_{21}(\lambda)\beta_{31}(\lambda) \begin{cases} < 0, & \forall \lambda \in D_1, \\ > 0, & \forall \lambda \in D_2. \end{cases} \tag{7.2.16}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Re}\beta_{j1}(\lambda) &= E_1(\lambda)\text{的迹} \\ &= -[(\mu_1\rho_1 - \alpha) + (\mu_2\rho_1 + \alpha^{-1}) + (\mu_3\rho_1 + \delta)], \end{aligned} \tag{7.2.17}$$

并且存在 $\lambda_1 = (\mu_1^1, \mu_2^1, \mu_3^1, \alpha^1, \gamma^1, \delta^1) \in R^6_+$, 使得

$$\wedge(\lambda_1) \geqslant 0, \quad \mu_1^1\rho_1 - \alpha^1 > 0. \tag{7.2.18}$$

从 (7.2.15)~(7.2.18) 推出

$$\lambda_1 \in \bar{D}_2, \quad \text{并且} \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Re}\beta_{j1}(\lambda_1) < 0. \tag{7.2.19}$$

然后，从 (7.2.16),(7.2.17) 和 (7.2.19) 可推出

$$\beta_{11}(\lambda) > 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{21}(\lambda) < 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{31}(\lambda) < 0, \quad \lambda \in D_2, \tag{7.2.20}$$

$$\beta_{11}(\lambda) = 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{21}(\lambda) < 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{31}(\lambda) < 0, \quad \lambda \in \Gamma. \tag{7.2.21}$$

再从 (7.2.16) 和 (7.2.21) 可得

$$\beta_{11}(\lambda) < 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{21}(\lambda) < 0, \quad \mathrm{Re}\beta_{31}(\lambda) < 0, \quad \lambda \in D_1. \tag{7.2.22}$$

因此 (6.4.1) 中第一个条件从 (7.2.20)~(7.2.22) 推出.

现在需要证明下面不等式

$$\mathrm{Re}\beta_{jk}(\lambda_0) < 0, \quad \forall \lambda_0 \in \Gamma, \quad k \geqslant 2. \tag{7.2.23}$$

令 $\lambda_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \alpha^0, \gamma^0, \delta^0) \in \Gamma$. 那么由 (7.2.9) 可得

$$\mu_1^0 \rho_1 - \alpha_0 > 0. \tag{7.2.24}$$

这样，从 (7.2.24) 可推出

$$\begin{aligned}\det E_k(\lambda_0) &= \frac{1}{\alpha^0}\left[\alpha^0\gamma^0\delta^0 - (\mu_1^0\rho_k - \alpha^0)(\mu_2^0\alpha^0\rho_k + 1)(\mu_3^0\rho_k + \delta^0)\right] \\ &< \frac{1}{\alpha^0}\left[\alpha^0\gamma^0\delta^0 - (\mu_1^0\rho_1 - \alpha^0)(\mu_2^0\alpha^0\rho_1 + 1)(\mu_3^0\rho_1 + \delta^0)\right]\end{aligned}$$

对所有 $\rho_k > \rho_1 (k \geqslant 2)$ 成立. 即

$$\det E_k(\lambda_0) < \det E_1(\lambda_0) = 0, \quad \forall k \geqslant 2, \quad \lambda_0 \in \Gamma. \tag{7.2.25}$$

此外容易看到

$$\begin{cases} E_k(\lambda_0) = E_1(\widetilde{\lambda}_1), \\ \widetilde{\lambda}_1 = (\mu_1^0\rho_k\rho_1^{-1}, \mu_2^0\rho_k\rho_1^{-1}, \mu_3^0\rho_k\rho_1^{-1}, \alpha^0, \gamma^0, \delta^0), \end{cases} \tag{7.2.26}$$

因此有

$$\beta_{jk}(\lambda_0) = \beta_{j1}(\widetilde{\lambda}), \quad \forall k \geqslant 1, \quad j = 1, 2, 3. \tag{7.2.27}$$

从 (7.2.25),(7.2.26) 和 (7.2.16) 可得 $\widetilde{\lambda} \in D_1$. 这样 (7.2.23) 可从 (7.2.22) 和 (7.2.27) 推出. 因而条件 (6.4.1) 得证.

最后，由定理 6.10 只需证明

$$\langle G(v_0, \lambda_0), v_0^* \rangle = -b < 0, \tag{7.2.28}$$

其中 v_0 和 v_0^* 分别为 L_λ 和 L_λ^* 对应于 $\beta_{11}(\lambda_0) = 0$ 的特征向量. 令

$$v_0 = (x_1e_1, x_2e_2, x_3e_1),$$

$$v_0^* = (x_1^*e_1, x_2^*e_1, x_3^*e_1),$$

其中 e_1 满足 (7.2.8). 那么 (x_1, x_2, x_3) 是矩阵 $E_1(\lambda_0)$ 的特征向量

$$\begin{pmatrix} -(\mu_1^0\rho_1 - \alpha^0) & \alpha^0 0 \\ 0 & -(\mu_2^0\rho_1 + (\alpha^0)^{-1})\gamma^0(\alpha^0)^{-1} \\ \delta^0 & 0 - (\mu_3^0\rho_1 + \delta^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

它有一个唯一解

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\alpha^0(\delta^0 + \mu_3^0\rho_1), \frac{\alpha^0\gamma^0\delta^0}{1 + \mu_2^0\alpha^0\rho_1}, \alpha^0\delta^0\right).$$

因此特征向量 $v_0(x)$ 正如 (7.2.12) 中所给的.

向量 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) 是 $E_1^*(\lambda_0)$ 的特征向量

$$\begin{pmatrix} -(\mu_1^0\rho_1-\alpha^0) & 0\delta^0 \\ \alpha^0 & -(\mu_2^0\rho_1+(\alpha^0)^{-1})0 \\ 0 & \gamma^0(\alpha^0)^{-1}-(\mu_3^0\rho_1+\delta^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}=0,$$

从而解出

$$v_0^*(x)=\left(\delta^0(1+\mu_2^0\alpha^0\rho_1)e_1, \delta^0(\alpha^0)^2e_1, \frac{\alpha^0\gamma^0\delta^0}{\delta^0+\mu_3^0\rho_1}e_1\right).$$

最后将 $v_0(x)$ 和 v_0^* 代入 (7.2.29) 可得

$$\begin{aligned} b &= -\langle G(v_0,\lambda_0), v_0^*\rangle_X \\ &= \int_\Omega \left[\alpha^0(x_1x_2+\beta x_1^2)x_1^*+x_1x_2x_2^*/\alpha^0\right]e_1^3dx. \end{aligned}$$

直接计算可得 $b>0$ 正如 (7.2.11) 所给出. 再由

$$a=\langle v_0, v_0^*\rangle_X=\int_\Omega v_0(x)v_0^*(x)dx$$

可算得 $a>0$ 如 (7.2.11) 给出. 这样, 由定理 6.10 可得到定理 7.2. 显然由 (7.2.12) 给的 u_λ 是在不变区域 $\dot{D}$ 中. 定理证毕.

§7.2.4　化学意义评述

Belousov-Zhabotinsky 反应在化学反应动力学中是具有非常典型意义的. 一般的化学反应经过一段时间后达到热力学平衡, 此时各种反应组元浓度在空间和时间上都是均匀不变的. 然而 Belousov-Zhabotinsky 反应却表现出完全不同的特征, 这种反应在一定的非平衡条件下可以偏离热力学平衡而达到一种新的稳定状态, 在这种状态下某些组元浓度或只随空间而变化; 或者它们在空间分布是均匀的但随时间而变化; 或者表现出空间与时间的非线性行波现象, 即浓度变化通过不同组元的颜色在空间中表现出波的传播行为. 之所以出现这种状态, 是因为它们含有自催化的反应步骤, 例如在 (7.2.1) 中的第三种反应就是一个自催化过程, 它起到增值作用.

今天, 人们经常将所有具有自催化过程并能产生非平衡相变的化学反应称为 Belousov-Zhabotinsky 型反应. 正如上面所提到的三种类型非平衡稳定态: 只随空间变化的定常态, 只随时间振荡的均匀态, 以及时空变化的行波态, 它们都在化学不同系统中被实验观察到.

对于 (7.2.1) 类型的反应, 在容器边界上有物质交换并控制其 X, Y, Z 浓度为零条件下, 定理 7.2 说明, 只存在有随空间变化定常态的非平衡相变. 下面将讨论 Belousov-Zhabotinsky 型反应 (7.2.1) 非平衡相变的化学意义.

由定理 7.2 知道, 化学反应 (7.2.1) 的控制方程 (7.2.4) 是否会发生连续性跃迁完全取决于参变量 $\lambda=(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\alpha,\gamma,\delta)\in R_+^6$ 的函数 $\wedge(\lambda)$ 的符号. 当 $\wedge(\lambda)<0$ 时, 系统将会在热力学平衡态上 (即 $u=(u_1,u_2,u_3)=0$), 而当 $\wedge(\lambda)>0$ 时, 系统将会达到一个非热力学稳定态 u_λ 上.

根据非线性科学动力学原理, 我们关心确定 (7.2.1) 的两种状态 $u=0$ 和 $u=u_\lambda$ 的广义能量是什么, 稳定态 u_λ 的能级 $\lambda_0(\wedge(\lambda_0)=0)$ 主要影响因素是什么.

为了方便, 回忆一下函数 $\wedge(\lambda)$ 的表达式

$$\wedge(\lambda)=\alpha\gamma\delta-(\mu_1\rho_1-\alpha)(\mu_2\alpha\rho_1+1)(\mu_3\rho_1+\delta). \tag{7.2.29}$$

从化学反应式 (7.2.1) 中可以看到, A 和 B 组元的浓度 a,b 起到维持反应的能量作用, 因为它们是从外界输入的可控制量, 而 $k_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 和 γ 是主要影响因子.

从 (7.2.29) 中可看出影响 $\wedge(\lambda)$ 符号的主要是下面三个变量

$$\alpha=\left(\frac{k_3b}{k_1a}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \mu_1=\frac{\sigma_1}{L^2(k_1k_2ab)^{1/2}},\quad \rho_1.$$

当 $\mu_1\rho_1-\alpha\leqslant 0$ 时, 系统一定是在 u_λ 态上, 而当 $\mu_1\rho_1-\alpha\gg 1$ 很大时, 系统会在 $u=0$ 态上. 因而 α 越大系统就越倾向于非热力学态 u_λ 上, 而 μ_1 和 ρ_1 越大就越有利于在热力学平衡态 $u=0$ 上.

k_3b 反映了 (7.2.1) 中自催化过程 (第三个反应) 的强度, 而 k_1a 减弱自催化过程. 因而在前面关于 $\alpha=(k_3b/k_1a)^{\frac{1}{2}}$ 在状态倾向中所起作用的分析是与非平衡相变的化学机理是一致的.

从 μ_1 的表达式可以看到物质流 $(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}$ 与 μ_1 成反比, 因而 $(a\cdot b)$ 越大 μ_1 就越小, 从而越有利于非平衡相变发生. 而 $(a\cdot b)$ 越小就越有利于热力学稳定.

现在, 分析 (7.2.7) 第一特征值 ρ_1 的作用. ρ_1 是与容器的几何形状与大小有关, 它与 Ω 体积标度平方成反比:

$$\rho_1\sim\frac{1}{l^2}, \tag{7.2.30}$$

其中 l 表示 Ω 体积标度. 这一点可从下面简单推理看出, 令 Ω_0 为一给定区域, 不失一般性, 令 $x=0\in\Omega_0$. 令 Ω 为 Ω_0 按 $l(0<l<\infty)$ 标度进行的伸缩:

$$\Omega=\{lx|x\in\Omega_0\}.$$

令 ρ_1^0 为 $-\Delta$ 在 Ω_0 上的第一特征值

$$\begin{cases}-\Delta e=\rho_0 e, & x\in\Omega_0,\\ e|_{\partial\Omega_0}=0,\end{cases}$$

则 $-\Delta$ 在 Ω 上的第一特征值 $\rho_1 = \frac{1}{l^2}\rho_0$, 即

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{e}}{\partial \widetilde{x}_i^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 e}{\partial x_i^2} \left(\frac{dx_i}{d\widetilde{x}_i}\right)^2 = \frac{1}{l^2}\rho_0 \widetilde{e},$$

其中 $x = \frac{1}{l}\widetilde{x}, \widetilde{e} = e\left(\frac{1}{l}\widetilde{x}\right)$. 这样就得到 (7.2.30).

从 ρ_1 大小对非平衡相变影响的分析及 (7.2.30), 可以得出一个重要的结论, 即一个非搅拌的化学反应系统是否能发生非平衡相变与反应容器的几何形状及尺寸有关. 在 (7.2.1) 型的 Belousov-Zhabotinsky 反应中, 对于固定的 a 和 b 的值, 反应容器的体积 V 小于某个值 V_1 时, 系统总是在热力学平衡态 $u = 0$ 上; 当 V 大于某个值 V_2 时, 系统一定是在非热力学态 u_λ 上; 当 $V_1 < V < V_2$ 时, 系统处在什么态上依赖于 k_i, γ 及 σ_j 等其他因素.

最后, 我们需要解释容器 Ω 的维数问题. 在 (7.2.2) 中, $\Omega \subset R^n (n = 1, 2, 3)$. 当 $\Omega = \Omega_1 \times [0, L)$, 而 Ω_1 的直径 $d \ll L$ 时, 就可近似地视 $\Omega = (0, L) \subset R^1$. 当 Ω_1 的直径 $d \gg L$ 时, 则近似地 $\Omega = \Omega_1 \subset R^2$.

§7.3 二元体的相分离

§7.3.1 Cahn-Hilliard 方程

一个具有两种组元 A 和 B 复合的物质, 如溶液合金、聚合物等称为二元体. 当一个二元体冷却到一定温度后相分离将可能产生, 也就说原来均匀分布的 A 和 B 的浓度开始发生变化, 出现不均匀分布. 这种由相变造成的图形结构在合金 [14] 、玻璃 [93] 和二元混合溶液 [92] 中都可以观察到. 在实验中观察到的二元体相分离主要有两种方式: 一种是相的凝聚是突然发生的, 有时伴有周期或半周期结构出现. 另一是相凝聚逐渐形成, 其晶核随机地出现并生长. 第一种相变对应的就是跳跃性跃迁, 第二种对应的是连续型跃迁. 需要指出的是, 二元体相分离是属于平衡相变范围, 其稳定平衡态都是自由能达到局部最小.

描述二元体相分离的模型是 Cahn-Hilliard 方程. 下面给出它的基本推导过程. 令 u 为 B 组元的浓度分量

$$u = 1 - u_A, \quad u_A\text{为}A\text{组元浓度分量}.$$

由热力学原理, u 扩散的流 J 满足下面关系

$$J = -k_1 \nabla(\mu_B - \mu_A), \tag{7.3.1}$$

其中 $k_1 > 0$ 与温度、压力及浓度 u 有关, 但这里近似地假设为常数, μ_B 和 μ_A 分别为 B 和 A 的化学势. (7.3.1) 是古典 Fick 定律在热力学中变形.

令 $f(u,\nabla u)$ 是二元体的自由能密度，则

$$\mu_B-\mu_A=\frac{\partial f}{\partial u}-\sum D_i\frac{\partial f}{\partial(D_iu)}, \tag{7.3.2}$$

Cahn-Hilliard[7] 给出 f 的形式为

$$\begin{cases} f=f_0(u)+\dfrac{1}{2}k_2(\nabla u)^2, \\ f_0(u)=\alpha_0+\alpha_1u+\cdots+\alpha_{2m}u^{2m}, \quad m\geqslant 2\text{为整数}. \end{cases} \tag{7.3.3}$$

(7.3.3) 本质上就是平均场理论．由质量守恒定律，从 (7.3.1)~(7.3.3) 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\text{div}J=-k\Delta^2u+\Delta g(u), \tag{7.3.4}$$

其中 $k=k_1k_2, g(u)=k_1\partial f_0(u)/\partial u$.

由于 B 的总质量不变，因而必须加一个守恒条件

$$\int_\Omega u(x,t)dx=\int_\Omega u(x,0)dx, \quad \forall t>0, \tag{7.3.5}$$

其中 $\Omega\subset R^n(n=1,2,3)$ 为二元体的空间区域.

方程 (7.3.4) 和 (7.3.5) 就是控制二元体相变的 Kahn-Hilliard 方程，它由 Novick-Cohen 和 Segel[76] 导出.

§7.3.2 方程的标准化

这里只考虑在 (7.3.3) 中的 f_0 关于 u 是四次多项式，因而 $g(u)=k_1\partial f_0(u)/\partial u$ 是三次多项式

$$g(u)=b_0+b_1u+b_2u^2+b_3u^3. \tag{7.3.6}$$

方程 (7.3.4) 和 (7.3.5) 允许一个常数解 $u=u_0(u_0>0)$，这就是相分离之前的均匀态．考虑在 u_0 的摄动

$$u=u_0+u'(x).$$

然后，方程 (7.3.4)~(7.3.6) 可写为 (为了方便省去上撇)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=-k\Delta^2u+\Delta f(u), \\ \displaystyle\int_\Omega u(x,t)dx=0, \quad \forall t\geqslant 0, \end{cases} \tag{7.3.7}$$

$$f(u)=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3. \tag{7.3.8}$$

对 (7.3.7) 进行无量纲化

$$x = lx', \qquad t = \frac{l^4 u_0}{k} t', \qquad u = u_0 u',$$
$$\lambda = -\frac{u_0 a_1}{l^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{u_0^2 a_2}{l^2}, \qquad \alpha_3 = \frac{u_0^3 a_3}{l^2},$$

其中 l 为一给定长度单位, u_0 为前面所提的常值解. 然后方程 (7.3.7) 化为下面无量纲形式 (省去上撇)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta^2 u - \lambda \Delta u + \alpha_2 \Delta u^2 + \alpha_3 \Delta u^3, \\ \displaystyle\int_\Omega u(x,t)dx = 0, \quad \forall t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \end{cases} \tag{7.3.9}$$

$\Omega \subset R^n (1 \leqslant n \leqslant 3)$ 是一有界区域.

对于 Cahn-Hilliard 方程, 具有物理意义的边界条件只能取下面两种的一个.

Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad 在\partial\Omega上, \tag{7.3.10}$$

这里 n 为 $\partial\Omega$ 的法向量.

周期边界条件: $\Omega = [0, 2\pi]^n$, 及

$$u(x + 2k\pi) = u(x), \tag{7.3.11}$$

其中 $k = (k_1, \cdots, k_n), k_i$ 为整数.

这里需要说明, 由统计物理的平均场理论和标度律, (7.3.8) 中的系数 $a_i (0 \leqslant i \leqslant 3)$ 都是温度 T 的连续函数, 并且在临界温度 T_1 处 a_1 和 a_3 满足

$$a_1(T) \propto \frac{T - T_1}{T}, \quad a_3(T_1) \neq 0,$$

因而关于 λ 和 α_3 有

$$\lambda(T) \begin{cases} > 0, & T < T_1, \\ < 0, & T > T_1, \end{cases} \quad 及\alpha_3 \neq 0. \tag{7.3.12}$$

从 (7.3.12) 可以看到, 由 (7.3.9) 所描述的相分离一定是 T 在临界温度以下 $(T < T_1)$ 发生. 若 $\alpha_3 \leqslant 0$, 则在 (7.3.3) 中 $m \geqslant 3$.

建立下面空间

$$H = \left\{ u \in L^2(\Omega) | \int_\Omega u dx = 0 \right\}.$$

对于 Neumann 条件，定义

$$H_1 = \{u \in H^4(\Omega) \cap H | u满足(7.3.10)\}.$$

对于周期边界条件，定义

$$H_1 = \{u \in H^4(\Omega) \cap H | u满足(7.3.11)\}.$$

然后定义算子 $L_\lambda = -A + B_\lambda$ 和 $G : H_1 \to H$ 为

$$\begin{cases} Au = \Delta^2 u, \\ B_\lambda u = -\lambda \Delta u, \\ G(u, \lambda) = \Delta(\alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3). \end{cases} \tag{7.3.13}$$

这样， Cahn-Hilliard 方程 (7.3.9) 划为下面抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u, \lambda), \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{7.3.14}$$

§7.3.3 Neumann 边界条件

首先考虑 $\Omega \subset R^n$ 是一般有界区域情况. 令 ρ_k 和 e_k 是下面问题的第 k 个特征值和特征向量

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \rho_k e_k, \\ \left.\dfrac{\partial e_k}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ \displaystyle\int_\Omega e_k dx = 0. \end{cases} \tag{7.3.15}$$

知道 (7.3.15) 的特征值 ρ_k 具有性质

$$0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots, \quad \rho_k \to \infty, \quad k \to \infty.$$

并且 (7.3.15) 的特征函数 $\{e_k\}$ 构成 H 的一个正交基. 特别地， e_k 也满足

$$\left.\frac{\partial \Delta e_k}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

因此在下面等价范数下， $\{e_k\}$ 也是 H_1 的正交基

$$\|u\|_1 = \left[\int_\Omega |\Delta^2 u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

定理 7.3　对于 Cahn-Hilliard 方程 (7.3.9) 及 Neumann 边界条件 (7.3.10). 若 $\alpha_2 = 0$ 及 $\alpha_3 > 0$, 那么 (7.3.9) 在 $(u,\lambda) = (0,\rho_1)$ 发生连续型的跃迁，并且下面结论成立:

(1) 若 (7.3.15) 的第一特征值 ρ_1 有重数 $m \geqslant 1$, 那么 (7.3.9) 从 $(0,\rho_1)$ 在 $\lambda > \rho_1$ 分歧出一个吸引子 Σ_λ 同调于 $(m-1)$ 维球面 S^{m-1}, Σ_λ 中一定含有至少 $2m$ 个奇点 $\{u_1,\cdots,u_{2m}\} \subset H_1$, 并且 Σ_λ 吸引 H/Γ, 其中 Γ 为 $u=0$ 的稳定流形在 H 中有余维 m.

(2) 当 $m=1$ 时，Σ_λ 由严格两个奇点构成；当 $m=2$ 时，$\Sigma_\lambda = S^1$, 并且最多含有 8 个奇点.

(3) Σ_λ 中的任一奇点 u_λ 可表达为如下形式

$$\begin{cases} u_\lambda = \left(\dfrac{\lambda-\rho_1}{\alpha_3}\right)^{\frac{1}{2}} v_0 + o(|\lambda-\rho_1|^{\frac{1}{2}}), \\ v_0\text{是 (7.3.15) 的第一特征向量}. \end{cases} \tag{7.3.16}$$

证明　显然 (7.3.15) 的特征向量 e_k 也是由 (7.3.13) 定义的线性算子 $L_\lambda = -A + B_\lambda$ 的特征向量，并且 L_λ 的特征值 $\beta_k(\lambda)$ 为

$$\beta_k(\lambda) = \rho_k(\lambda-\rho_k), \quad k=1,2,\cdots. \tag{7.3.17}$$

因而跃迁定理 (定理 6.6) 中条件 (6.0.2),(6.0.3),(6.2.1) 和 (6.2.2) 对 $\lambda_0 = \rho_1$ 成立. 我们将应用吸引子分歧理论证明结论 (1)~(3).

首先需要验证 $u=0$ 是 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $\lambda=\rho_1$ 的全局渐近稳定平衡点. 由 $\alpha_2=0$, 对 (7.3.9) 进行能量积分可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx &= \int_\Omega [-|\Delta u|^2 + \rho_1|\nabla u|^2 - 3\alpha_3 u^2|\nabla u|^2] \\ &\leqslant -C\int_\Omega |\Delta v|^2 dx - 3\alpha_3\int u^2|\nabla u|^2 dx, \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

其中 $u = v+w$, w 为 (7.3.15) 的第一特征函数，$v \perp w$. 从 (7.3.18) 可推出 $u=0$ 是全局渐近稳定的. 由定理 6.2 可得到吸引子分歧的结论.

我们知道，对任 $\lambda \in R^1$,(7.3.9) 和 (7.3.10) 具有一个全局吸引子 [98], 因而需要证明分歧出吸引子 Σ_λ 中一定含有至少 $2m$ 个奇点.

令 $f(u) = -\Delta u - \lambda u + \alpha_3 u^3$, 则在定理假设下，(7.3.9) 和 (7.3.10) 的稳定方程为

$$\begin{cases} \Delta f(u) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \displaystyle\int_\Omega u dx = 0. \end{cases} \tag{7.3.19}$$

从 (7.3.19) 可推出

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u + C_3 u^3 = 0, & \text{mod(常数)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, & \displaystyle\int_\Omega u dx = 0. \end{cases} \tag{7.3.20}$$

由 Lagrange 乘子定理，方程 (7.3.20) 的解等价于下面泛函在零平均约束下的极值点

$$\begin{cases} F(u) = \displaystyle\int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|^2 + \frac{C_3}{4}|u|^4\right] dx, \\ \displaystyle\int_\Omega u dx = 0, \quad u \in H_1. \end{cases} \tag{7.3.21}$$

因为 (7.3.21) 为偶泛函，由定理 4.13, 泛函 (7.3.21) 从 $\lambda > \rho_1$ 处至少分歧出 $2m$ 个极值点，即方程 (7.3.20) 至少有 $2m$ 个解. 这样，结论 (1) 被完全证明.

为了证明结论 (2) 和 (3), 将方程 (7.3.9) 约化到 $(u, \lambda) = (0, \rho_1)$ 附近的中心流形上，它们可写为

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_i(\lambda)x_i - \rho_1 \int_\Omega \alpha_3 u^3 e_{1i} dx, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{7.3.22}$$

其中 $\beta_1(\lambda) = \rho_1(\lambda - \rho_1), \{e_{11}, \cdots, e_{1m}\}$ 为对应于 ρ_1 的第一特征向量，以及

$$u = \sum_{i=1}^m x_i e_{1i} + h(x),$$
$$h(x) = o(|x|)\text{是中心流形函数}.$$

这样， (7.3.22) 能够进一步写成下面形式

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_1(\lambda)x_i - \alpha_3\rho_1 \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^m x_j e_{1j}\right)^3 e_{1i} dx + o(x^3). \tag{7.3.23}$$

令

$$g(x) = \left(\int_\Omega v^3 e_{11} dx, \cdots, \int_\Omega v^3 e_{1m} dx\right),$$
$$v = \sum_{j=1}^m x_j e_{1j}.$$

那么有

$$\langle g(x), x\rangle = \sum_{i=1}^m x_i \int_\Omega v^3 e_{1i} dx$$
$$= \int_\Omega v^4 dx$$

$$\geqslant C|x|^4, \quad \forall x \in R^m, \tag{7.3.24}$$

其中 $C>0$ 为某个常数.

由定理 5.11 和定理 6.20, 从 (7.3.23) 和 (7.3.24) 可推出结论 (2). 结论 (3) 也可从 (7.3.23) 和 (7.3.24) 导出. 定理证毕.

上面考虑了 $\alpha_2=0$ 的情况, 当 $\alpha_2\neq 0$ 时, 有下面的非连续型跃迁定理. 正是这种非连续型跃迁, 存在跳跃区域二元体中才能观察到不连续性的相变现象, 即前面所说的相凝聚突然形成的过程.

假设

$$\alpha_2\neq 0, \quad \alpha_3>0. \tag{7.3.25}$$

令 (7.3.15) 的第一特征值 ρ_1 有重数 $m\geqslant 1, \{e_1,\cdots,e_m\}$ 为第一特征向量. 引入下面二次型方程

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^k x_i x_j = 0, \quad 1\leqslant k\leqslant m, \\ \displaystyle a_{ij}^k = \int_\Omega e_i e_j e_k dx. \end{cases} \tag{7.3.26}$$

定理 7.4 在 (7.3.25) 条件下, 若 $x=0$ 是 (7.3.26) 的孤立奇点, 那么 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $(u,\lambda)=(0,\rho_1)$ 不是跳跃型就是混合型跃迁, 并且下面结论成立:

(1) 问题 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $\lambda=\rho_1$ 的每一侧都分歧出至少一个平衡解, 并且在 $\lambda<\rho_1$ 一边有一个鞍结分歧点 $(u_1,\lambda_1)\in H_1\times R^1, \lambda_1<\rho_1$.

(2) 当 ρ_1 为单特征值时, $u=0$ 的一个邻域 U 能够分解为两个扇形区域 $\bar U=\bar D_1(\pi)+\bar D_2(\pi)$, 使得 $D_1(\pi)$ 是跳跃区域, $D_2(\pi)$ 为稳定区域, 并且 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $D_2(\pi)$ 内分歧出一个奇点吸引子 $\Sigma_\lambda=\{u_\lambda\}$ 吸引 $D_2(\pi)$.

(3) 在 $D_2(\pi)$ 分歧出的吸引子 u_λ 可表达为

$$\begin{aligned} u_\lambda &= (\lambda-\rho_1)e_1/\alpha_2 a + o(|\lambda-\rho_1|), \\ a &= \int_\Omega e_1^3(x)dx. \end{aligned}$$

(4) 特别地, 对 $m=1$ 当 $|\alpha_2|=\varepsilon$ 比较小时, 定理 6.25 的结论 (1)~(4) 对 (7.3.9) 和 (7.3.10) 成立.

证明 结论 (2)~(4) 可由定理 6.10 和 6.25 直接推出. 我们将应用定理 6.13 来证明结论 (1).

由于 $x=0$ 是 (7.3.26) 的孤立零点, 故由 (4.4.27) 和 (4.4.28) 知, (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $\lambda<\rho_1$ 一侧一定分歧出一个非零指标的奇点分支 Γ_λ.

从 (7.3.17) 可以看到当 $\lambda < \rho_1$ 时，L_λ 的所有特征值 $\beta_k(\lambda) < 0, k = 1, 2, \cdots$. 我们知道，(7.3.9) 和 (7.3.10) 对任 $\lambda \in R^1$ 具有一个全局吸引子，因而分歧分支 Γ_λ 关于有界的 λ 是一致有界

$$\|u_\lambda\|_H < C, \quad \forall u_\lambda \in \Gamma_\lambda, \quad b < \lambda < a.$$

最后需要验证，存在 $\wedge < \rho_1$, 使对一切 $\lambda < \wedge$, 方程 (7.3.9) 和 (7.3.10) 没有非零奇点.

对 (7.3.9) 作能量估计可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [|\Delta u|^2 - \lambda|\nabla u|^2 + 3\alpha_3 u^2|\nabla u|^2 + 2\alpha_2 u|\nabla u|^2]dx \\
\geqslant &\int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2[-\lambda + 3\alpha_3 u^2 - 2|\alpha_2 u|]dx \\
\geqslant &\int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \left[-\lambda + \alpha_3 u^2 - \frac{\alpha_2^2}{2\alpha_3}\right] dx \\
> &0, \quad \forall \lambda < \wedge = -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_3} \quad 及 u \neq 0.
\end{aligned}$$

因此，当 $\lambda < \wedge$ 时 (7.3.9) 和 (7.3.10) 没有非零奇点. 这样，由定理 6.13 可得到结论 (1). 定理证毕.

现在，考虑 Ω 是一个方体的情况，即 $\Omega = [0, L]^n$. 此时，(7.3.15) 的第一特征值 $\rho_1 = \dfrac{\pi^2}{L^2}$ 及第一特征函数为

$$e_1 = \cos\frac{\pi x_1}{L}, \cdots, e_n = \cos\frac{\pi x_n}{L}.$$

定理 7.5 令 $\Omega = [0, L]^n$, 若 $\alpha_3 < \dfrac{2L^2}{9\pi^2}\alpha_2^2$, 那么问题 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在 $(u, \lambda) = \left(0, \dfrac{\pi^2}{L^2}\right)$ 是跳跃性的跃迁，如果 $\alpha_3 > \dfrac{26L^2}{27\pi^2}\alpha_2^2$, 则是连续性的跃迁，并且下面结论成立:

(1) 问题 (7.3.9) 和 (7.3.10) 从 $(u, \lambda) = \left(0, \dfrac{\pi^2}{L^2}\right)$ 分歧出一个吸引子 Σ_λ 同胚于 $n-1$ 维球面 S^{n-1}.

(2) 吸引子 Σ_λ 含有严格的 $3^n - 1$ 个稳态解，它们都是正则的. 当 $n = 3$ 时，$\Sigma_\lambda = S^2$, 并且 26 个奇点中只有 8 个是奇点吸引子，其结构如图 7.1 所示. 当 $n = 2$ 时 $\Sigma_\lambda = S^1$, 8 个奇点中有 4 个是吸引子其结构如图 7.2 所示. 当 $n = 1$ 时 $\Sigma_\lambda = \{u_1^\lambda, u_2^\lambda\}$ 为两个奇点吸引子.

证明 为了证明该定理，需要考虑中心流形约化，即具体解出中心流形函数. 因此将证明分为下面几步进行.

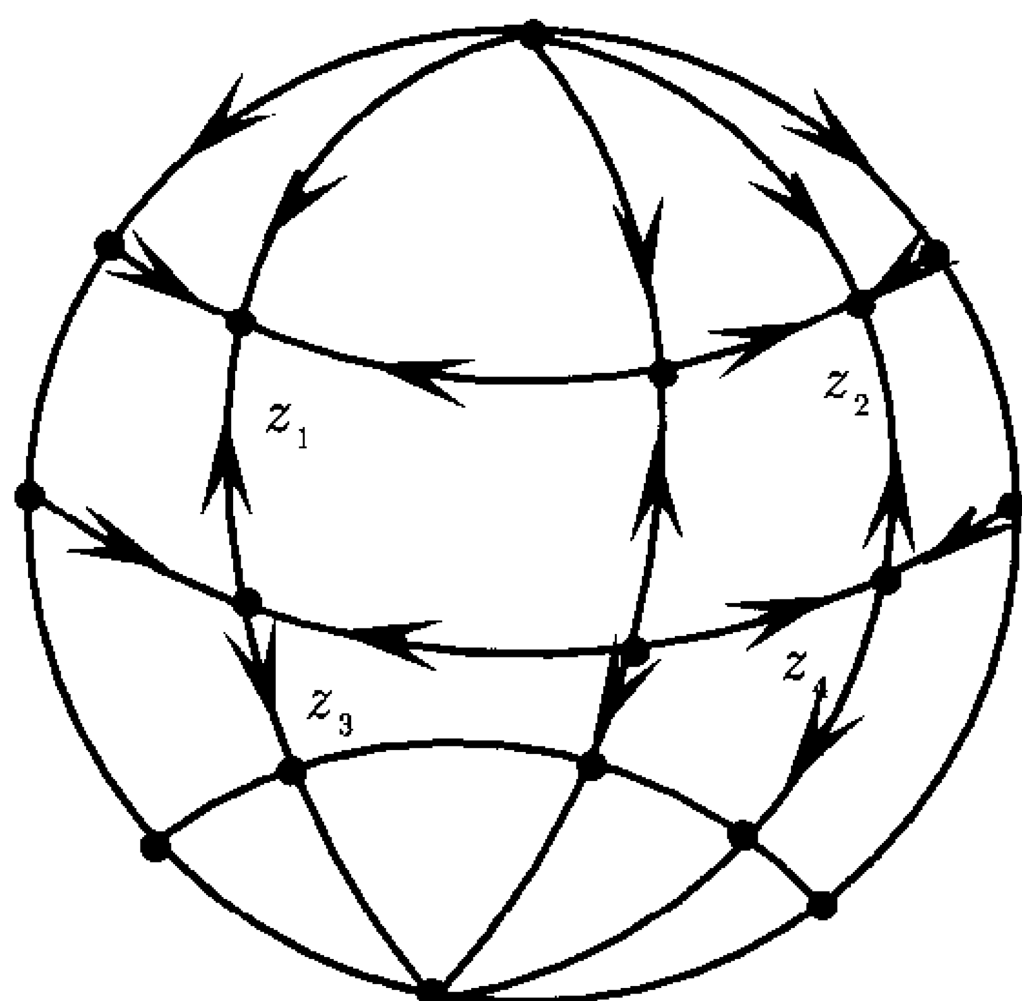


图 7.1 当 $n=3$ 时, $\Sigma_\lambda=S^2, \pm z_i (1\leqslant i\leqslant 4)$ 是吸引子

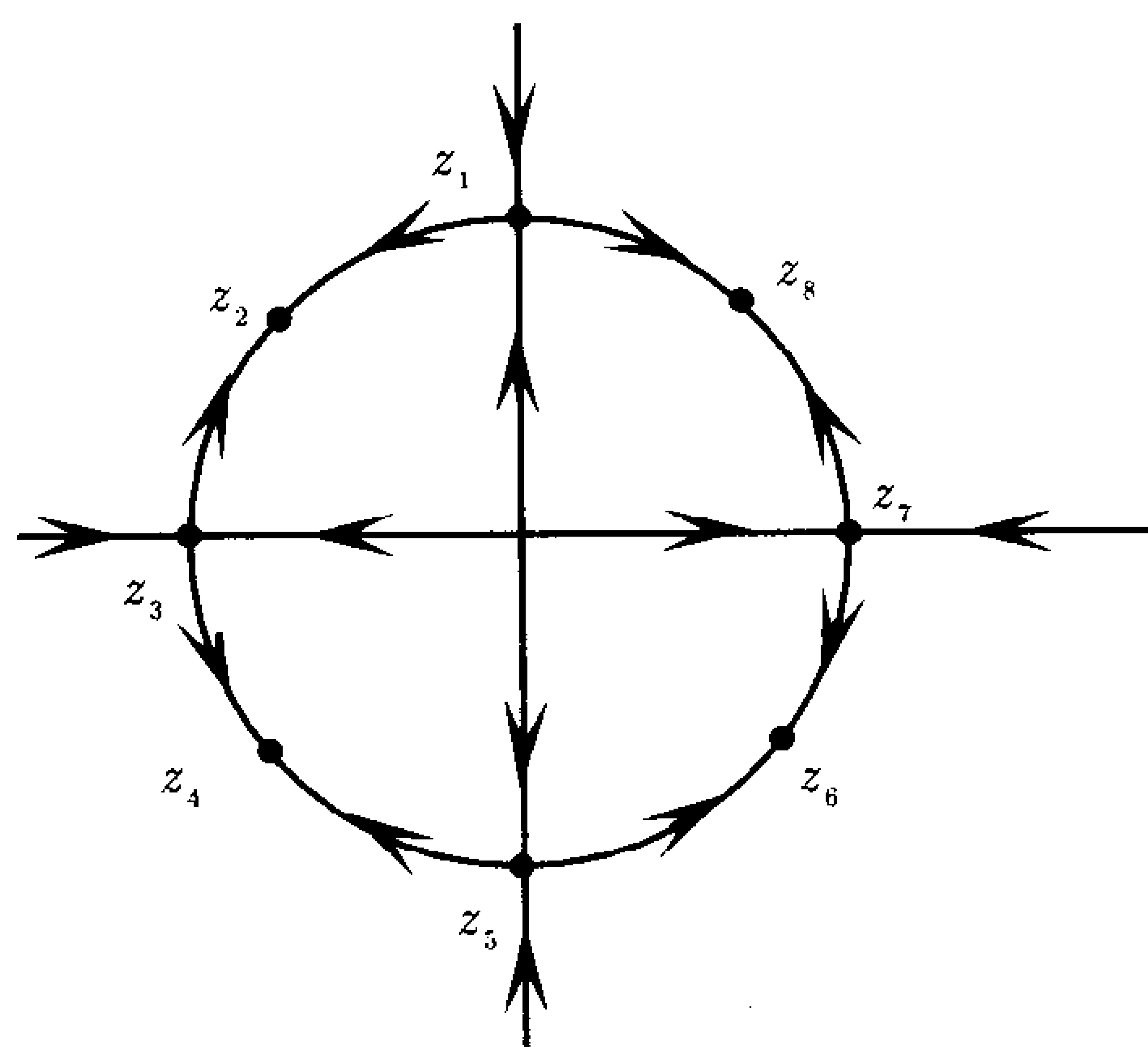


图 7.2 当 $n=2$ 时, $\Sigma_\lambda=S^1, z_{2k} (1\leqslant k\leqslant 4)$ 是吸引子

第一步. 考虑中心流形约化的二阶近似. 为此需要给出 $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 的所有特征值和特征函数如下

$$
\begin{aligned}
&\beta_k(\lambda)=|k|^2(\lambda-|k|^2),\\
&k=\frac{\pi}{L}(k_1,\cdots,k_n),\quad k_i\in N,\quad 1\leqslant i\leqslant n,\\
&|k|^2=\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{i=1}^n k_i^2,
\end{aligned}
$$

以及

$$e_k(x)=\cos\frac{k_1\pi x_1}{L}\cdots\cos\frac{k_n\pi x_n}{L}.$$

由 (6.1.13), 方程 (7.3.9) 在中心流形上约化的二阶近似方程由下式给出

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt}=\beta_1(\lambda)y+g(y)+o(|y|^3),\\
g(y)=\dfrac{2\pi^2}{L^{n+2}}(G_2(y)+G_3(y)+G_{23}(y)),
\end{cases}
\tag{7.3.27}
$$

其中 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n,\beta_1(\lambda)=\dfrac{\pi^2}{L^2}(\lambda-\pi^2/L^2)$, 以及

$$G_2(y)=-\alpha_2\left(\int_\Omega v^2e_1dx,\cdots,\int_\Omega v^2e_ndx\right),$$

$$G_3(y)=-\alpha_3\left(\int_\Omega v^3e_1dx,\cdots,\int_\Omega v^3e_ndx\right),$$

$$G_{23}(y)=-\alpha_2\left(\int_\Omega u^2e_1dx,\cdots,\int_\Omega u^2e_ndx\right),$$

其中

$$v=\sum_{i=1}^n y_ie_i,\quad e_i=\cos\pi x_i/L,$$

$$u=v+\Phi,\quad \Phi\text{为中心流形函数}.$$

通过直接计算可得

$$\int_\Omega v^2e_idx=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n y_j\cos x_j\right)^2\cos x_idx=0, \tag{7.3.28}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega v^3e_idx&=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n y_j\cos x_j\right)^3\cos x_idx\\&=\frac{3}{4}L^n\left(\frac{1}{2}y_i^3+y_i\sum_{k\neq i}y_k^2\right).\end{aligned} \tag{7.3.29}$$

下面计算 $G_{23}(y)$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2e_idx&=\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n y_je_j+\Phi\right)^2e_idx\\&=2\sum_{j=1}^n\int_\Omega y_j\Phi e_ie_jdx+o(|y|^3)\ (\text{由 (7.3.28) 和}\Phi(y)=o(|y|^2)).\end{aligned} \tag{7.3.30}$$

再由 (6.1.7)(即定理 6.1) 可得

$$\Phi=\sum_{|k|>\pi^2/L^2}^{\infty}y_k(y)e_k(x)+o(|y|^3)+o(|y|^3|\beta_1|), \tag{7.3.31}$$

$$\begin{aligned}y_k(y)&=\frac{\alpha_2}{-\beta_k\|e_k\|^2}\int_\Omega\Delta v^2\cdot e_kdx\\&=\frac{|k|^2\alpha_2}{\beta_k\|e_k\|^2}\int_\Omega v^2\cdot e_kdx\end{aligned}$$

$$
= \frac{|k|^2\alpha_2}{\beta_k\|e_k\|^2}\sum_{k,l=1}^{n}\int_\Omega y_k y_l e_k e_l e_k dx.
$$

注意到下面事实

$$
\int_\Omega \cos\frac{\pi x_k}{L}\cos\frac{\pi x_l}{L}e_k dx = 0, \quad 当 e_k \neq \cos\frac{\pi x_k}{L}\cos\frac{\pi x_l}{L}.
$$

因此从 (7.3.31) 可以得到

$$
\begin{aligned}
\Phi = &\sum_{k=1}^{n}\frac{2\alpha_2\cos\dfrac{2\pi x_k}{L}}{(\lambda-4\pi^2/L^2)L^n}y_k^2\int_\Omega\cos^2\frac{\pi x_k}{L}\cos\frac{2\pi x_k}{L}dx\\
&+\sum_{i\neq j}^{n}\frac{8\alpha_2\cos\dfrac{\pi x_i}{L}\cos\dfrac{\pi x_j}{L}}{(\lambda-2\pi^2/L^2)L^n}y_iy_j\int_\Omega\cos^2\frac{\pi x_i}{L}\cos^2\frac{\pi x_j}{L}dx\\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_2}{2(\lambda-4\pi^2/L^2)}y_k^2\cos 2\pi x_k/L\\
&+\sum_{i\neq j}^{n}\frac{2\alpha_2}{\lambda-2\pi^2/L^2}y_iy_j\cos\frac{\pi x_i}{L}\cos\frac{\pi x_j}{L}.
\end{aligned}
$$

将 Φ 代入 (7.3.30) 得到

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u^2 e_i dx = &\frac{\alpha_2}{\lambda-4\pi^2/L^2}y_i^3\int_\Omega\cos^2\frac{\pi x_i}{L}\cos\frac{2\pi x_i}{L}dx\\
&+\frac{4\alpha_2}{\lambda-2\pi^2/L^2}y_i\sum_{k\neq i}y_k^2\int_\Omega\cos^2\frac{\pi x_k}{L}\cos^2\frac{\pi x_i}{L}dx.
\end{aligned}
$$

直接计算得到

$$
\int_\Omega u^2 e_i dx = \frac{\alpha_2 L^n}{4}\left[\frac{y_i^3}{\lambda-4\pi^2/L^2}+\frac{4y_i}{\lambda-2\pi^2/L^2}\sum_{k\neq i}y_k^2\right]. \tag{7.3.32}
$$

将 (7.3.28),(7.3.29) 和 (7.3.32) 代入 (7.3.27), 则中心流形约化方程的二阶近似可写为如下形式

$$
\frac{dy_i}{dt} = \beta_1(\lambda)y_i - \frac{\pi^2}{2L^2}\left[\sigma_1 y_i^3 + \sigma_2 y_i\sum_{k\neq i}y_k^2\right] + o(|y|^3), \tag{7.3.33}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\sigma_1 = \dfrac{3}{2}\alpha_3 + \dfrac{\alpha_2^2}{\lambda-4\pi^2/L^2},\\
\sigma_2 = 3\alpha_3 + \dfrac{4\alpha_2^2}{\lambda-2\pi^2/L^2}.
\end{cases} \tag{7.3.34}
$$

第二步. 在临界值 $\lambda_0 = \pi^2/L^2$, 在 (7.3.34) 中的数为

$$\sigma_1^0 = \frac{3}{2}\alpha_3 - \frac{L^2\alpha_2^2}{3\pi^2},$$

$$\sigma_2^0 = 3\alpha_3 - \frac{4L^2\alpha_2^2}{\pi^2}.$$

由 (7.3.33) 可知, 在 (7.3.27) 中

$$g(y) = -\frac{\pi^2}{2L^2}\left(\sigma_1 y_1^3 + \sigma_2 y_1 \sum_{k\neq 1} y_k^2, \cdots, \sigma_1 y_n^3 + \sigma_2 y_n \sum_{k\neq n} y_k^2 \right).$$

因而有

$$\langle g(y), y\rangle = -\frac{\pi^2}{2L^2}\left(\sigma_1 \sum_{i=1}^n y_i^4 + 2\sigma_2 \sum_{i>j} y_i^2 y_j^2 \right).$$

显然, 如果

$$\sigma_1^0 < 0, \quad 即\alpha_3 < \frac{2L^2\alpha_2^2}{9\pi^2}, \quad 则\sigma_2^0 < 0.$$

此时

$$\langle g(y), y\rangle > \frac{\pi^2}{2L^2}|\sigma_1^0| \sum_{i=1}^n y_i^4.$$

由定理 6.8 知, 方程 (7.3.9) 在 $(u,\lambda) = (0, \pi^2/L^2)$ 是一个跳跃性的跃迁. 而当 σ_1^0 和 σ_2^0 满足

$$\sigma_1^0 > \begin{cases} 0, & 当\sigma_2^0 \geqslant 0, \\ -\sigma_2^0, & 当\sigma_2^0 < 0, \end{cases} \tag{7.3.35}$$

那么有

$$\langle g(y), y\rangle \leqslant -C\sum_{i=1}^n y_i^4, \quad 对某个C > 0.$$

很清楚条件 (7.3.35) 是等价于条件 $\alpha_3 > \dfrac{26}{27}\dfrac{L^2\alpha_2^2}{\pi^2}$. 由定理 5.1 可推得结论 (1). 特别地, 当 $n = 2$ 时, 由定理 5.11 可知分歧出的吸引子 $\Sigma_\lambda = S^1$.

第三步. 证明 Σ_λ 中奇点非退化性. 因为吸引子 Σ_λ 是在中心流形上, 因此 (7.3.33) 从 $(y,\lambda) = (0, \pi^2/L^2)$ 分歧出的奇点与方程 (7.3.9) 的分歧稳态解是一一对应. 并由定理 4.8 和注 4.5, 我们只需考虑 (7.3.33) 的定态方程

$$\beta_1(\lambda) y_i - \frac{\pi^2}{2L^2}\left[\sigma_1 y_i^3 + \sigma_2 y_i \sum_{k\neq i} y_k^2 \right] + o(|y|^3) = 0, 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{7.3.36}$$

考虑下面 (7.3.36) 的近似方程

$$\beta_1(\lambda) y_i - y_i\left(a_1 y_i^2 + a_2 \sum_{j\neq i} y_j^2 \right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{7.3.37}$$

其中 $a_1=\pi^2\sigma_1/2L^2, a_2=\pi^2\sigma_2/2L^2$. 很清楚, (7.3.37) 的每一个正则分歧解都对应 (7.3.36) 的一个正则分歧解.

首先将证明 (7.3.37) 有 3^n-1 个分歧解.

对每个 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$, 方程 (7.3.37) 有 $C_n^k\times 2^{n-k}$ 个解如下 ($C_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!$):

$$\begin{cases} y_{j_1}=0,\cdots,y_{j_k}=0, \quad 1\leqslant j_l\leqslant n, \\ y_{r_1}^2=\cdots=y_{r_{n-k}}^2=\beta_1(a_1+(n-k-1)a_2)^{-1}, \quad r_i\neq j_l. \end{cases} \tag{7.3.38}$$

因此, (7.3.37) 所有解的数目是

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\times 2^{n-k}=(2+1)^n-1=3^n-1.$$

下面要证明 (7.3.37) 的所有解都是正则的. (7.3.37) 向量场的 Jacobi 矩阵由下式给出

$$Dv=\begin{pmatrix} \beta_1-h_1(y) & 2a_2y_1y_2 & \cdots & 2a_2y_1y_n \\ 2a_2y_2y_1 & \beta_1-h_2(y) & \cdots & 2a_2y_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_2y_ny_1 & 2a_2y_ny_2 & \cdots & \beta_1-h_n(y) \end{pmatrix}, \tag{7.3.39}$$

其中

$$h_i(y)=3a_1y_i^2+a_2\sum_{j\neq i}y_j^2.$$

对 (7.3.38) 中任一个解, 不失一般性, 取

$$\begin{aligned} &y_0=(y_1^0,\cdots,y_n^0), \\ &y_i^0=0, \quad 1\leqslant i\leqslant k, \\ &y_{k+1}^0=\cdots=y_n^0=\beta_1^{\frac{1}{2}}(a_1+(n-k-1)a_2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

代入 (7.3.39) 可推出

$$Dv(y_0)=\begin{pmatrix} \beta I_k & 0 \\ 0 & A_{n-k} \end{pmatrix}, \tag{7.3.40}$$

$$\beta=\beta_1\left(1-\frac{(n-k)a_2}{a_1+(n-k-1)a_2}\right)=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\beta_1}{\sigma_1+(n-k-1)\sigma_2},$$

$$A_{n-k}=\begin{pmatrix}\beta_1-(3a_1+(n-k-1)a_2)(y_{k+1}^0)^2 & \cdots & 2a_2(y_{k+1}^0)^2\\ \vdots & & \vdots\\ 2a_2(y_{k+1}^0)^2 & \cdots & \beta_1-(3a_1+(n-k-1)a_2)(y_{k+1}^0)^2\end{pmatrix}.$$

显然，只有有限个 $\lambda>\pi^2/L^2$, 使得

$$\beta=\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\beta_1}{\sigma_1+(n-k-1)\sigma_2}=0,$$

$$\det A_{n-k}=\begin{vmatrix}-\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_2\\ \sigma_2 & -\sigma_1 & \cdots & \sigma_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_2 & \sigma_2 & \cdots & -\sigma_1\end{vmatrix}_{n-k}=0,$$

其中 σ_1 和 σ_2 由 (7.3.34) 给出.

因此，对所有 $\lambda-\pi^2/L^2>0$ 充分小，由 (7.3.39) 定义的矩阵在 (7.3.38) 的奇点处是非退化的.

第四步. 结论 (2) 证明的完成. 当 $n=2$ 时，由第二步可知 $\Sigma_\lambda=S^1$. 因为 Σ_λ 上 8 个奇点都是非退化的，由定理 5.5,$\Sigma_\lambda=S^1$ 上必有 4 个奇点是吸引子，4 个是排斥子. 当 $n=3$ 时，由于所有 Σ_λ 上 26 个奇点都是非退化的，并且 Σ_λ 分别限制在 x_ix_j 平面 $(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant 3)$ 上时，其所有奇点互相之间被它们的稳定流形与不稳定流形互为连结. 因而 Σ_λ 一定是同胚于一个球面 $\Sigma_\lambda=S^2$. 此外，通过一个直接计算可知这 26 个奇点中只有 8 个所有特征值是负的，因此为吸引子. 定理证毕.

§7.3.4 周期边界条件

考虑周期边界条件 Cahn-Hilliard 方程相变问题. 这种边界条件适合于二元体的几何形状是一环形或轮胎面的情况. 此时， $L_\lambda=-A+B_\lambda$ 的特征值 $\beta_k(\lambda)$ 和特征函数 e_k 分别由下面给出

$$\begin{cases}\beta_k(\lambda)=k^2(\lambda-k^2),\\ k^2=k_1^2+\cdots+k_n^2, k=(k_1,\cdots,k_n),\quad k_i\in N.\end{cases}$$

以及

$$\begin{cases}e_k^1=\cos(k_1x_1+\cdots+k_nx_n),\\ e_k^2=\sin(k_1x_1+\cdots+k_nx_n).\end{cases}$$

很清楚，L_λ 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)=\lambda-1$ 有重数 $2n$, 其第一特征函数为

$$e_j^1=\cos x_j,\quad e_j^2=\sin x_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

定理 7.6 对于周期边界条件 (7.3.11), 若 $\alpha_3<\dfrac{2}{9}\alpha_2^2$, 那么问题 (7.3.9) 和 (7.3.11) 在 $(u,\lambda)=(0,1)$ 将发生跳跃性的跃迁；若 $\alpha_3>\dfrac{26}{27}\alpha_2^2$, 则发生连续性跃迁，并且有下面结论：

(1) 问题 (7.3.9) 和 (7.3.11) 从 $(u,\lambda)=(0,1)$ 在 $\lambda>1$ 分歧出一个吸引子 Σ_λ 同调于 $2n-1$ 维球面 S^{2n-1}, 并且当 $n=1$ 时，$\Sigma_\lambda=S^1$ 由奇点构成.

(2) 对每个 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$, 吸引子 Σ_λ 含有 C_n^k 个 $(n-k)$ 维轮胎 T^{n-k}, 它们都是由奇点构成，$C_n^k=n\cdots(n-k+1)/k!$.

证明 记

$$\begin{cases} u=\displaystyle\sum_{k^2\geqslant 1}y_k\cos kx+z_k\sin kx,\\ kx=k_1x_1+\cdots+k_nx_n,\end{cases}$$

并且 $y_i=y_k,z_i=z_k$ 当 $k=(\sigma_{i1},\cdots,\sigma_{in})$.

正如 (7.3.33) 那样，对于 (7.3.9) 和 (7.3.11), 能够得到中心流形约化方程如下

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt}=(\lambda-1)y_i-y_i\left[\sigma_1y_i^2+\sigma_2z_i^2+\sigma_3\displaystyle\sum_{j\neq i}(z_j^2+y_j^2)\right]\\ \qquad +o(|y|^3,|z|^3)+O(|y|^3|\lambda-1|,|z|^3|\lambda-1|),\\ \dfrac{dz_i}{dt}=(\lambda-1)z_i-z_i\left[\sigma_1z_i^2+\sigma_2y_i^2+\sigma_3\displaystyle\sum_{j\neq i}(z_j^2+y_j^2)\right]\\ \qquad +o(|y|^3,|z|^3)+O(|y|^3|\lambda-1|,|z|^3|\lambda-1|),\end{cases}\tag{7.3.41}$$

对 $1\leqslant i\leqslant n$, 其中 $y=(y_1,\cdots,y_n),z=(z_1,\cdots,z_n)$, 以及

$$\sigma_1=\frac{3}{4}\alpha_3+\frac{1}{2(\lambda-4)}\alpha_2^2,$$
$$\sigma_2=\frac{3}{4}\alpha_3+\frac{1}{2(\lambda-4)}\alpha_2^2,$$
$$\sigma_3=\frac{3}{2}\alpha_3+\frac{1}{\lambda-2}\alpha_2^2.$$

在临界值 $\lambda=1$ 处，$\sigma_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 为

$$\begin{cases} \sigma_1^0=\dfrac{3}{4}\alpha_3-\dfrac{1}{6}\alpha_2^2,\\ \sigma_2^0=\dfrac{3}{2}\alpha_3-\dfrac{1}{6}\alpha_2^2,\\ \sigma_3^0=\dfrac{3}{2}\alpha_3-\alpha_2^2.\end{cases}\tag{7.3.42}$$

类似于定理 7.5 的证明，从 (7.3.42) 可推得该定理中结论 (2) 外的其他结论.

因为所有偶函数空间是 $L_\lambda + G$ 的不变子空间，对于函数

$$u = \sum_{k^2 \geqslant 1} y_k \cos kx,$$

可以求解 (7.3.41) 的奇点与 (7.3.37) 基本上是一样的. 因此 (7.3.9) 和 (7.3.11) 在 H_1 的偶函数子空间中具有像问题 (7.3.9) 和 (7.3.10) 关于 $\Omega = [0,\pi]^n$ 一样的奇点.

因为问题 (7.3.9) 和 (7.3.10) 在下面平移变换下是不变的

$$x \to x + \theta, \quad \forall \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in R^n,$$

所以对每个 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 及一个给定指数 $(j_1, \cdots, j_k)$, 这个与 (7.3.38) 相关联的 (7.3.9) 和 (7.3.11) 的稳态解生成一个 $(n-k)$ 维的轮胎面 T^{n-k}, 其上所有点仍是 (7.3.9) 和 (7.3.11) 的奇点. 例如，若 $(j_1, \cdots, j_k) = (1, \cdots, k)$, 则相应的奇性轮胎 T^{n-k} 为

$$T^{n-k} = \left\{ u(x+\theta) = \sum_{j=k+1}^{n} y_j \cos(x_i + \theta) + o(|y|) \in H_1 | \forall \theta = (\theta_{k+1}, \cdots, \theta_n) \in R^{n-k} \right\},$$

其中 $u(x)$ 就是 (7.3.9) 和 (7.3.11) 与 (7.3.37) 中 $y_1 = \cdots = y_k = 0, y_{k+1} = \cdots = y_n$ 相关联的稳态解.

显然, 对一个给定的 $(j_1, \cdots, j_k)$,(7.3.9) 和 (7.3.11) 与 (7.3.38) 相关联的 2^{n-k} 个稳态解都是在同一个生成出的奇性轮胎 T^{n-k} 上. 进一步，对于两个不同的 k 重指数 $(j_1, \cdots, j_k)$ 和 $(i_1, \cdots, i_k)$ ，其生成的两个 $n-k$ 维轮胎是不相同的. 因此，对每个 $k(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, 有严格的 C_n^k 个 $n-k$ 维奇性轮胎从 $(u, \lambda) = (0, 1)$ 分歧出来. 定理证毕.

§7.3.5 物理意义评述

在二元体相分离问题中， $\Omega = [0, L]^n$ 是一个边长为 L 的正方体情况具有典型意义. 我们将对定理 7.5 就物理方面进行评述.

在上一节关于 Belousov-Zhabotinsky 化学反应的非平衡相变的讨论中我们已经看到，相变的临界温度与容器的几何形状和尺寸有关. 由定理 7.5, 一个二元体不仅相变的临界温度，而且相变的方式都与容器几何形状与尺寸有关. 看来所有相变都与所涉及对象的几何尺寸有关，这是一个普遍性的规律.

首先来考察临界温度 T_C. 在 Cahn-Hilliard 方程中有两个不同的临界温度. 第一种是使参数 λ 变号的临界温度 T_1, 如 (7.3.12) 所定义. 在 T_1 处二元体并不发生相分离. 而由定理 7.5 我们看到具有下面性质的 T_C 是使二元体发生相变的

临界温度

$$\lambda(T)\begin{cases} <\pi^2/L^2, & T>T_C, \\ =\pi^2/L^2, & T=T_C, \\ >\pi^2/L^2, & T<T_C. \end{cases} \tag{7.3.43}$$

从 (7.3.12) 和 (7.3.43) 对比可以看到

$$T_C<T_1,\quad 并且 T_C\to T_1,\quad 当 L\to\infty.$$

而且二元体的几何尺寸越大，发生相分离的临界温度越高.

再来考察二元体相分离的方式. 前面提到，实验中观察到二种相变模式：第一种是突然发生的相凝聚，第二种是相凝聚的逐渐形成. 这两种方式分别由定理 7.5 中两种跃迁方式所描述：跳跃式的跃迁对应着第一种突发式的相凝聚，连续型的跃迁对应着第二种相凝聚. 在 Cahn-Hilliard 方程中两个系数 α_2 和 α_3 应该与二元体几何形状无关. 而在定理 7.5 中，当

$$\alpha_3<\frac{2L^2}{9\pi^2}\alpha_2^2$$

时，二元体将发生突发式的相分离. 而当

$$\alpha_3>\frac{26L^2}{27\pi^2}\alpha_2^2$$

时，二元体将是逐渐长大的相凝聚. 从这可以看到，二元体的几何尺寸 L 越大就越有利于突变式的相凝聚，越小就越有利于逐渐式的相凝聚.

现在来分析连续型相变图形结构的对称性. 为了简单，只讨论 $n=2$ 的情况，此时分歧吸引子 Σ_λ 中含有 8 个奇点，在第一特征空间上 (中心流形的投影)，它们可具体表达为 (由 (7.3.38))

$$\begin{aligned} &z_1=y_0e_1, && z_2=y_1e_1+y_1e_2, \\ &z_3=y_0e_2, && z_4=-y_1e_1+y_1e_2, \\ &z_5=-y_0e_1, && z_6=-y_1e_1-y_1e_2, \\ &z_7=-y_0e_2, && z_8=y_1e_1-y_1e_2, \end{aligned}$$

其中 $(e_1,e_2)=(\cos\pi x_1/L,\cos\pi x_2/L)$ 是作为 R^2 的一个正交基， y_0 和 y_1 为

$$y_0=(\beta_1(\lambda)/\sigma_1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2(\lambda-\pi^2/L^2)}/\sqrt{\sigma_1},$$

$$y_1=(\beta_1(\lambda)/\sigma_1+\sigma_2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2(\lambda-\pi^2/L^2)}/\sqrt{\sigma_1+\sigma_2}.$$

这 8 个奇点在 R^2 中形成一个八边形 (如图 7.3 所示). 从理论上，这 8 个奇点都可以作为二元体相变的平衡态，但是由定理 7.5，它们中间只有 4 个是稳定的. 从图

形结构上看，z_1, z_3, z_5, z_7 属于同一类，z_2, z_4, z_6, z_8 属于另一类. 从图 7.3 可以看到，在相位上它们相差 45° 角，而在图形结构上它们也是相差 45° 角. 这些平衡态的图形结构是以 $z_i = 0(1 \leqslant i \leqslant 8)$ 的轴线为特征. $z_1 = -z_5 = y_0 \cos \frac{\pi x_1}{L} = 0$

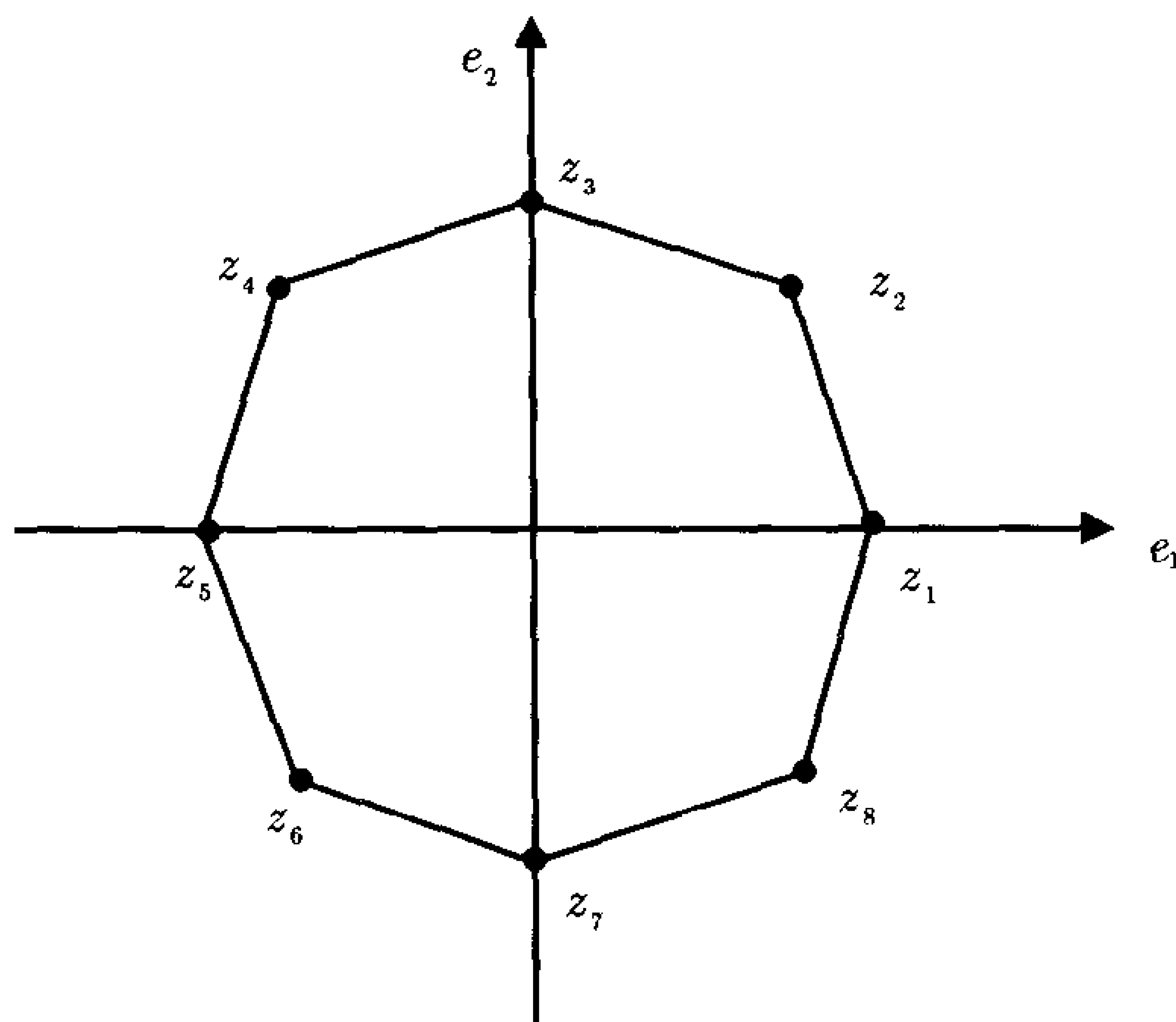


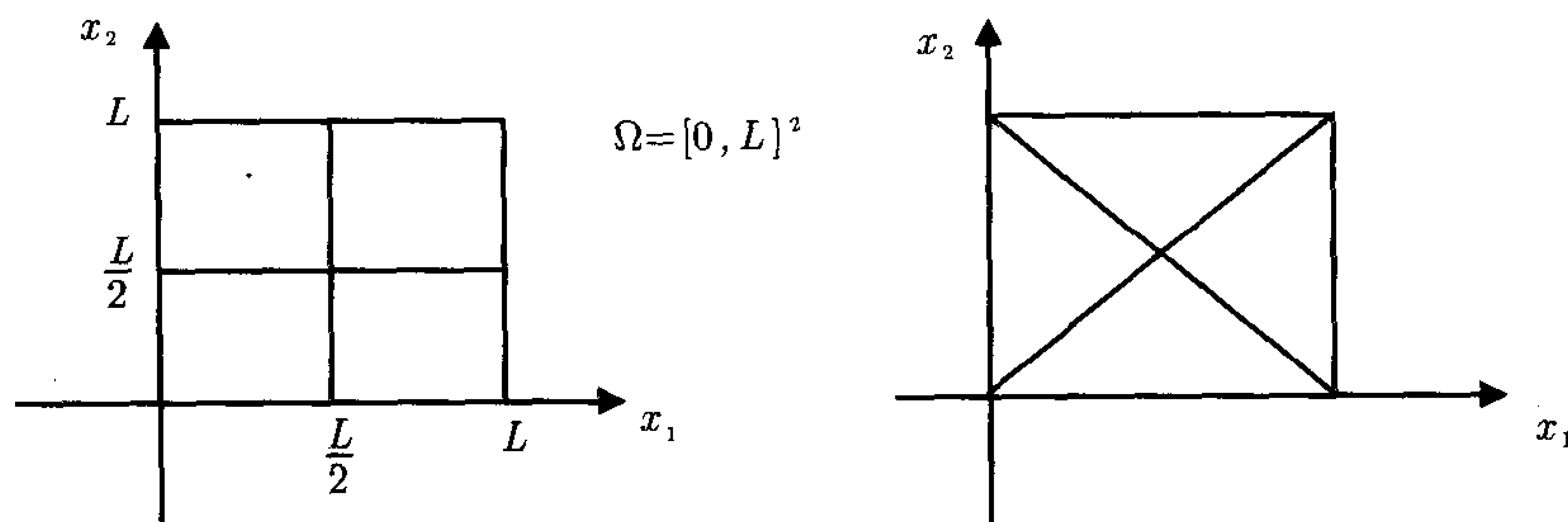
图 7.3

及 $z_3 = -z_7 = y_0 \cos \frac{\pi x_2}{L} = 0$ 的零点轴线分别为 $x_1 = \frac{L}{2}$ 和 $x_2 = \frac{L}{2}$, 如图 7.4(a) 所示. 而 $z_2 = -z_6 = 0$ 和 $z_4 = -z_8 = 0$ 的零轴线为正方形 $\Omega = [0, L]^2$ 的对角线，如图 7.4(b) 所示. 从动力学角度，或者 z_{2k+1} 类是稳定的，或者 z_{2k} 类是稳定的. 由 (7.3.40) 可以看到下面性质:

$$z_{2k+1}(k = 0, 1, 2, 3)\text{是稳定的，}\quad \text{当}\sigma_1 - \sigma_2 < 0,$$

$$z_{2k}(k = 1, 2, 3, 4)\text{是稳定的，}\quad \text{当}\sigma_1 - \sigma_2 > 0.$$

这里 σ_1, σ_2 由 (7.3.34) 给出. 因此哪一类是稳定的仍然与 Ω 的尺寸 L 有关，当然也与二元体材料有关，即与 α_2 和 α_3 有关.



(a) $z_{2k+1}(0 \leqslant k \leqslant 3)$类的图形结构是以零轴线为对边线为特征的.

(b) $z_{2k}(1 \leqslant k \leqslant 4)$类的图形结构是以零轴线为对角线为特征的.

图 7.4

最后，我们来讨论 Ω 为一般区域情况. 当 Ω 为非对称区域时，(7.3.15) 的第一特征值是单重的，并且一般

$$\int_\Omega e^3(x)dx \neq 0.$$

在 (7.3.25) 条件下 (该条件具有一般性意义), 定理 7.4 说明该二元体的相变是混合型的，并且有一个鞍结点分歧. 在这种情况下，一般观察不到连续性的相变. 这是因为当 $T > T_C$ 并且 $T \to T_C$ 时， $u = 0$(代表均匀态 $u = u_0$) 虽然是稳定的, 但是其稳定区域非常小, 一个很小的涨落就可使 (7.3.9) 的初值 φ 落到 $u = 0$ 的稳定区域之外，从而使二元体发生一个突然的相变. 而连续性的相变必须是在 $T_C < T$ 时才能发生. 这就是说，现实中在 $T \geqslant T_C$ 时突变式的相变已经发生了，它很难给连续性相变发生的机会，除非实验上施加一些条件强制做到这一点.

我们注意到，定理 7.4 结论 (3) 表明在混合型跃迁中，连续性相变的相变指数 $\beta = 1$, 即

$$u_\lambda \sim |\lambda - \rho_1|^\beta \propto \frac{|T - T_C|^\beta}{T_C}.$$

而在非混合型中的连续性相变中 (如定理 7.3 和 7.5), 相变指数 $\beta = \frac{1}{2}$. 在物理实验中 $\beta = \frac{1}{2}$ 更接近实际. 这说明 $\beta = 1$ 的情况，或混合跃迁中的连续性相变从来没有被观察到.

需要说明一点， Cahn-Hilliard 方程是从平均场理论导出的. 而平均场理论关于 β 的预言值为 $\beta = \frac{1}{2}$. 此外，从数学上不难推出，只要 Ω 是一个矩形体，则相变指数一定是 $\beta = \frac{1}{2}$.

§7.4 Kuramoto-Sivashinsky 方程

§7.4.1 数学框架

Kuramoto-Sivashinsky 方程是作为时空增长不稳定性的振幅方程出现在几个物理现象中，如燃烧火焰前阵波传播 [90] 、反应扩散问题 [40] 等.

一维空间上的原始 Kuramoto-Sivashinsky 方程是由下式给出

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mu\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{7.4.1}$$

对方程 (7.4.1) 关于 x 求导，并配以周期边界条件，则得到常见的形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\mu\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ u(x+2k\pi)=u(x), k\text{为整数}, \\ u(x,0)=\varphi(x), \end{cases} \tag{7.4.2}$$

其中 $\mu>0$ 为一常数. 方程 (7.4.2) 再补充下面自然约束条件

$$\int_0^{2\pi} u(x,t)dx=0. \tag{7.4.3}$$

条件 (7.4.3) 意味着在 u 的 Fourier 展开中没有常数项. 我们建立如下空间

$$H_1=\left\{u\in H^4(0,2\pi)\left|\int_0^{2\pi}udx=0,\quad u(x+2k\pi)=u(x)\right.\right\},$$

$$H=\left\{u\in L^2(0,2\pi)\left|\int_0^{2\pi}udx=0\right.\right\}.$$

定义算子 $L_\lambda=-A+\lambda B$ 和 $G(\cdot,\lambda):H_1\to H$ 如下

$$Au=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\quad Bu=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad G(u,\lambda)=-\lambda u\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{7.4.4}$$

于是，问题 (7.4.2) 和 (7.4.3) 可写为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau}=L_\lambda u+G(u,\lambda), \\ u(0)=\varphi, \end{cases} \tag{7.4.5}$$

其中 $\lambda=\mu^{-1},\tau=\mu t$.

§7.4.2 S^1吸引子

下面是关于 (7.4.2) 和 (7.4.3) 的 S^1 吸引子分歧定理.

定理 7.7 Kuramoto-Sivashinsky 方程 (7.4.2) 及约束条件 (7.4.3) 从 $(u,\lambda)=(0,1)$ 在 $\lambda>1$ 分歧出一个吸引子 $\Sigma_\lambda=S^1$, 它吸引 H/Γ, 这里 Γ 为 $u=0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2. 进一步, $\Sigma_\lambda=S^1$ 是由奇点构成.

证明 由 (7.4.4) 定义的线性算子 $L_\lambda=-A+\lambda B:H_1\to H$ 的特征值和特征向量为

$$\beta_{2n-1}(\lambda)=\beta_{2n}(\lambda)=n^2(\lambda-n^2), \tag{7.4.6}$$

$$e_{2n-1}(x)=\sin nx,\quad e_{2n}(x)=\cos nx, \tag{7.4.7}$$

对任何 $n\geqslant 1$.

这些特征值满足 $\lambda_0 = 1, m = 2$ 的条件 (6.2.1) 和 (6.2.2). 此外，容易看出，由 (7.4.4) 定义的算子 $L_\lambda = -A + \lambda B$ 和 $G(\cdot,\lambda)$ 满足条件 (6.0.2) 和 (6.0.3). 此外注意到 G 满足

$$\langle G(u,\lambda), u\rangle_H = 0, \quad \forall u \in H_1.$$

因而由定理 3.11 和 6.1 可知问题 (7.4.2) 和 (7.4.3) 从 $(u,\lambda) = (0,1)$ 在 $\lambda > 1$ 分歧出一个吸引子 Σ_λ 同调于 S^1, 并吸引 H/Γ. 下面将证明 $\Sigma_\lambda = S^1$ 并由奇点构成.

(7.4.5) 到中心流形的约化方程为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (\lambda-1)x_1 + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(u,\lambda)\sin x dx, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\lambda-1)x_2 + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(u,\lambda)\cos x dx, \end{cases} \tag{7.4.8}$$

其中 $u = x_1 \sin x + x_2 \cos x + \Phi(x_1,x_2), \Phi(x_1,x_2)$ 是中心流形函数.

$G(u,\lambda)$ 是二重线性算子，并且由直接计算可以看到

$$\langle G(x_1e_1 + x_2e_2,\lambda), e_j\rangle_H = 0, \quad j = 1,2,$$

这里 $e_1 = \sin x_1, e_2 = \cos x_1$. 因而 (7.4.8) 的二阶近似方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = (\lambda-1)x_i &+ \frac{x_1}{\pi}\int_0^{2\pi} \langle G(e_1,\Phi) + G(\Phi,e_1), e_i\rangle_H dx \\ &+ \frac{x_2}{\pi}\int_0^{2\pi} \langle G(e_2,\Phi) + G(\Phi,e_2), e_i\rangle_H dx, \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

对 $i = 1,2$. 由中心流形函数 (6.1.7) 和 (6.1.8),

$$\Phi = \sum_{n=3}^{\infty} y_n(x_1,x_2)e_n + O(|x|^4, |x|^3|\beta_1(\lambda)|), \tag{7.4.10}$$

其中 e_n 由 (7.4.7) 给出， $x = (x_1,x_2)$ 及

$$y_n = -\frac{1}{\beta_n(\lambda)\pi}\int_0^{2\pi} v\frac{\partial v}{\partial x}e_n dx,$$
$$v = x_1 \sin x + x_2 \cos x.$$

将 (7.4.10) 代入 (7.4.9) 得到

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (\lambda-1)x_1 + \displaystyle\sum_{i,j,l=1}^{2} a_{ijl}^1 x_i x_j x_l + O(|x|^4, |x|^3|\beta_1|), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (\lambda-1)x_2 + \displaystyle\sum_{i,j,l=1}^{2} a_{ijl}^2 x_i x_j x_l + O(|x|^4, |x|^3|\beta_1|), \end{cases} \tag{7.4.11}$$

其中

$$a_{ijl}^k=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{-\beta_n\pi^2}\langle G(e_j,e_l,\lambda),e_n\rangle_H \times\langle G(e_i,e_n,\lambda)+G(e_n,e_i,\lambda),e_k\rangle_H.$$

这里 $\beta_n(\lambda)$ 由 (7.4.6) 给出. 由

$$\langle G(e_i,e_j,\lambda),e_k\rangle_H=-\lambda\int_0^{2\pi}e_i\frac{\partial e_j}{\partial x}e_kdx,$$

得

$$\begin{aligned}&a_{111}^1=\frac{\lambda^2}{4\beta_3(\lambda)},a_{222}^1=0,\\&a_{112}^1+a_{121}^1+a_{211}^1=0,\\&a_{122}^1+a_{212}^1+a_{221}^1=\frac{\lambda^2}{4\beta_3},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&a_{111}^2=0,a_{222}^2=\frac{\lambda^2}{4\beta_3},\\&a_{112}^2+a_{121}^2+a_{211}^2=\frac{\lambda^2}{4\beta_3},\\&a_{122}^2+a_{212}^2+a_{221}^2=0.\end{aligned}$$

这样, 方程 (7.4.11) 可表达为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=(\lambda-1)x_1+\dfrac{\lambda^2}{4\beta_3}(x_1^3+x_1x_2^2)+O(|x|^4,|x|^3|\beta_1|),\\\dfrac{dx_2}{dt}=(\lambda-1)x_2+\dfrac{\lambda^2}{4\beta_3}(x_2x_1^2+x_2^3)+O(|x|^4,|x|^3|\beta_1|),\end{cases}\tag{7.4.12}$$

这里在 $\lambda=1$ 附近 $\beta_3(\lambda)=-4(4-\lambda)<0$.

根据定理 5.11, 从 (7.4.12) 可推知 (7.4.2) 从 $(u,\lambda)=(0,1)$ 分歧出的吸引子 Σ_λ 是同胚于一个圆圈, 即 $\Sigma_\lambda=S^1$.

最后证明 Σ_λ 是由奇点构成.

令 $\widetilde{H}\subset H$ 和 $\widetilde{H}_1\subset H_1$ 是由奇函数构成的子空间

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}=\{u\in H|u(-x)=-u(x)\},\\&\widetilde{H}_1=\{u\in H_1|u(-x)=-u(x)\}.\end{aligned}$$

容易验证, 由 (7.4.4) 定义的算子 $L_\lambda+G$ 在 $\widetilde{H}$ 上是不变的, 即

$$L_\lambda+G:\widetilde{H}_1\to\widetilde{H}.$$

另外，L_λ 限制在 $\widetilde{H}$ 上其特征值和特征向量为

$$\beta_k(\lambda)=k^2(\lambda-k^2),\quad k=1,2,\cdots,$$

$$e_k(x)=\sin kx.$$

因而 $\beta_1(\lambda)$ 是一个单特征值. 这表明 $L_\lambda+G$ 从 $(u,\lambda)=(0,1)$ 在 $\lambda>1$ 分歧出一个奇点

$$u_\lambda=\alpha(\lambda)\sin x+h(x,\alpha),h(x,\alpha)=o(|\alpha|).$$

因为 (7.4.2) 和 (7.4.3) 关于 x 平移不变：

$$u(x,t)\to u(x+\theta,t).$$

下面函数

$$u_\lambda(x+\theta)=\alpha(\lambda)\sin(x+\theta)+h(x+\theta,\alpha),\quad \theta\in R^1$$

也是 (7.4.2) 和 (7.4.3) 的稳态解，并且下面集合

$$\Gamma=\{\alpha(\lambda)\sin(x+\theta)+h(x+\theta,\alpha)|-\infty<\theta<\infty\}$$

是 H 中的一个圆圈 S^1. 因此 $\Sigma_\lambda=\Gamma$. 定理证毕.

用同样方法可以证明当 λ 穿过第 n 个临界值 n^2 时，(7.4.2) 和 (7.4.3) 分歧出一个由奇点构成的 S^1 不变集.

定理 7.8 问题 (7.4.2) 和 (7.4.3) 从 $(u,\lambda)=(0,n^2)$ 在 $\lambda>n^2$ 分歧出一个 S^1 不变集：$\Sigma_\lambda=S^1$, 并且 Σ_λ 是由 (7.4.2) 和 (7.4.3) 的稳态解构成.

§7.5　复 Ginzburg-Landau 方程

§7.5.1　数学问题

复 Ginzburg-Landau 方程是作为控制波的不稳定性的振幅方程出现在流体动力学模型中. 例如，它在 Poiseuille 流的研究中，在 Rayleigh-Benard 对流以及 Taylor-Couette 流的非线性增长方面都能被发现. 这个方程也出现在由反应扩散方程控制的化学系统研究中. 该方程写成如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=(\alpha+i\beta)\Delta u+\lambda u-(\sigma+i\rho)|u|^2u,\\ u(x,0)=\varphi+i\psi,\end{cases}\tag{7.5.1}$$

其中未知函数 $u:\Omega\times[0,\infty)\to C$ 是一个复值函数，$\Omega\subset R^n(1\leqslant n\leqslant 3)$ 是一个有界区域．参数 α,β,σ,ρ 和 λ 为实数

$$\alpha>0,\quad \sigma>0.$$

方程 (7.5.1) 配有两种物理合理的边界条件：Dirichlet 边界条件

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{7.5.2}$$

或者周期边界条件

$$\Omega=[0,2\pi]^n \quad 及u是\Omega周期的. \tag{7.5.3}$$

对于边界条件 (7.5.2), 建立

$$H=L^2(\Omega,C),$$

$$H_1=H^2(\Omega,C)\cap H_0^1(\Omega,C),$$

对于边界条件 (7.5.3), 建立

$$H=\{u\in L^2(\Omega,C)|u满足(7.5.3)\},$$
$$H_1=\{u\in H^2(\Omega,C)|u满足(7.5.3)\},$$

那里

$$L^2(\Omega,C)=\{u_1+iu_2|u_1,u_2\in L^2(\Omega)\},$$
$$H^k(\Omega,C)=\{u_1+iu_2|u_1,u_2\in H^k(\Omega)\}$$

与复 Ginzbarg-Landau 方程 (7.5.1) 相关的算子定义为

$$L_\lambda+G=-A+B_\lambda+G:H_1\to H, \tag{7.5.4}$$

其中

$$\begin{cases}-Au=(\alpha+i\beta)\Delta u,\\ B_\lambda u=\lambda u,\\ Gu=-(\sigma+i\rho)|u|^2u.\end{cases} \tag{7.5.5}$$

我们知道，由 (7.5.5) 定义的算子 $L_\lambda+G$ 满足 (6.0.2) 和 (6.0.3)．下面讨论 (7.5.1) 的 S^1 吸引子分歧．

§7.5.2 Dirichlet 边界条件

令 λ_k 是 Δ 关于 Dirichlet 边界条件的第 k 个特征值. 下面给出复 Ginzburg-Landau 方程在 Dirichlet 边界条件下的 S^1 吸引子及球面不变集的分歧定理.

定理 7.9 对于问题 (7.5.1) 和 (7.5.2), 下面结论成立:

(1) 当 $\lambda < \alpha\lambda_1$ 时, $u = 0$ 是 (7.5.1) 和 (7.5.2) 的全局渐近稳定的平衡点;

(2) 问题 (7.5.1) 和 (7.5.2) 从 $(u, \lambda) = (0, \alpha\lambda_1)$ 分歧出一个吸引子 $\Sigma_\lambda = S^1$, 它吸引 $H/\Gamma, \Gamma$ 是 $u = 0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2;

(3) 当 $\beta^2 + \rho^2 \neq 0$ 时, 吸引子 Σ_λ 是一个周期轨道, 而当 $\beta = \rho = 0$ 时, $\Sigma_\lambda = S^1$ 由 (7.5.1) 和 (7.5.2) 的稳态解构成;

(4) 若 λ_k 有重数 $m \geqslant 1$, 那么问题 (7.5.1) 和 (7.5.2) 从 $(u, \lambda) = (0, \alpha\lambda_k)$ 在 $\lambda > \alpha\lambda_k$ 分歧出一个 $2m - 1$ 维不变球面 $\Sigma_\lambda = S^{2m-1}$. 进一步, 若 $\beta + \rho^2 \neq 0$, 那么 $\Sigma_\lambda = S^{2m-1}$ 中没有奇点.

证明 分几步进行证明.

第一步. 令 $u = u_1 + iu_2$. 那么 Ginzburg-Landau 问题 (7.5.1) 和 (7.5.2) 等价地可以写成如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \alpha\Delta u_1 - \beta\Delta u_2 + \lambda u_1 - \sigma|u|^2 u_1 + \rho|u|^2 u_2, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \beta\Delta u_1 + \alpha\Delta u_2 + \lambda u_2 - \sigma|u|^2 u_2 - \rho|u|^2|u|, \\ u_1|_{\partial\Omega} = 0, u_2|_{\partial\Omega} = 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi, u_2(x, 0) = \psi. \end{cases} \tag{7.5.6}$$

我们将应用定理 6.2, 5.11 和 5.13 证明该定理.

由 (7.5.4) 给出的算子 $L_\lambda + G = -A + B_\lambda + G$ 可改写为

$$-Au = \begin{pmatrix} \alpha\Delta u_1 - \beta\Delta u_2 \\ \beta\Delta u_2 + \alpha\Delta u_1 \end{pmatrix},$$

$$B_\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$Gu = \begin{pmatrix} -\sigma|u|^2 u_1 + \rho|u|^2 u_2 \\ -\sigma|u|^2 u_2 - \rho|u|^2 u_1 \end{pmatrix}.$$

我们知道 $H_{\frac{1}{2}} = H_0^1(\Omega, C)$, 因此 $G\ A\# : H_{\frac{1}{2}} \to H$ 是 C^∞ 的.

$L_\lambda = -A + B_\lambda$ 的特征值为

$$(\lambda - \alpha\lambda_k) \pm i\beta\lambda_k, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{7.5.7}$$

显然 (7.5.7) 满足 $\lambda_0 = \alpha\lambda_1, m = 2$ 的条件 (6.2.1) 和 (6.2.2)

在 $\lambda = \alpha\lambda_1$, 从 (7.5.6) 可以推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx &= -\int_\Omega [\alpha|\nabla u|^2 - \alpha\lambda_1|u|^2 + \sigma|u|^4] \\ &\leqslant \sigma\int_\Omega |u|^4 dx.\end{aligned}$$

这意味着 $u = 0$ 是 (7.5.6) 在 $\lambda = \alpha\lambda_1$ 的全局渐近稳定平衡点. 这样, 由定理 6.2 知道 (7.5.6) 从 $(u,\lambda) = (0,\alpha\lambda_1)$ 分歧出一个吸引子 Σ_λ 同调于 S^1 并吸收 H/Γ.

第二步. 将证明 (7.5.6) 从 $(u,\lambda) = (0,\alpha\lambda_k)$ 分歧出一个 $2m-1$ 维不变球 $\Sigma_\lambda^k = S^{2m-1}, \forall k \geqslant 1$.

令 $\{\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_m\}$ 是对应于 λ_k 的特征函数. 则关于 $v = (v_1, v_2)$,

$$v_1 = \sum_{i=1}^m x_1\widetilde{e}_i, \quad v_2 = \sum_{i=1}^m y_i\widetilde{e}_i,$$

能够得到 (7.5.6) 在中心流形约化的一阶近似为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt} = (\lambda - \alpha\lambda_k)x_i + \beta y_i + [-\sigma\displaystyle\int_\Omega |v|^2 v_1\widetilde{e}_i dx \\ \qquad + \rho\rho\displaystyle\int_\Omega |v|^2 v_2\widetilde{e}_i dx] + o(|x|^3, |y|^3), \\ \dfrac{dy_i}{dt} = (\lambda - \alpha\lambda_k)y_i - \beta x_i + [-\sigma\displaystyle\int_\Omega |v|^2 v_2\widetilde{e}_i dx \\ \qquad - \rho\displaystyle\int_\Omega |v|^2 v_1\widetilde{e}_i dx] + o(|x|^3, |y|^3).\end{cases} \tag{7.5.8}$$

记 (7.5.8) 的向量场为 $v(x,y)$, 则有

$$\begin{aligned}\langle v(x,y), (x,y)\rangle = (\lambda - \alpha\lambda_k)&\int_\Omega |v|^2 dx \\ -\sigma&\int_\Omega |v|^4 dx + o(|x|^4, |y|^4).\end{aligned} \tag{7.5.9}$$

根据定理 5.13, 从 (7.5.9) 可推出 (7.5.8) 从 $((x,y),\lambda) = (0,\alpha\lambda_k)$ 在 $\lambda > \alpha\lambda_k$ 分歧出一个球面吸引子 $\Sigma_\lambda^k = S^{2m-1}$, 因而 Σ_λ^k 是 (7.5.6) 从 $(u,x) = (0,\alpha\lambda_k)$ 在 $\lambda > \alpha\lambda_k$ 分歧出的不变球 S^{2m-1}. 特别地, 当 $k = 1$ 时分歧出的吸引子 $\Sigma_\lambda^1 = S^1$.

第三步. 现在证明, 当 $\rho^2 + \beta^2 \neq 0$ 时, $\Sigma_\lambda^k(k = 1, 2, \cdots)$ 没有 (7.5.6) 的奇点.

当 $\beta \neq 0$ 时, L_λ 的特征值 (7.5.7) 在 $\lambda = \alpha\lambda_k$ 是非零的, 因此 $L_\lambda : H_1 \to H$ 在 $\lambda = \alpha\lambda_k$ 附近是一个线性同胚. 这意味着 (7.5.6) 在 $(0,\alpha\lambda_k)$ 处没有定态分歧发生. 当 $\beta = 0$ 及 $\rho \neq 0$ 时, 从 (7.5.6) 有

$$\int_\Omega \left[u_2\frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1\frac{\partial u_2}{\partial t}\right] dx = \rho\int |u|^4 dx.$$

这意味着 Σ_λ^k 没有 (7.5.6) 的奇点. 因而 Σ_λ^1 是一个周期轨道.

第三步. 最后证明当 $\rho=\beta=0$ 时, $\Sigma_\lambda^1=S^1$ 是由奇点构成. 此时 (7.5.6) 的定态方程为

$$\begin{cases}\alpha\Delta u+\lambda u-\sigma|u|^2u=0,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{7.5.10}$$

方程 (7.5.10) 是一个具有变分结构的方程, 其泛函为

$$F(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{1}{2}\lambda|u|^2+\frac{\sigma}{4}|u|^4\right]dx.$$

由定理 4.12, 方程 (7.5.10) 在 $(0,\alpha\lambda_1)$ 一定分歧出一个奇点, 因而 Σ_λ^1 中一定含有 (7.5.10) 的奇点. 另一方面显然 (7.5.10) 是关于正交群作用下不变的, 即对任二阶正交矩阵, $M\in O(2)$, 在变换

$$\widetilde{u}=Mu,\quad u=(u_1,u_2)$$

下, 方程 (7.5.10) 的形式不变. 这意味着 $u_\lambda\in\Sigma_\lambda^1$ 是 (7.5.10) 的一个奇点时, 则 $\widetilde{u}_\lambda=Mu_\lambda$ 也是 (7.5.10) 的奇点. 因此

$$\Sigma_\lambda=\{Mu_\lambda|M\in O(2)\}=S^1$$

是由奇点构成. 定理证毕.

§7.5.3 周期边界条件

对于周期边界条件, L_λ 的特征值是

$$\begin{cases}\beta_K(\lambda)=(\lambda-\alpha|K|^2)+i|K|^2\beta,\\ K=(k_1,\cdots,k_n),\quad |K|^2=k_1^2+\cdots+k_n^2,\end{cases}\tag{7.5.11}$$

其特征函数为

$$\cos Kx\pm i\cos Kx,\quad \cos Kx\pm i\sin Kx,$$

$$\sin Kx\pm i\cos Kx,\quad \sin Kx\pm i\sin Kx,$$

$$Kx=k_1x_1+\cdots+k_nx_n.$$

L_λ 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)=\lambda(K=0)$ 对应的特征函数为常值函数 a_1+ia_2. 显然 (7.5.11) 对 $\lambda_0=0,m=2$ 满足条件 (6.2.1) 和 (6.2.2).

通过使用定理 7.9 相同的方法, 可以得到下面定理.

定理 7.10 对于周期边界条件 (7.5.3), 有下面结论:

(1) 当 $\lambda \leqslant 0$ 时, $u=0$ 是全局渐近稳定的平衡点;

(2) 问题 (7.5.1) 和 (7.5.3) 从 $(u,\lambda)=(0,0)$ 在 $\lambda>0$ 分歧出一个吸引子 $\Sigma_\lambda = S^1$, 它吸引 H/Γ, Γ 为 $u=0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2;

(3) 若 $\rho \neq 0$, 则 Σ_λ 是一个周期轨道, 而当 $\rho=0$ 时, Σ_λ 是由奇点构成.

定理 7.11 对于问题 (7.5.1) 和 (7.5.3) 的一般特征值 $\beta_k(\lambda)$, 有下面不变球面分歧结果:

(1) 问题 (7.5.1) 和 (7.5.3) 从 $(u,\lambda)=(0,\alpha)$ 在 $\lambda>\alpha$ 分歧出一个 $4n-1$ 维不变球面 $\Sigma_\lambda = S^{4n-1}$;

(2) 若 $\beta^2+\rho^2\neq 0$, 则 Σ_λ 中没有奇点. 若 $\beta=\rho=0$, 则对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$, Σ_λ 中含有 C_n^k 个 $k+1$ 维轮胎 T^{k+1}, 它们由奇点构成, 这里 $C_n^k = n\cdots(n-k+1)/k!$;

(3) 若 L_λ 特征值 $\beta_k(\lambda)$ 有重数 N, 则问题 (7.5.1) 和 (7.5.3) 从 $(u,\lambda)=(0,\alpha|k|^2)$ 在 $\lambda>\alpha|k|^2$ 分歧出一个 $4N-1$ 维不变球面 $\Sigma_\lambda^k = S^{4N-1}$, 并且当 $\beta^2+\rho^2\neq 0$ 时, Σ_λ^k 中没有 (7.5.1) 和 (7.5.3) 的奇点.

§7.6 评　注

§7.1 关于 Prigogine 非线性耗散结构自组织理论可参见文献 [88], 关于化学反应动力学及 Belosov-Zhabotinsky 反应的介绍可参见文献 [18,88] 和标准的热力学与统计物理的教科书, 如文献 [72].

§7.2 Field-Noyes 方程取自文献 [30], 定理 7.2 取自文献 [52]. 关于 Belousov-Zhabotinsky 反应的化学意义及其分析是作者给出的.

§7.3 Cahn-Hilliard 方程实质上是由 Cahn 和 Hilliard [7] 在 1958 年首先提出了二元体自由能的函数形式. 随后由 Novick-Cohen 和 Segel 根据热力学原理建立现在这种形式的 Cahn-Hilliard 方程. 定理 7.3 ~7.6 取自文献 [52]. 物理意义的评述由作者给出. 关于 Cahn-Hillard 方程的其他方面数学讨论参见文献 [6,76,98].

§7.4 这一节内容取自文献[52]. 其他数学方面的讨论参见文献[19,74,94,100].

§7.5 这一节内容参见文献 [15,52]. 关于复 Ginzburg-Landau 方程的其他方面研究可参见文献 [16,42,98].

第八章　典型物理问题的动态分歧与跃迁

这一章主要研究几个在科学中具有重要意义的物理问题及其相变现象. 它们是超导体的相变问题、流体动力学的 Rayleigh-Benard 对流问题关于 Couette 流稳定性的 Taylor 问题以及大气物理的赤道 Walker 环流现象. 这四个问题在非线性科学中非常重要, 长期以来没有数学理论能够严格证明它们. 这里, 我们应用在第五和第六章建立的动态分歧和跃迁理论, 不仅从数学上对它们给予严格的证明, 并且还发现一些新的物理现象.

§8.1　二维不可压缩流几何理论简介

§8.1.1　介绍与预备

相变现象的一个重要特点就是图形结构的变化能够被观测到, 而这种图形结构对应到数学上就是控制方程解的拓扑结构, 它要求具有一定结构稳定性. 这样, 当控制方程发生状态跃迁时, 新的稳定状态的解由于其结构的稳定性, 使得方程解逼近它们时也具有相同的拓扑结构. 这就是我们要研究向量场结构稳定性的动机之一.

这一节将要介绍的是由本书作者 [62] 新建立的关于二维不可压缩向量场几何理论中的结构稳定性定理以及全局拓扑结构的指标公式. 它们在这一章的所有问题中都被实质性地应用到.

令 M 是一个二维可微的带边 Riemann 流形. ∂M 为其边界. 记 $C^r(M,R^2)$ 是所有定义在 M 上的 r 次连续可微向量场空间. 建立空间

$$
\begin{aligned}
D^r(M,R^2) &= \{v\in C^r(M,R^2)|\, \mathrm{div} v=0,\quad v_n|_{\partial M}=0\},\\
B^r(M,R^2) &= \{v\in D^r(M,R^2)\left|\, \frac{\partial v_\tau}{\partial n}\right|_{\partial M}=0\},\\
B^r_0(M,R^2) &= \{v\in D^r(M,R^2)|\, v|_{\partial M}=0\},
\end{aligned}
$$

其中 $v_n=v\cdot n, n$ 和 τ 为 ∂M 上的法向量和切向量.

考虑一个向量场 $v\in C^r(M,R^2)(r\geqslant 1)$. 点 $p\in M$ 称为 v 的一个奇点, 若 $v(p)=0$. v 的一个奇点 $p\in M$ 被称为是非退化的, 若 v 在 p 点的 Jacobi 矩阵 $Dv(p)$ 是非奇异的. v 被称为是正则的如果 v 的所有奇点都是非退化的.

令 $\Phi(x,t)$ 是 v 的在 $t=0$ 从 x 出发的轨道, 则点 $x\in M$ 的 ω 极限集 $\omega(x)$ 和 α 极限集 $\alpha(x)$ 定义为

$$\omega(x) = \{y \in M | \exists t_n \to \infty, \quad \text{s.t.} \quad \Phi(x, t_n) \to y\},$$
$$\alpha(x) = \{y \in M | \exists t_n \to -\infty, \quad \text{s.t.} \quad \Phi(x, t_n) \to y\}.$$

v 的一条轨道 γ 被称为是鞍点连结，若对 $x \in M, x$ 的 ω 极限集和 α 极限集 $\omega(x), \alpha(x)$ 都是鞍点.

定义 8.1 两个向量场 $u, v \in C^r(M, R^2)$ 被称为是拓扑等价的，如果存在一个同胚 $\varphi: M \to M$使得 φ 将 u的每个轨道映到 v 的轨道上，并且保它们的定向.

定义 8.2 令 $X = D^r(M, R^2)$ 或 $B^r(M, R^2)$ 或 $B_0^r(M, R^2)$. 一个向量场 $v \in X$ 被称为是在 X 中结构稳定的，如果存在 v 在 X 中的一个邻域 $U \subset X$, 使对任何 $u \in U, v$ 和 u 是拓扑等价的.

§8.1.2 结构稳定性定理

考虑 $v \in D^r(M, R^2)$. 由于无散度向量场具有保面积的性质，这使得 $v \in D^r(M, R^2)$ 是非常不同于一般向量场. 特别地，容易看到，对任何 $v \in D^r(M, R^2), v$ 的内部非退化奇点 p 或者是一个鞍点，或者是一个中心，而 v 的非退化边界奇点一定是一个鞍点. 一个内部鞍点 $p \in \dot{M}$ 被称为是自连结的如果 p 仅仅是自己连续到自己，也就是说连结 p 的轨道是一个 8 的形式.

下面的定理在文献 [62,63] 中被证明，它对具有无法向流边界条件和自由边界条件的无散度向量场的结构稳定性提供了一个充分必要条件. 这里总是假设 $M \subset S^2$ 或 $M \subset R^2$ 是一个紧带边流形.

定理 8.1 令 $X = D^r(M, R^2)$ 或 $B^r(M, R^2)$. 一个不可压缩向量场 $v \in X$ 是在 X 中结构稳定的充要条件是

(1) v 是正则的；

(2) v 的所有内部鞍点都是自连结的；

(3) 每一个边界鞍点被连结到同一个连通分支上的边界鞍点.

进一步，所有结构稳定向量场的集合在 X 中是一个开稠集.

对一个具有 Dirichlet 边界条件的不可压缩向量场 $v \in B_0^r(M, R^2)$, 其结构稳定性定理略有不同. 这主要是 $v|_{\partial\Omega} = 0$, 所有边界上的点在通常意义下都是奇点. 为了研究 $v \in B_0^r(M, R^2)$ 的结构，我们需要对 v 的边界奇点作进一步更细致的分类. 为此目的引入下面概念.

定义 8.3 令 $u \in B_0^r(M, R^2), r \geqslant 2$.

(1) 点 $p \in \partial M$ 称为是 u 的一个 ∂ 正则点若 $\partial u_\tau(p)/\partial n \neq 0$; 否则 $p \in \partial M$ 称为 u 的一个 ∂ 奇点；

(2) u 的一个 ∂ 奇点 $p \in \partial M$ 称为是非退化的，如果

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_\tau(p)}{\partial \tau \partial n} & \dfrac{\partial^2 u_\tau(p)}{\partial n^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_n(p)}{\partial \tau \partial n} & \dfrac{\partial^2 u_n(p)}{\partial n^2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

u 的一个非退化 ∂ 奇点也称为 ∂ 鞍点;

(3) $u \in B_0^r(M, R^2)(r \geqslant 2)$ 被称为是 D 正则的，如果 u 在 M 的内部是正则的，并且 u 在 ∂M 上所有 ∂ 奇点都是非退化的.

一个 D 正则的向量场 $u \in B_0^r(M, R^2)$ 有下面性质:

(a) u 的 ∂ 奇点数是有限的;

(b) 没有 u 的轨道连结到一个 ∂ 正则点上;

(c) 有严格的一个 u 的轨道连结到一个 ∂ 鞍点 $p \in \partial M$. 因而，$u \in B_0^r(M, R^2)$ 的 ∂ 正则点与 ∂ 鞍点 $p \in \partial M$ 的基本性质与 $u \in D^r(M, R^2)$ 的边界正则点和鞍点 $p \in \partial M$ 是相似的，特别是在结构稳定性方面它们的作用是一样的.

下面定理将定理 8.1 推广到具有 Dirichlet 边界条件的不可压缩向量场上[62,66].

定理 8.2　令 $u \in B_0^r(M, R^2), r \geqslant 2$. 那么 u 是在空间 $B_0^r(M, R^2)$ 中结构稳定的充分必要条件为

(1) u 是 D 正则的;

(2) u 的所有内鞍点是自连结的;

(3) 每个 u 的在 ∂M 上 ∂ 鞍点被连结到 ∂M 上同一个连通分支的一个 ∂ 鞍点. 并且所有结构稳定向量场集合在 $B_0^r(M, R^2)$ 中是开稠集.

§8.1.3　指标公式

令 $u \in D^r(M, R^2), M$ 是一个具有 k 个洞的连通区域. 假设 u 在 M 上是一个正则向量场，则由不可压缩向量场的奇点分类定理 [62],u 在 M 内部只有鞍点和中心这两种奇点，而在边界上只有鞍点.

记 C 是 $u \in D^r(M, R^2)$ 在 M 内的中心数，S 为 u 在 M 的内部鞍点数，B 为 u 在 ∂M 上的边界鞍点数，则对具有 k 个洞的区域 M 上正则不可压缩向量场 $u \in D^r(M, R^2)$, 下面指标公式成立 [62,68]:

$$C - S - \frac{B}{2} = 1 - k. \tag{8.1.1}$$

公式 (8.1.1) 是在比较粗的意义下刻画了一个正则的二维不可压缩向量场全局拓扑结构的特征. 在大气和海洋动力学中，(8.1.1) 给出了大气与海洋的强分层环流公式，这里 k 代高山截面数和海洋中的岛屿数，C 代表环流数，S 代表分流中心数，B 代表高山和海岸的激流中心数. 在超导体中 (8.1.1) 给出超流 (超导电流) 的 Abrikosov 漩涡数 C 与超导体的几何结构之间的关系.

需要强调指出，公式 (8.1.1) 对 $u \in B_0^r(M, R^2)$ 也是成立的，此时 B 代表 u 的 ∂ 鞍点数.

因为所有正则 (或 D 正则) 向量场全体集合在 $D^r(M, R^2)$(或 $B_0^r(M, R^2)$) 中

是一个开稠密，因而在自然现象中人们所能观察到的向量场一定是正则 (或 D 正则) 的. 事实上，还是结构稳定的.

为了能够对公式 (8.1.1) 有一个直观的了解，我们对 $k=0$ 的单连通区域 M 给出一个例子，此时 (8.1.1) 为

$$C-S-\frac{B}{2}=1.$$

当 $B=2,C=3$ 时， $S=1$, 这种情况的向量场拓扑结构如图 8.1 所示.

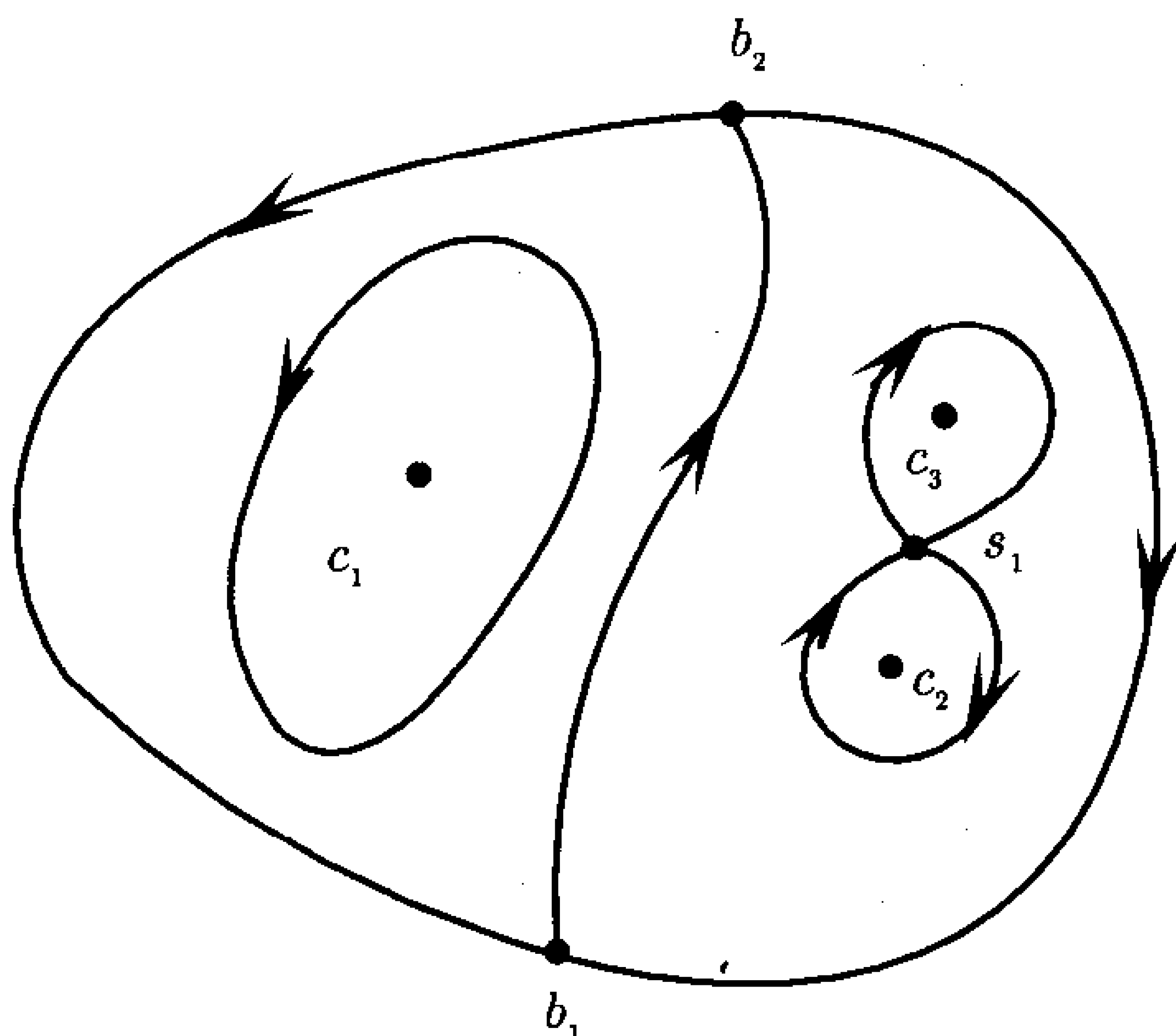


图 8.1 C_1,C_2,C_3 为中心， b_1,b_2 为边界鞍点， S_1 为内鞍点

最后要说明一下，公式 (8.1.1) 是带边流形上 Poincaré-Hopf 指标公式的一个推论. 带边流形上的 Poincaré- Hopf 指标公式被证明 [68]. 为了完备，这里简单地介绍一下这个指标公式.

令 M 是一个 n 维紧带边流形， $v\in C_n^r(M,R^n)$ 是一个 r 次连续可微的向量场，这里空间 $C_n^r(M,R^n)$ 定义为

$$C_n^r(M,R^n)=\{v\in C^r(M,R^n)|\quad v\cdot n=0\quad 在\partial M上\}.$$

令 $p\in M$ 是 $v\in C_n^r(M,R^n)$ 的一个奇点. 当 $p\in \dot{M}$(M 的内部) 时, v 在 p 的指标 $\mathrm{ind}(v,p)$ 就如通常所定义 (可参见第二章的拓扑度一节). 当 $p\in\partial M$ 时，将 M 沿 ∂M 法方向延拓为一个带边流形 $\widetilde{M}$, 使得 ∂M 都是 $\widetilde{M}$ 的内点. 再设 ∂M 的法方向将 v 反射延拓到 $\widetilde{M}$ 上 $\widetilde{v}\in C^r(\widetilde{M},R^n),\widetilde{v}|_M=v$, 使得 $p\in\partial M$ 是 $\widetilde{v}$ 的一个内部奇点. 然后定义 v 在边界奇点 $p\in\dot{\partial}M$ 的指标为

$$\mathrm{ind}(v,p)=\frac{1}{2}\mathrm{ind}(\widetilde{v},p), \tag{8.1.2}$$

在 (8.1.2) 的定义下，有下面推广的带边紧流形上的 Poincaré-Hopf 指标定理 [62,68].

定理 8.3 令 M 是一个 n 维紧带边流形， $v\in C_n^r(M,R^n)(r\geqslant 0)$ 是一个 r 次连续可微向量场. 如果 v 在 M 上只有有限个奇点， $p_1,\cdots,p_m\in M$, 则

$$\sum_{k=1}^{m} \text{ind}(v, p_k) = \begin{cases} \chi(M), & \text{当 } \dim M = \text{偶数}, \\ 0, & \text{当 } \dim M = \text{奇数}, \end{cases}$$

其中 $\chi(M)$ 为 M 的 Euler 示性数.

§8.2　超导体的相变

§8.2.1　动态 Ginzburg-Landau 方程

令 $\Omega \subset R^n(n = 2, 3)$ 是一个有界开集. 这一节我们考虑定义在 Ω 上动态 Ginzburg- Landau 方程的跃迁问题，该模型是关于超导体相变的控制方程.

方程中涉及三个未知函数，一个复值函数 $\psi : \Omega \to C$ 代表序参数，一个向量值函数 $A : \Omega \to R^n$ 代表磁场势，及一个标量函数 $\phi : \Omega \to R^1$ 代表电场势. 然后动态 Ginzburg-Landau 方程可写为如下形式

$$\frac{h^2}{2m_sD}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie_s}{h}\phi\right)\psi + a\psi + b|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m_s}(ih\nabla + \frac{e_s}{c}A)^2\psi = 0, \quad (8.2.1)$$

$$J = -\sigma\left(\frac{1}{c}A_t + \nabla\phi\right) - \frac{e_s^2}{m_s}c|\psi|^2 A - \frac{e_s^2}{m_s c^2} i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \quad (8.2.2)$$

$$\frac{4\pi}{c}J = \text{curl}^2 A - \text{curl} H_a, \quad (8.2.3)$$

其中 h 是 Planck 常数，e_s 和 m_s 分别为 Cooper 电子对的电荷和质量，D 是扩散系数，σ 是电导率，c 是光速，J 是超流密度，H_a 为外加磁场，ψ^* 为 ψ 的复共轭. 系数 $a = a(T)$ 和 $b = b(T)$ 是与温度 T 有关的参数，它们满足下面条件

$$a = a(T)\begin{cases} > 0, & \text{当} T > T_C, \\ < 0, & \text{当} T < T_C, \end{cases}$$

$$b = b(T) > 0,$$

这里 T_C 是临界温度，在那点超导的相变可能发生. 在 BCS 理论中，它们由下式给出 [15]

$$\begin{cases} a(T) = N(0)\dfrac{T - T_C}{T_C}, \\ b(T_C) = 0.098\dfrac{N(0)}{(k_b T_C)^2}. \end{cases}$$

方程 (8.2.1) 和 (8.2.2) 是由 P.L.Gor'kov 和 M.Elashburg 推广的动态 Ginzburg-Landau 方程, 原始的 Ginzburg- Landau 方程是与时间无关的 [29,101]. 方

程 (8.2.3) 就是古典的 Maxwell 方程. 序参数 ψ 描述了超导电子的密度: $|\psi|^2 = n_s$. 此外, ψ 是正比于能量间隙参数 Δ.

1. 方程的无量纲形式

从数学和物理这两种观点出发, 下面我们介绍 Ginzburg-Landau 方程的两种无量纲形式: 一种是传统的物理与数学文献中采用的无量纲形式, 另一种是由作者引进的无量纲形式 [52,58], 它更适合于研究超导体的相变.

为了方便, 先介绍各种物理量的量纲单位. 令 m 代表质量, L 代表长度, t 为时间, E 为能量, 则

$$
\begin{aligned}
&E : L^2m/t^2, \quad h : Et, \quad D : L^2/t, \quad e_s^2 : EL,\\
&\sigma : 1/t, \quad C : L/t, \quad a : E, \quad b : EL^3,\\
&\psi : 1/L^{\frac{3}{2}}, \quad A : (E/L)^{\frac{1}{2}}, \quad H : (E/L^3)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

然后再介绍一些物理参数

$$
\begin{aligned}
&|\psi_0|^2 = |a|/b,\\
&H_C = (4\pi|a|^2/b)^{\frac{1}{2}},\\
&\lambda = \lambda(T) = (m_sC^2b/4\pi e_s^2|a|)^{\frac{1}{2}},\\
&\xi = \xi(T) = h/(2m_s|a|)^{\frac{1}{2}},\\
&\kappa = \lambda/\xi,\\
&\eta = 4\pi\sigma D/C^2,\\
&\tau = \lambda^2/D.
\end{aligned}
$$

在物理方面, $|\psi_0|^2$ 代表平衡密度, H_C 为热力学临界场, $\lambda = \lambda(T)$ 为渗透深度, $\xi(T)$ 为关联长度, τ 为松弛时间, $\kappa = \lambda/\zeta$ 称为超导体的 Ginzburg-Landau 参数, 当 $0 < \kappa^2 < \dfrac{1}{2}$ 时, 超导材料称为 I 型的, 当 $\dfrac{1}{2} < \kappa^2$ 时称 II 型.

引入下面无量纲变量

$$
x = \lambda x', \qquad t = \tau t', \qquad \psi = \psi_0\psi',
$$

$$
A = \frac{\sqrt{2}H_C\lambda}{\kappa}A', \quad \phi = \frac{D\sqrt{2}H_C}{\kappa}\phi', \quad H_a = \frac{\sqrt{2}H_C}{\kappa}H_a'.
$$

然后有下面传统的无量纲形式的 Ginzburg-Landau 方程 (为了方便, 去掉上撇)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + i\kappa\phi\psi = -(i\nabla + A)^2\psi - \kappa^2(|\psi|^2 - 1)\psi,\\
\eta\left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + \nabla\phi\right) = -\mathrm{curl}^2 A - \dfrac{i}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - |\psi|^2 A + \mathrm{curl} H_a.
\end{cases}
$$

该无量纲形式仅适用于 $T \neq T_C$ 的情况.

正如我们所见，传统的无量纲形式不适合用来讨论超导体的分歧问题．因而，我们需要引入另一种无量纲形式以便讨论跃迁问题，为此建立一些新的物理参数如下

$$\begin{aligned}
&l=\frac{\sqrt{b}}{e_s}, &&\tau_0=\frac{hl}{e_s^2}, &&\phi_0=\frac{e_s^2}{\sqrt{b}},\\
&A_0=\left(\frac{e_shC^2}{D\sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{2}}, &&\alpha=-\frac{2\sqrt{b}m_sD}{e_s^3h}a, &&\mu=\frac{hD}{\sqrt{b}e_s},\\
&\beta=\frac{2m_sD}{h}, &&\zeta=\frac{4\pi\sigma le_s^2}{C^2h}, &&\gamma=\frac{4\pi e_s^2}{m_sC^2l}.
\end{aligned}$$

然后引入下面无量纲变量

$$x=lx',\qquad t=\tau_0t',\qquad \psi=l^{-3/2}\psi',$$

$$A=A_0A',\quad \phi=\phi_0\phi',\quad H_a=l^{-1}A_0H_a',$$

这样得到第二种类型 Ginzburg-Landau 方程的无量纲形式如下 (再次去掉上撇)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+i\phi\psi=-(i\mu\nabla+A)^2\psi+\alpha\psi-\beta|\psi|^2\psi,\\ \zeta\left(\dfrac{\partial A}{\partial t}+\mu\nabla\phi\right)=-\mathrm{curl}^2A+\mathrm{curl}H_a,\\ -\gamma|\psi|^2A-\dfrac{r\mu}{2}i(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*).\end{cases}\tag{8.2.4}$$

在后面的讨论将看到，参数 α 在超导体的相变 (或者跃迁) 中起到关键作用，它与温度有如下关系

$$\alpha=\alpha(T)=\frac{2\sqrt{b}m_sDN_0}{e_s^3h}\frac{T_C-T}{T_C}.\tag{8.2.5}$$

2. 边界条件及其物理意义

对于序参数 ψ, 物理上合理的边界条件为

$$c_1(ih\nabla+\frac{e_s}{c}A)\psi\cdot n=-c_2ih\psi,\quad 在\partial\Omega上.\tag{8.2.6}$$

该条件意味着没有电流穿过边界 $\partial\Omega$, 这里 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量， $c_1,c_2>0$ 是依赖于超导体 Ω 边界所接触材料的性质．物理上，它们满足 [15,101]

$$\begin{cases}c_2=0,c_1\neq0, & 当\partial\Omega是绝缘体,\\ c_1=0,c_2\neq0, & 当\partial\Omega是磁性材料,\\ 0<c_2/c_1<\infty, & 当\partial\Omega是正常金属.\end{cases}\tag{8.2.7}$$

我们注意到，方程 (8.2.1)~(8.2.3) 及边界条件 (8.2.6) 在下面规范变换下是不变的

$$(\psi, A, \phi) \to \left(\psi e^{i\theta}, A - \frac{hc}{e_s}\nabla\theta, \phi - \frac{h}{e_s}\theta_t\right),$$

其中 θ 为任意函数. 如果取 θ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{hC}{e_s}\Delta\theta = \mathrm{div}A, \\ \dfrac{hC}{e_s}\dfrac{\partial\theta}{\partial n} = A\cdot n, \quad 在\partial\Omega上, \end{cases} \tag{8.2.8}$$

那么得到新增的一个方程和边界条件

$$\mathrm{div}A = 0, \tag{8.2.9}$$

$$A_n = A\cdot n = 0, \quad 在\partial\Omega上. \tag{8.2.10}$$

根据 (8.2.7) 和 (8.2.11), 从 (8.2.6), 有下面边界条件:

Neumann 边界条件. 它适用于 Ω 是绝缘体所包围的情况

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dirichlet 边界条件. 它适用于 Ω 被磁性材料所围情况

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

Robin 边界条件. 它适用于 Ω 被正常金属所围情况

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} + C\psi = 0, \ 在\partial\Omega上,$$

其中 $C > 0$ 为常数取决于材料性质.

另一个物理合理的边界条件为

$$\mathrm{curl}A\times n = H_a\times n, \quad 在\partial\Omega上, \tag{8.2.11}$$

该条件是使热力学中平衡原理 (即热力学系统在自由能为极小值点达到平衡) 成立的基本条件.

3. 超导的数学问题

在给定的 (8.2.8) 规范条件下, 动态 Ginzburg-Landau 方程无量纲形式 (8.2.4) 再结合 (8.2.9), 便构成超导的标准数学模型如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + i\phi\psi = -(i\mu\nabla + A)^2\psi + \alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi, \\ \zeta\left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + \mu\nabla\phi\right) = -\mathrm{curl}^2A + \mathrm{curl}H_a \\ \qquad\qquad -\gamma|\psi|^2A - \dfrac{\gamma\mu}{2}i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*), \\ \mathrm{div}A = 0, \end{cases} \tag{8.2.12}$$

相配的初始条件为

$$\psi(0)=\psi_0,\quad A(0)=A_0. \tag{8.2.13}$$

边界条件取下面中的一个：

Neumann 边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\quad A_n=0,\quad \mathrm{curl}A\times n=H_a\times n,\quad 在\partial\Omega上. \tag{8.2.14}$$

Dirichlet 边界条件

$$\psi=0,\quad A_n=0,\quad \mathrm{curl}A\times n=H_a\times n,\quad 在\partial\Omega上. \tag{8.2.15}$$

Robin 边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}+C\psi=0,\quad A_n=0,\quad \mathrm{curl}A\times n=H_a\times n,\quad 在\partial\Omega上. \tag{8.2.16}$$

(8.2.12) 和 (8.2.13) 再配上 (8.2.14)~(8.2.16) 中的一个，就构成一个完备的数学问题，它们可以纳入标准的数学框架下进行讨论.

注 8.1　如果超导材料几何形状是一个环流体，或者是一个平板 $\Omega=\widetilde{\Omega}\times(0,h)$, 并且高度 h 与 $\widetilde{\Omega}$ 的直径相比很小，那么在 x 方向或 (x,y) 方向采用周期边界条件是合理的.

§8.2.2　数学框架及特征值问题

对于一个给定的外加磁场 $H_a,\mathrm{div}H_a=0$, 存在一个磁场势 A_a, 使得

$$\begin{cases}\mathrm{curl}A_a=H_a,\\ \mathrm{div}A_a=0,\\ A_a\cdot n|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

令 $A=\mathcal{A}+A_a$, 那么 (8.2.12),(8.2.13) 和 (8.2.14)~(8.2.16) 中一个变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+i\phi\psi=-(i\mu\nabla+A_a)^2\psi+\alpha\psi-|\mathcal{A}|^2\psi\\ \qquad\qquad -2A_a\cdot\mathcal{A}\psi-2i\mu\mathcal{A}\cdot\nabla\psi-\beta|\psi|^2\psi,\\ \zeta\left(\dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial t}+\mu\nabla\phi\right)=-\mathrm{curl}^2\mathcal{A}-\gamma A_a|\psi|^2\\ \qquad\qquad -\gamma\mathcal{A}|\psi|^2-\dfrac{\gamma\mu i}{2}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*),\\ \mathrm{div}\mathcal{A}=0,\\ \mathcal{A}_n|_{\partial\Omega}=0,\mathrm{curl}\mathcal{A}\times n|_{\partial\Omega}=0,\psi\text{满足 (8.2.18)~(8.2.20) 中的一个},\\ \psi(0)=\psi_0,\mathcal{A}(0)=\mathcal{A}_0.\end{cases} \tag{8.2.17}$$

Neumann 边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\quad \text{在}\partial\Omega\text{上}. \tag{8.2.18}$$

Dirichlet 边界条件

$$\psi=0,\quad \text{在}\partial\Omega\text{上}. \tag{8.2.19}$$

Robin 边界条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}+C\psi=0,\quad \text{在}\partial\Omega\text{上}. \tag{8.2.20}$$

对问题 (8.2.17), 建立如下空间

$$\begin{aligned}
&H_B^2(\Omega,C)=\{\psi\in H^2(\Omega,C)|\ \psi\text{满足 (8.2.18)}\sim\text{(8.2.20) 中一个}\},\\
&\mathcal{L}^2(\Omega,R^n)=\{A\in L^2(\Omega,R^n)|\ \mathrm{div}A=0,A_n|_{\partial\Omega}=0\},\\
&D^2(\Omega,R^n)=\{A\in H^2(\Omega,C)\cap\mathcal{L}^2(\Omega,C)|\ \mathrm{curl}A\times n|_{\partial\Omega}=0\}.
\end{aligned}$$

然后定义

$$\begin{aligned}
H&=L^2(\Omega,C)\times\mathcal{L}^2(\Omega,R^n),\\
H_1&=H_B^2(\Omega,C)\times D^2(\Omega,R^n).
\end{aligned}$$

令

$$P:L^2(\Omega,R^n)\to\mathcal{L}^2(\Omega,R^n)$$

是 Leray 投影. 那么知道在 (8.2.17) 中的函数 ϕ 被下面方程唯一确定 (仅差一个常数)

$$\zeta\mu\nabla\phi=(I-P)\left[\frac{\gamma\mu i}{2}(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi)-\gamma|\psi|^2A\right], \tag{8.2.21}$$

其中 $A=A_1+\mathcal{A}$, I 是 $L^2(\Omega,R^n)$ 上恒等映射. 也就是说, 对每个 $u=(\psi,\mathcal{A})\in H_1$, 存在 (8.2.21) 的一个唯一解 ϕ 仅差一个常数. 因此可以定义一个算子 $\Phi:H_1\to L^2(\Omega)$ 为

$$\begin{cases}\Phi(u)=\phi\text{为 (8.2.21) 的解, 并且}\\ \displaystyle\int_\Omega\phi dx=0.\end{cases} \tag{8.2.22}$$

为了研究问题 (8.2.17) 的跳跃, 有必要考虑线性化方程的特征值问题. 令 α_1 是下面方程的第一特征值

$$\begin{cases}(i\mu\nabla+A_a)^2\psi=\alpha\psi,\quad x\in\Omega,\\ \psi\text{满足边界条件 (8.2.18)}\sim\text{(8.2.20) 中的一个}.\end{cases} \tag{8.2.23}$$

显然，特征值方程 (8.2.23) 是等价于下面方程

$$\begin{cases} -\mu^2\Delta\psi_1+|A_a|^2\psi_1-2\mu A_a\cdot\nabla\psi_2=\alpha\psi_1, \\ -\mu^2\Delta\psi_2+|A_a|^2\psi_2+2\mu A_a\cdot\nabla\psi_1=\alpha\psi_2, \\ \psi=\psi_1+i\psi_2\text{满足 (8.2.18)}\sim\text{(8.2.20) 中的一个}. \end{cases} \tag{8.2.24}$$

容易看出，特征值方程 (8.2.24) 是对称的，因而 (8.2.23) 有一个无穷的实特征值序列 (计入重数)

$$\begin{cases} \alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots, \\ \lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty, \end{cases} \tag{8.2.25}$$

及一个特征函数序列

$$\{e_k\in H^2_\beta(\Omega,C)|k=1,2,\cdots\}, \tag{8.2.26}$$

其构成 $L^2(\Omega,C)$ 的一个正交基.

(8.2.23) 的特征值总是偶重数的，即如果 ψ 是 (8.2.23) 的一个特征函数，那么 $e^{i\theta}\psi(\theta\in R^1)$ 也是 (8.2.23) 对应于同一个特征值的特征函数.

令 (8.2.23) 的第一特征值 α_1 有重数 $2m(m\geqslant 1)$, 那么，记所有的第一特征函数为

$$e_{2k-1}=\psi_{k+1}+i\psi_{k2},\quad e_{2k}=-\psi_{k2}+i\psi_{k1}, \tag{8.2.27}$$

$\forall 1\leqslant k\leqslant m$. 当 $m=1$ 时，也称 α_1 为复单特征值.

α_1 具有如下性质

$$\begin{cases} \alpha_1=\alpha_1(A_a)\text{连续地依赖于}A_a, \\ \alpha_1(A_a)>0,\text{对}A_a\neq 0, \\ \alpha_1(0)=0,\text{对 Neumann 边界条件 (8.2.18)}, \\ \alpha_1(0)>0,\text{对边界条件 (8.2.19) 或 (8.2.20)}. \end{cases} \tag{8.2.28}$$

现在，再考虑另一个特征值问题，它在 (8.2.17) 的跃迁问题研究中也是关键的．该问题为

$$\begin{cases} \text{curl}^2A+\nabla\phi=\rho A, \\ \text{div}A=0, \\ A_n|_{\partial\Omega}=0,\quad \text{curl}A\times n|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{8.2.29}$$

这里需要说明一下，在 (8.2.29) 中的边界条件就是自由边界条件，它可表达为

$$A_n|_{\partial\Omega}=0,\quad \left.\frac{\partial A_\tau}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{8.2.30}$$

其中 τ 为 $\partial\Omega$ 的切向量.

为了表明这一点. 对一个给定点 $x_0 \in \partial\Omega$, 取 (τ_1, τ_2, n) 作为一个正交坐标系，其中 τ_1, τ_2 是单位切向量， n 为单位外法向量， x_0 作为该坐标系的原点，那么由 $A_n|_{\partial\Omega} = 0$, 可以看到

$$\mathrm{curl}A(x_0) = -\frac{\partial A_{\tau_2}}{\partial n}\tau_1 + \frac{\partial A_{\tau_1}}{\partial n}\tau_2 + \left(\frac{\partial A_{\tau_2}}{\partial \tau_1} - \frac{\partial A_{\tau_1}}{\partial \tau_2}\right)n.$$

因此有

$$\mathrm{curl}A(x_0) \times n = \frac{\partial A_{\tau_1}}{\partial n}\tau_1 + \frac{\partial A_{\tau_2}}{\partial n}\tau_2|_{x=x_0}.$$

这意味着 (8.2.29) 中的边界条件是等价于 (8.2.30).

(8.2.29) 有一个实特征值序列

$$\begin{cases} 0 < \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \infty, \end{cases} \tag{8.2.31}$$

及一个特征函数序列

$$\{a_k \in D^2(\Omega, R^n) |\ k = 1, 2, \cdots\}, \tag{8.2.32}$$

它构成 $\mathcal{L}^2(\Omega, R^n)$ 的一个正交基.

§8.2.3 Ginzburg-Landau 方程的相变定理

在超导问题中,参数 $\alpha(T)$ 不能超过一个最大值,即绝对温度为零的值 $\alpha(T) \leqslant \alpha(0)$. 因此，必须加一个基本假设

$$\alpha_1 < \alpha(0) = \frac{2\sqrt{b}m_s DN_0}{e_s^3 h}, \tag{8.2.33}$$

其中 α_1 为 (8.2.23) 的第一特征值， N_0 为 Fermi 水平的状态密度.

在这一节，我们考虑 (8.2.23) 的第一特征值 α_1 重数为 2, 即 α_1 为复单特征值情况. 下面引入一个物理参数，该参数完全确定了 Ginzburg-Landau 方程的跃迁类型.

令 $e \in H_B^2(\Omega, C)$ 是 (8.2.23) 的第一特征向量. 那么对下面方程有一个唯一的解 $\mathcal{A}_0 \in D^2(\Omega, R^n)$

$$\begin{cases} \mathrm{curl}^2\mathcal{A}_0 + \nabla\phi = |e|^2 A_a + \dfrac{\mu i}{2}(e^*\nabla e - e\nabla e^*), \\ \mathrm{div}\mathcal{A}_0 = 0, \\ \mathcal{A}_0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \mathrm{curl}\mathcal{A}_0 \times n|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8.2.34}$$

然后定义一个物理参数 R 如下

$$R=-\frac{\beta}{\gamma}+\frac{2\int_{\Omega}|\mathrm{curl}\mathcal{A}_0|^2dx}{\int_{\Omega}|e|^4dx}. \tag{8.2.35}$$

显然参数 R 是与 (8.2.23) 的第一特征向量 e 的选择无关. 因为 e 和 $H_0=\mathrm{curl}\mathcal{A}_0$ 依赖于外加磁场势 A_a 及 Ω 的几何性质, 参数 R 本质上是 A_a,Ω 和物理参数 β,γ,μ 的函数.

这一节的主要结果就是下面给出的三个定理. 这里总是假设 (8.2.23) 的第一特征值 α_1 是复单的, 并且自然约束条件 (8.2.33) 成立.

定理 8.4 若由 (8.2.35) 的参数 $R<0$, 那么问题 (8.2.17) 在 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 有一个连续性的跃迁. 更细致地, 下面结论成立:

(1) 问题 (8.2.17) 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 在 $\alpha_1<\alpha$ 分歧出一个吸引子 $\Sigma_\alpha,\Sigma_\alpha$ 是同胚于圆圈 S^1, 并且是由 (8.2.17) 的稳态解构成;

(2) 存在 $(\psi,\mathcal{A})=0$ 的一个邻域 $U\subset H$, 使得吸引子 Σ_α 在 H 中吸引 U/Γ, 这里 Γ 是 $(\psi,\mathcal{A})=0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2 ;

(3) 对任何 $(\psi,\mathcal{A})\in\Sigma_\alpha$ 可表达为

$$\begin{cases}\psi=\left|\dfrac{\alpha-\alpha_1}{R_1}\right|^{\frac{1}{2}}e+o(|\alpha-\alpha_1|^{\frac{1}{2}}),\\ \mathrm{curl}^2\mathcal{A}=-\gamma\left|\dfrac{\alpha-\alpha_1}{R_1}\right|[|e|^2A_a+\mu I_m(e\nabla e^*)]+o(|\alpha-\alpha_1|),\\ R_1=\gamma R\displaystyle\int_{\Omega}|e|^4dx\Big/\int_{\Omega}|e|^2dx,\end{cases} \tag{8.2.36}$$

其中 e 为 (8.2.23) 的第一特征向量.

定理 8.5 如果 $R>0$, 那么问题 (8.2.17) 在 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 是一个跳跃性的跃迁, 并且下面结论成立:

(1) 问题 (8.2.17) 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 在 $\alpha<\alpha_1$ 分歧出一个不变集 Σ_α, 而在 $\alpha>\alpha_1$ 没有分歧;

(2) $\Sigma_\alpha=S^1$ 是一圆圈, 它由 (8.2.17) 的稳态解构成, 并且有一个二维不稳定流形.

定理 8.4 和 8.5 表明, $R<0$ 和 $R>0$ 这两种情况具有完全不同的超导相变特征. 见后面物理意义评述一节 (8.2.4 节) 的详细讨论.

容易验证, 当 $\alpha=0$ 时, $(\psi,\mathcal{A})=0$ 是 (8.2.17) 全局渐近稳定的稳态解. 下面定理是定理 8.5 和 (8.2.17) 全局吸引子存在性定理 [95] 的直接推论.

定理 8.6 对于 $R>0$ 的情况, 问题 (8.2.17) 有一个鞍结分歧点 $\alpha_0(0<\alpha_0<\alpha_1)$, 如图 8.2 和 8.3 所示, 使得下面结论成立:

(1) 在 $\alpha=\alpha_0$ 有一个不变集 $\Sigma_0=\Sigma_{\alpha_0}$ 并且 $0\notin\Sigma_0$;

(2) 对 $\alpha<\alpha_0$, 在 Σ_0 附近没有不变集;

(3) 对 $\alpha_0<\alpha<\alpha_1$, 有两个不变集 Σ_α^1 和 Σ_α^2 的连通分支, 并且 Σ_α^2 越过 $\alpha>\alpha_1$;

(4) 对每个 $\alpha_0<\alpha$, 有

(a) Σ_α^2 是一个吸引子, 并且 $\text{dist}(\Sigma_\alpha^2,0)>0$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_1$,

(b) Σ_α^2 是由稳态解和连续它们的轨道构成,

(c) Σ_α^2 含有至少一个圆圈 S^1 由稳态解构成.

(5) 对每个 $\alpha_0<\alpha<\alpha_1$, 有

(a) Σ_α^1 是一个排斥子, $0\notin\Sigma_\alpha^1$,

(b) Σ_α^1 是由稳态解及连续它们的轨道构成,

(c) Σ_α^1 含有至少一个由稳态解构成的圆圈 S^1,

(d) 当 α 靠近 α_1 时, $\Sigma_\alpha^1=S^1$ 就如定理 8.5 给出, 是由稳态解构成.

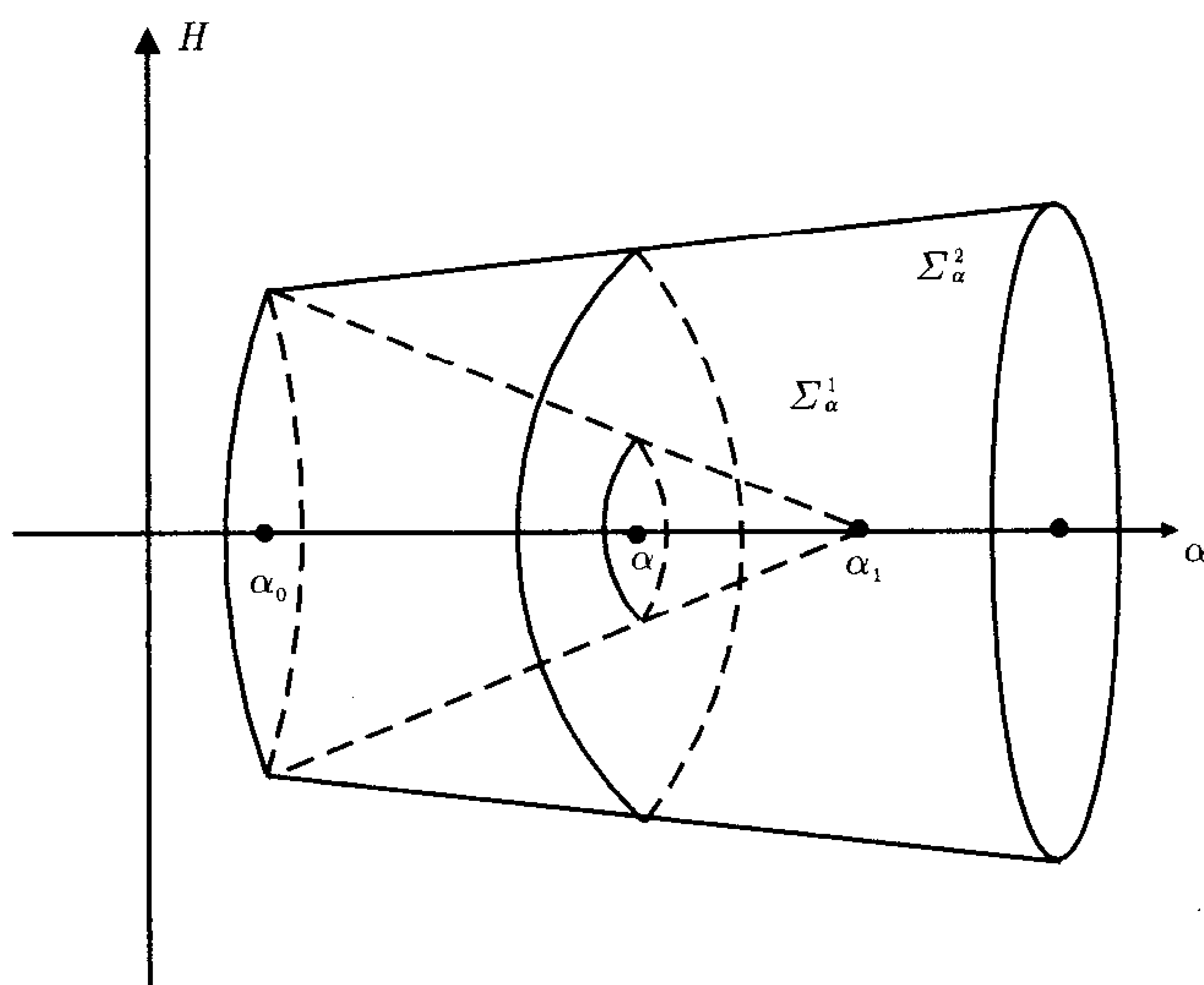


图 8.2

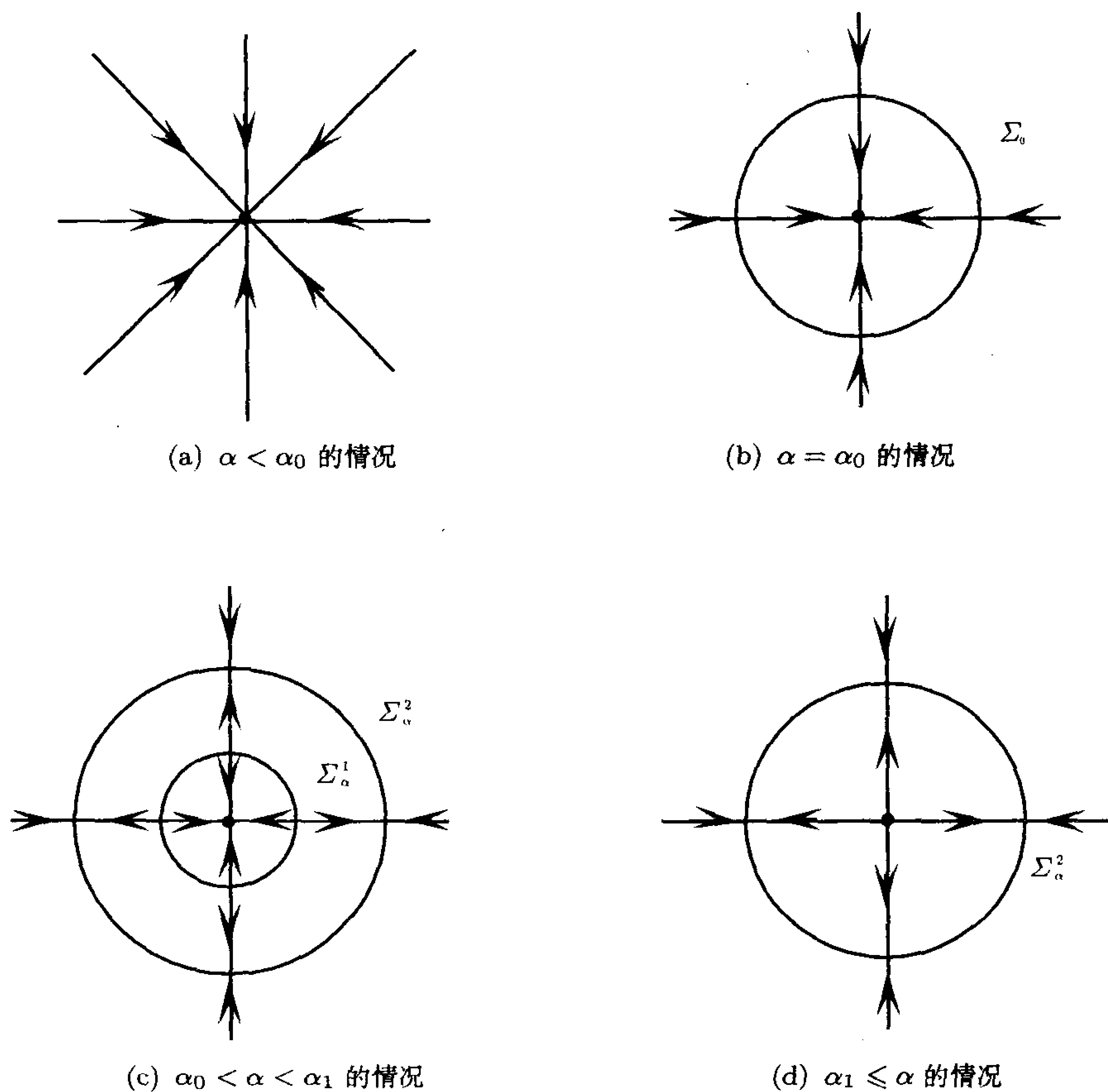
注 8.2 由 (8.2.35) 定义的参数 R, 能够等价地表达成如下形式

$$R=-\frac{\beta}{\gamma}+\frac{2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\rho_k}\left[\int_\Omega(|e|^2A_a+2\mu e_2\nabla e_1)a_k dx\right]^2}{\int_\Omega|e|^4dx}, \tag{8.2.37}$$

其中 $e=e_1+ie_2,\rho_k$ 是由 (8.2.31) 给出的 (8.2.29) 的特征值, $\{a_k\}$ 是由 (8.2.32) 给出的特征函数.

下面图 8.3(a)~(d) 是关于图 8.2 的每个截面 $\alpha<\alpha_0,\alpha=\alpha_0,\alpha_0<\alpha<\alpha_1$ 及

$\alpha_1 \leqslant \alpha$ 的截面图.



(a) $\alpha < \alpha_0$ 的情况　　(b) $\alpha = \alpha_0$ 的情况

(c) $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$ 的情况　　(d) $\alpha_1 \leqslant \alpha$ 的情况

图 8.3

定理 8.4～ 8.5 的证明　我们分下面几步进行证明.

第一步. 建立映射 $L_\alpha = -A + B_\alpha$ 和 $G : H_1 \to H$ 如下

$$Au = \begin{pmatrix} (i\mu\nabla + A_a)^2\psi \\ \zeta^{-1}\text{curl}^2 A \end{pmatrix},$$

$$B_\alpha u = \begin{pmatrix} \alpha\psi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(u) = \begin{pmatrix} i\psi\Phi(u) + 2A_a \cdot \mathcal{A}\psi + 2i\mu\mathcal{A} \cdot \nabla\psi + |\mathcal{A}|^2\psi + \beta|\psi|^2\psi \\ P[\gamma\zeta^{-1}(A_a + \mathcal{A})|\psi|^2 + \dfrac{\gamma\mu i}{2\zeta}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)] \end{pmatrix},$$

其中 $u = (\psi, \mathcal{A}), \Phi(u)$ 是由 (8.2.22) 所定义, P 是 Leray 投影. 这样, 问题 (8.2.17)

可等价地写成下面抽象形式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = L_\alpha u + G(u), \quad u = (\psi, \mathcal{A}) \in H_1, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8.2.38}$$

可以看到, $L_\alpha : H_1 \to H$ 是一个扇形算子, 并且 L_α 的特征值满足

$$\beta_1(\alpha) = \beta_2(\alpha) = \alpha - \alpha_1 \begin{cases} < 0, & \text{当}\alpha < \alpha_1, \\ = 0, & \text{当}\alpha = \alpha_1, \\ > 0, & \text{当}\alpha > \alpha_1, \end{cases}$$

以及对 $j \geqslant 3$, 有

$$\begin{cases} \beta_j(\alpha_1) = \alpha_1 - \alpha_k, & \text{或}\beta_j(\alpha_1) = -\zeta^{-1}\rho_l, \\ \beta_j(\alpha_1) < 0, & \text{对}k \geqslant 2, l \geqslant 1. \end{cases}$$

即条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 被满足.

很清楚, 由 (8.2.22) 定义的算子 $\Phi : H_1 \to L^2(\Omega)$ 是 C^∞ 的, 并且由 Tang 和 Wang 的估计 [95], 有

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Phi(u)\psi|^2 dx &\leqslant \left[\int_\Omega |\Phi|^3 dx\right]^{\frac{2}{3}} \left[\int_\Omega |\psi|^6 dx\right]^{\frac{1}{3}} \\ &\leqslant C\left(\|u\|^2_{H_{\frac{1}{2}}} + \|u\|_{H_{\frac{1}{2}}}\|\psi\|^2_{L^4}\right)^2 \|\psi\|^2_{L^6}, \end{aligned}$$

其中 $H_{\frac{1}{2}}$ 为 H_1 在 H^1 范数下的闭包. 因此能够不困难的验证, 在一个数 $1/2 < \theta < 1$, 使得 $G : H_\theta \to H$ 是 C^∞ 的.

第二步. (8.2.38) 的跃迁可由它到中心流形上的约化方程确定. 令 $\psi_0 \in E_1 = \{ze | z \in C, e$ 是 (8.2.23) 的第一特征向量 $\}$. 那么 (8.2.38) 的约化方程为

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \beta_1(\alpha)\psi_0 - P_1 G(\psi_0 + \widetilde{\psi}(\psi_0), \widetilde{\mathcal{A}}(\psi_0)), \tag{8.2.39}$$

其中 $P_1 : H \to E_1$ 是规范投影, $\Psi(\psi_0) = (\widetilde{\psi}(\psi_0), \widetilde{\mathcal{A}}(\psi_0))$ 是中心流形函数.

G 中的 k 重线性算子 $(k = 2, 3)$ 为

$$G_2(u) = \begin{pmatrix} 2A_a \cdot \mathcal{A}\psi + 2i\mu\mathcal{A} \cdot \nabla\psi \\ \zeta^{-1}\gamma A_a|\psi|^2 + \dfrac{\gamma\mu i}{2\zeta}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \end{pmatrix},$$

$$G_3(u) = -\begin{pmatrix} i\psi\Phi_2(u) + |\mathcal{A}|^2\psi + \beta|\psi|^3\psi \\ \gamma\zeta^{-1}\mathcal{A}|\psi|^2 \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_2(u)$ 是 $\Phi(u)$ 中的双线性算子.

由中心流形函数的近似公式 (6.1.6), 中心流形函数 $\Psi(\psi_0)=(\widetilde{\psi}(\psi_0),\widetilde{\mathcal{A}}(\psi_0))$ 满足下面方程

$$\begin{aligned}\text{curl}^2\widetilde{\mathcal{A}}+\mu\nabla\phi=&-\gamma A_a|\psi_0|^2-\frac{\gamma\mu i}{2}(\psi_0^*\nabla\psi_0-\psi_0\nabla\psi_0^*)\\&+o(\|\psi_0\|^2,|\beta_1(\alpha)|\|\psi_0\|),\end{aligned}\tag{8.2.40}$$

$$\widetilde{\psi}(\psi_0)=O(\|\widetilde{\mathcal{A}}(\psi_0)\|\|\psi_0\|,\|\psi_0\|^3)=O(\|\psi_0\|^3).\tag{8.2.41}$$

根据 (8.2.40) 和 (8.2.41), 方程 (8.2.39) 可表示为

$$\frac{d\psi_0}{dt}=\beta_1(\alpha)\psi_0-g_3(\psi_0)+O(\|\psi_0\|^4,|\beta_1|\|\psi_0\|^3),\tag{8.2.42}$$

其中

$$g_3(\psi_0)=P_1[\beta|\psi_0|^2\psi_0+2A_a\cdot\widetilde{\mathcal{A}}_2\psi_0+2i\mu\widetilde{\mathcal{A}}_2\cdot\nabla\psi_0+i\Phi_2\psi_0],\tag{8.2.43}$$

$$\begin{cases}\text{curl}^2\widetilde{\mathcal{A}}_2+\nabla\phi=-\gamma A_a\cdot|\psi_0|^2-\dfrac{\gamma\mu}{2}i(\psi_0^*\nabla\psi_0-\psi_0\nabla\psi_0^*),\\ \text{div}\widetilde{\mathcal{A}}_2=0,\\ \widetilde{\mathcal{A}}_2\cdot n|_{\partial\Omega}=0,\quad \text{curl}\widetilde{\mathcal{A}}_2\times n|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{8.2.44}$$

方程 (8.2.42)~(8.2.44) 就是 (8.2.38) 在中心流形上约化的近似表达.

第三步. 为了应用定理 5.11, 需要计算 $g_3(\psi_0)$ 与 ψ_0 的内积 $\langle g_3(\psi_0),\psi_0\rangle$. 从 (8.2.43) 得到

$$\begin{aligned}\langle g_3(\psi_0),\psi_0\rangle=&\text{Re}\int_\Omega g_3(\psi_0)\psi_0^*dx\\=&\int_\Omega[\beta|\psi_0|^4+2|\psi_0|^2A_a\cdot\widetilde{\mathcal{A}}_2+2\mu\widetilde{\mathcal{A}}_2\cdot(\psi_2^0\nabla\psi_1^0-\psi_1^0\nabla\psi_2^0)]dx\\=&\int_\Omega[\beta|\psi_0|^4+2|\psi_0|^2A_a\cdot\widetilde{\mathcal{A}}_2+4\mu\psi_2^0\widetilde{\mathcal{A}}_2\cdot\nabla\psi_1^0]dx,\end{aligned}\tag{8.2.45}$$

其中 $\psi_0=\psi_1^0+i\psi_2^0$.

令 $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ 关于 $\mathcal{L}^2(\Omega,R^n)$ 的正交基 (8.2.32) 有如下 Fourier 展开

$$\widetilde{\mathcal{A}}_2=\sum_{k=1}^\infty y_ka_k,$$

则对 (8.2.44), 能够得到解 y_k 为

$$y_k=-\frac{\gamma}{\rho_k}\int_\Omega[|\psi_0|^2A_a\cdot a_k+2\mu\psi_2^0a_k\cdot\nabla\psi_1^0]dx.\tag{8.2.46}$$

将 (8.2.46) 代入 (8.2.45), 可以看到

$$\begin{aligned}\langle g_3(\psi_0),\psi_0\rangle = & \beta\int_\Omega|\psi_0|^4dx-2\gamma\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{\rho_k}\left[\left(\int_\Omega|\psi_0|^2A_a\cdot a_kdx\right)^2\right.\\ & +4\mu\left(\int_\Omega|\psi_0|^2A_a\cdot a_kdx\right)\left(\int_\Omega\psi_2^0a_k\cdot\nabla\psi_1^0dx\right)\\ & \left.+4\mu^2\left(\int_\Omega\psi_2^0a_k\cdot\nabla\psi_1^0dx\right)^2\right].\end{aligned} \tag{8.2.47}$$

令 $\psi_0=x_1e_1+x_2e_2$, 这时 $(x_1,x_2)\in R^2, e_1$ 和 e_2 如 (8.2.27). 有

$$\psi_0=\psi_1^0+i\psi_2^0,\quad \psi_1^0=x_1\psi_{11}-x_2\psi_{12},\quad \psi_2^0=x_1\psi_{12}+x_2\psi_{11}.$$

通过计算得到

$$\int_\Omega|\psi_0|^4dx=\int_\Omega(|\psi_1^0|^2+|\psi_2^0|^2)dx=(x_1^2+x_2^2)^2\int_\Omega e_1^4dx, \tag{8.2.48}$$

$$\int_\Omega|\psi_0|^2A_a\cdot a_kdx=(x_1^2+x_2^2)\int_\Omega|e_1|^2A_a\cdot a_kdx, \tag{8.2.49}$$

$$\int_\Omega\psi_2^0a_k\cdot\nabla\psi_1^0dx=(x_1^2+x_2^2)\int_\Omega\psi_{12}a_k\cdot\nabla\psi_{11}dx. \tag{8.2.50}$$

这里，在 (8.2.49) 中使用了下面等式

$$\int_\Omega\psi a_k\cdot\nabla\psi dx=-\frac{1}{2}\int_\Omega\psi^2\mathrm{div}a_kdx=0,$$

对任何实函数 ψ.

将 (8.2.48)~(8.2.50) 代入 (8.2.47) 有

$$\langle g(\psi_0),\psi_0\rangle=-\gamma R(x_1^2+x_2^2)^2\int_\Omega|e_1|^4dx, \tag{8.2.51}$$

其中 R 如 (8.2.37) 所给. 容易看出由 (8.2.35) 和 (8.2.37) 所定义的两个数是相同的.

第四步. 要证明 Ginzburg-Landau 方程 (8.2.17) 从 $((\psi,A),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 分歧出至少一个稳态解.

形式上有两上 Ginzburg-Landau 稳态方程，一个就是从 (8.2.17) 直接获得的稳态方程

$$\begin{cases}(i\mu\nabla+A_a)^2\psi+i\phi\psi=\alpha\psi-2A_a\cdot\mathcal{A}\psi\\ \qquad\qquad -2i\mu\mathcal{A}\cdot\nabla\psi-\mathcal{A}^2\psi-\beta|\psi|^2\psi,\\ \mathrm{curl}^2\mathcal{A}+\zeta\mu\nabla\phi=-\gamma(A+A_a)|\psi|^2-\frac{1}{2}\gamma\mu i(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*),\end{cases} \tag{8.2.52}$$

另一个就是原始的 Ginzburg-Landau 方程

$$\begin{cases}(i\mu\nabla + A_a)^2\psi = \alpha\psi - 2A_a\cdot\mathcal{A}\psi \\ \qquad\qquad - 2i\mu\mathcal{A}\cdot\nabla\psi - \mathcal{A}^2\psi - \beta|\psi|^2\psi, \\ \mathrm{curl}^2\mathcal{A} = -\gamma(\mathcal{A}+A_a)|\psi|^2 - \dfrac{\gamma\mu i}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*).\end{cases} \tag{8.2.53}$$

(8.2.53) 的形式是 Ginzburg-Landau 在 20 世纪 50 年代作为自由能的 Euler-Lagrange 方程而得到.

Tang 和 Wang[95] 证明了若 $u=(\psi,\mathcal{A})\in H_1$ 和 $\phi\in H^1(\Omega)$ 是 (8.2.52) 的一个解，那么一定有 $\phi=0$, 也就是说， (8.2.52) 和 (8.2.53) 的解是严格一样的.

对方程 (8.2.53),Ginzburg-Landau 能量为

$$E = \frac{1}{2}\int_\Omega [|(i\mu\nabla + \mathcal{A} + A_a)\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 - \alpha|\psi|^2$$
$$+\gamma^{-1}|\mathrm{curl}\mathcal{A}|^2]dx \quad \left(+\frac{\mu^2 C}{2}\int_{\partial\Omega}|\psi|^2dx, 对\ (8.2.20)\right).$$

因此，由势算子的 Krasnoselskii 分歧定理 (定理 4.12)，稳态方程 (8.2.53) 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 分歧出至少一个奇点.

第五步. 定理 8.4 的证明. 当 $R<0$ 时，由定理 5.11 从 (8.2.42) 和 (8.2.51) 可以推知，问题 (8.2.17) 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 分歧出一个吸引子 Σ_α 同胚于一个圆圈 S^1. 由第四步， Σ_α 中含有至少一个奇点. 此外由于 Ginzburg-Landau 方程在下面规范变换下是不变的

$$\psi \to e^{i\theta}\psi, \quad \forall\theta\in R^1,$$

因而 Ginzburg-Landau 方程的稳态解总是作为一圆圈 S^1 出现. 因此 $\Sigma_\alpha = S^1$ 是由 (8.2.17) 的稳态解构成. 这样结论 (1) 得证.

结论 (2) 可由定理 6.2 推出，而结论 (3) 可以直接从方程 (8.2.42) 和 (8.2.51) 得到. 这样，定理 8.4 得证.

第六步. 定理 8.5 的证明. 当 $R>0$ 时，由 (8.2.42) 生成的逆时半群 $S_\alpha(-t)$ 具有同下面方程一样的动力学性质

$$\frac{d\psi_0}{dt} = (\alpha_1-\alpha)\psi_0 + g_3(\psi_0) + o(\|\psi_0\|^3, |\alpha-\alpha_0|\|\psi_0\|^2). \tag{8.2.54}$$

采用与第五步相同的方法, 从 (8.2.51) 可以推出由 (8.2.54) 生成的半群 $\widetilde{S}_\alpha(t)$ 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 在 $\alpha<\alpha_1$ 分歧出一个吸引子 Σ_α , 它由 (8.2.54) 的奇点构成. 因此对于 $R>0$ 情况的 (8.2.42) 所生成的半群 $S_\alpha(t)=\widetilde{S}_\alpha(-t)$, 结论 (1) 和 (2) 成立. 定理得证.

§8.2.4 物理意义评述

超导现象首先是由 H.Kamerlingh Onnes 在 1911 年发现的. 他观察到当温度下降低于某个临界值 T_C 时，水银的电阻突然变为零. 后来人们发现大量的金属与合金都具有超导的性质. 在超导状态下，一旦电流被建立，人们可以期待这个电流可以在长达 10^{10} 年内几乎不发生什么变化. 这种永久的电流就称为超导电流 [101]. 超导体的电流在 Ginzburg-Landau 方程中被 (8.2.2) 所表达. 在稳态情况下，超导电流用第二种无量纲形式可写为

$$J_s = -\gamma A|\psi|^2 - \frac{\gamma\mu}{2}i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \tag{8.2.55}$$

1933 年，超导的另一个重要性质，称为去磁效应或 Meissner 效应被 W.Meissner 和 R.Ochsenfield 观察到. 他们发现当温度冷却到临界值 T_C 以下后，不仅外界磁场被阻止进入一个超导体内，而且在原来正常状态下，样品内的原始磁场也被排斥出超导体之外.

我们必须考虑 Meissner 效应在 Ginzburg-Landau 方程中的作用. 从数学上讲，在正常状态下，一个样品中的磁场强度 H 应该是 $H = H_a + \mathcal{H}$, 这里 $H_a = \mathrm{curl}A_a$ 是外界施加磁场， $\mathcal{H} = \mathrm{curl}\mathcal{A}$ 是由平衡态的涨落造成的，而在超导状态下， $H = \mathrm{curl}\mathcal{A}$. 在这两种状态下 $\mathcal{A}$ 都满足 Ginzburg-Landau 方程 (8.2.17). 也就是说，我们能够表达一个样品 Ω 中的磁场强度在如下形式

$$H = \mathrm{curl}A, \quad x \in \Omega, \tag{8.2.56}$$

其中

$$A = \begin{cases} A_a + \mathcal{A}, & \text{在正常状态}, \\ \mathcal{A}, & \text{在超导状态}. \end{cases} \tag{8.2.57}$$

在无量纲形式超流为

$$J_s = \mathrm{curl}^2\mathcal{A}. \tag{8.2.58}$$

这里 $\mathcal{A}$ 满足 (8.2.17). 方程 (8.2.56)~(8.2.58) 就是 Meissner 效应的数学形式.

1. *没有外加磁场的情况*

Ginzburg-Landau 方程 (8.2.17) 的一个平衡态 $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathcal{A}})$ 被称为是正常状态，如果 $\widetilde{\psi} = 0$, 而 $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\mathcal{A}})$ 被称为是超导状态，如果 $\widetilde{\psi} \neq 0$. (8.2.17) 的一个解 $(\psi, \mathcal{A})$ 被称为是处在正常状态，若 $(\psi, \mathcal{A})$ 是在一个正常平衡态的吸引域内，否则 $(\psi, \mathcal{A})$ 被说成是在超导状态.

首先考虑最简单的情况，即外加磁场是为零 $A_a = 0$. 在这种情况下，特征

方程 (8.2.23) 变为

$$\begin{cases} -\mu\Delta\psi = \alpha\psi, \\ \psi\text{满足边界条件 (8.2.18)}\sim\text{(8.2.20) 中的一个}. \end{cases} \tag{8.2.59}$$

我们知道 (8.2.59) 的第一特征值 α_1 是单的，并且特征向量的实部与虚部相同 $e = \psi + i\psi$. 因此由 (8.2.25) 定义的参数为

$$R = -\frac{\beta}{\gamma} < 0.$$

由定理 8.4, 当 $\alpha(T) < \alpha_1$ 时， (8.2.17) 的解 $(\psi, \mathcal{A})$ 是在正常状态，而当 $\alpha(T) > \alpha_1$ 时，并且初值 $(\psi_0, \mathcal{A}_0) \in U/\Gamma$ 时， $(\psi, \mathcal{A})$ 是在超导状态.

当 $A_a = 0$ 时， (8.2.17) 的稳态解 $(\widetilde{\psi}, \widetilde{A}) = (e^{i\theta}\psi, 0)$ 对某个实函数 ψ. 因此

$$\widetilde{\psi}^*\nabla\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi}\nabla\widetilde{\psi}^* = 0.$$

这意味着超流 (8.2.58)(或 (8.2.55)) 为零，即

$$J_s = 0.$$

这表明在没有外加磁场的情况下，在一个超导体内没有超导电流，尽管已经发生了超导的相变.

对于 Neumann 边界条件 (8.2.18), 即样品是被绝缘体所围， (8.2.59) 的第一特征值 $\alpha_1 = 0$, 它与样品 Ω 的几何尺寸无关. 因而自然条件 (8.2.33) 总是成立.

然而，对于 Dirichlet 边界条件 (8.2.19) 和 Robin 边界条件 (8.2.20) 情况就不同了. 我们知道 (8.2.59) 的第一特征值依赖于 Ω. 特别地有下面关系

$$\alpha_1 = \alpha_1(\Omega) \to \infty, \quad \text{当}|\Omega| \to 0,$$

这里 $|\Omega|$ 为 Ω 的体积. 自然条件 (8.2.33) 意味着对这两种情况，即样品被磁性材料和正常金属所围时，样品的体积必须大于某个临界值 $|\Omega| > V_C > 0$, 否则不管在什么温度下没有超导状态发生. 这种性质对存在一个外加磁场的情况也成立，当然此时临界体积 V_C 也依赖于外加磁场 H_a.

2. 关于 $R < 0$ 超导相变 (第二类相变)

考虑有外加磁场 $H_a = \text{curl}A_a$ 存在的情况. 由跃迁定理 (定理 8.4), 发生超导相变的临界温度 $T_C^1 < T_C$, 这里 T_C 是由 (8.2.5) 给出，而 T_C^1 满足

$$\alpha(T_C^1) = \alpha_1 > 0, \tag{8.2.60}$$

$\alpha_1 = \alpha_1(A_a)$ 是 (8.2.23) 的第一特征值，满足

$$\alpha_1(A_a) \to \infty, \quad \text{若}|A_a| \to \infty.$$

这意味着外加磁场不能非常强，否则自然条件 (8.2.33) 将被破坏而没有超导相变发生.

从定理 8.4 和 8.5 我们看到，由 (8.2.35) 所定义的参数 R 是区别两类不同相变的重要判据. 首先考察 $R<0$ 的情况.

由定理 8.4, 当 $\alpha>\alpha_1$(即 $T<T_C^1$) 时，方程 (8.2.17) 发生连续性跃迁，即 (8.2.17) 从 $((\psi,\mathcal{A}),\alpha)=(0,\alpha_1)$ 分歧出一个 S^1 吸引子，它由稳态解构成并吸引一个开集 U/Γ. 从物理角度来说这个定理导致下面关于 $R<0$ 情况下的超导体发生相变的物理性质. 我们总结成一个物理相变定理.

定理 8.7(物理相变定理 I) 令 $R<0$ 及 $m=1$ 在 (8.2.27) 中. 那么对于 (8.2.60) 所给的临界温度 T_C^1, 下面物理性质成立:

(1) 当控制温度 T 下降 (或提高) 穿过临界温度 T_C^1 时，样品将从正常状态到超导状态 (或从超导状态到正常状态) 发生一个相变;

(2) (稳定性) 当控制温度 $T\geqslant T_C^{-1}$ 时，在一个偏离正常状态的涨落下，该样品将很快恢复到正常状态. 此外，当 $T<T_C^1$ 在一个偏离正常或超导状态下的涨落下，该样品将很快处在一个稳态超导状态中;

(3) 在一般情况下，由下式给出的超导电流

$$J_s(\alpha)=-\gamma\mathcal{A}_\alpha|\psi|^2-\frac{\mu\gamma}{2}i(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*)$$

是非零的，即 $J_s\neq 0$ 对 $\alpha_1<\alpha(T<T_C^*)$;

(4)(连续性) 序参数 ψ_α 和超导电流 $J_s(\alpha)$ 连续地依赖于参数 α(或控制温度 T), 即

$$\psi_\alpha\to 0,\quad J_s(\alpha)\to 0,\quad 若\alpha\to\alpha_1+0,\quad 或T\to T_C^1-0;$$

(5) ψ 的临界相变指数 $\beta_1=\dfrac{1}{2}$, J_s 的相变指数 $\beta_2=1$ 正如 (8.2.36) 所表示的那样;

(6) 系统的超导状态是由 (8.2.23) 的最低能量特征函数所控制，这由 (8.2.36) 可以看出.

3. 关于 $R>0$ 的超导相变 (第一类相变)

当 $R>0$ 时，超导相变的性质与 $R<0$ 的情况完全不同，这种相变的特征是跳跃式的，它严格地被定理 8.5 和 8.6 所描述，如图 8.2 和 8.3 所示. 下面我们将其总结为物理的相变定理 II.

定理 8.8(物理相变定理 II) 令 $R>0$ 及 $m=1$ 在 (8.2.27) 中，那么有两个临界温度 T_C^0 和 $T_C^1(T_C^0>T_C^1)$, 使得 $\alpha(T_C^i)=\alpha_i(i=0,1)$, 并且下面物理性质成立:

(1) 当控制温度 T 下降并穿过 T_C^1 时，或等价地， α 增加并且穿过 α_1 时，样品的正常状态稳定性发生变化，从稳定变为不稳定;

(2) 当 $T_C^1 < T < T_C^0$(或 $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$) 时，样品的正常状态和超导状态都是物理上可能可以观察到的状态，而当 $T < T_C^1$(或 $\alpha_1 < \alpha$) 时，只有超导状态能够被观察到. 超导状态是在 Σ_α^2 中，如图 8.2 所示；

(3) (不稳定性) 当控制温度是在区间 $T_C^1 < T < T_C^0$(或 $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$) 时，在 Σ_α^1 中的超导状态是不稳定的，即一个偏离 Σ_λ^1 中超导状态的涨落将导致不是到正常状态就是到 Σ_α^2 中超导状态的相变；

(4) (不连续性) 在相变的临界温度 T_C^0 和 T_C^1 有一个不连续的跳跃. 当温度上升穿过 T_C^0 时，样品将从超导状态突然跳跃到正常状态，而当温度下降穿过 T_C^1 时，将从正常状态跳跃到一个超导状态；

(5) 其他能级的特征函数对超导状态可能有一个较强的影响.

需要指出的是，几乎对所有的外加磁场 A_a 和 Ω, 特征方程 (8.2.23) 的第一特征值 α_1 都是复单的，即 $m=1$ 在 (8.2.27) 中，对于可能出现的 $m>1$ 情况讨论可参见文献 [52,59].

4. R 的物理意义

注意到，物理参数 β/γ 能够被 Ginzburg-Landau 参数 κ 和参数 μ 所表征

$$\frac{\beta}{\gamma}=\kappa^2\mu^2,\quad \kappa^2=\frac{m_s^2c^2b}{2\pi e_s^2h^2},\quad \mu^2=\frac{hD}{e_s\sqrt{b}}. \tag{8.2.61}$$

在 Ginzburg-Landau 自由能中，这一项

$$E_0=\int_\Omega |e|^4dx \tag{8.2.62}$$

代表了最低能量态的超导电子所具能量，及

$$E_m=\int_\Omega H_0^2dx,\quad H_0=\text{curl}\mathcal{A}_0\text{满足 (8.2.34)} \tag{8.2.63}$$

代表由下面电流产生磁场所贡献的能量

$$\text{curl}H_0=|e|^2A_a+\frac{\mu i}{2}(e^*\nabla e-e\nabla e^*),$$

该电流是由外加磁场和最低能量态超导电子所生成.

由 (8.2.35), 从 (8.2.61)~(8.2.63) 得到

$$R=-\kappa^2\mu^2+\frac{2E_m}{E_0}.$$

因此，对于一给定的材料，上述两种相变模式取决于两个能量 E_0 和 E_m 之间的"竞争"

$$R\begin{cases}<0 & \text{若}\dfrac{\kappa^2}{2}E_0>\dfrac{2E_m}{\mu^2},\\ >0, & \text{若}\dfrac{\kappa^2}{2}E_0<\dfrac{2E_m}{\mu^2}.\end{cases} \tag{8.2.64}$$

根据 Abrikosov 理论，当 $\kappa^2 < \dfrac{1}{2}$ 时，样品属于 I 型材料，当 $\kappa^2 > \dfrac{1}{2}$ 时，为 II 型材料. 从 (8.2.64) 可以看到对于给定的外加磁场和样品的几何形状，I 型材料更倾向于跳跃式的相变 (即 $R > 0$ 情况)，而 II 型材料倾向于连续性相变 (即 $R < 0$ 情况).

5. 超导电流的拓扑结构

1957 年， Abrikosov 预言在 II 型材料的超导体混合态中，有正方排列的漩涡，称为 Abrikosov 漩涡存在. 后来实验验证了这种漩涡的存在性.

当样品 Ω 是一个二维平板时，由定理 8.7 和 8.8 产生的超导相变其超导电流一般不为零，即

$$\begin{cases} J_s \neq 0, & \text{在}\Omega\text{中}, \\ \mathrm{div} J_s = 0, & J_s \cdot n|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8.2.65}$$

根据 (8.2.65)，在 §8.1 介绍的二可压缩向量场的几何理论能够被应用到研究超导电流的拓扑结构上.

由公式 (8.1.1)，立刻可以得到下面超导电流的漩涡存在性物理定理.

定理 8.9(超导电流漩涡结构定理) 令样品的 Ω 是一个二维单连通区域，即 $k = 0$ 在 (8.1.1) 中. 如果在定理 8.7 和 8.8 中所描述的超导状态下，超导电流 J_s 在 Ω 中不为零，则 J_s 至少有一个漩涡.

当 $R < 0$ 时，由定理 8.4 可以看到，在分歧出的吸引子中的超导状态 $(\psi, \mathcal{A})$ 是由 (8.2.23) 的第一特征向量 e 所控制. 也就是说，从 (8.2.36) 和结构稳定性定理 (定理 8.1)，分歧出的超导态 $(\psi, \mathcal{A})$ 的超导电流 J_s 拓扑结构是由下面向量场的结构所决定

$$\begin{cases} J_0 = -A_a|e|^2 - \dfrac{\mu}{2} i(e^* \nabla e - e \nabla e^*) + \nabla\phi, \\ \mathrm{div} J_0 = 0, \\ J_0 \cdot n|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{8.2.66}$$

需要强调指出，由 (8.2.66) 定义的向量场完全由外加磁场 A_a 所决定，这是因为一旦 A_a 被给定， (8.2.23) 的第一特征向量 e 也被确定. 结构稳定性定理说明，对几乎所有的 A_a，在 (8.2.66) 的 J_0 是结构稳定的. 因而从物理上能观测到的超导电流都是结构稳定的. 这样，我们对超导电流的结构可总结为下面定理.

定理 8.10 当 $R < 0$ 时，对几乎所有的外加磁场 A_a，在 (8.2.66) 的 J_0 是结构稳定的. 因而存在 $\tau > 0$ 和一个时间 $t_0 > 0$，使得如果温度 T 满足 $T_C^1 - \tau < T < T_C^1$，则对任何由涨落引起的初值 $(\psi_0, \mathcal{A}_0) \in U/\Gamma$，这里 U/Γ 如定理 8.4，由 (8.2.17) 的解 $(\psi_\alpha(t), \mathcal{A}_\alpha(t))$ 产生的超导电流

$$J_s(\psi_\alpha(t), \mathcal{A}_\alpha(t)) = \mathrm{curl}\mathcal{A}_\alpha(t)$$

对 $t > t_0$ 是结构稳定的，并且拓扑等价于 J_0.

§8.3　Rayleigh-Benard 对流

§8.3.1　Benard 实验

对流是流体运动的一个众所周知的现象，它是当流体底部加热后由热膨胀产生的浮力造成的. 人们不仅从日常的烧开水中熟知对流现象，并且在大气与海洋环流引起的气候变化中也能感知它.

Rayleigh-Benard 对流问题的研究起源于 1900 年由 H.Benard 所做的一个著名的实验. Benard 置一个水平盘子，其高度 h 远小于盘子的直径，并在盘子中盛有液体，如水、油、水银等. 保持这些流体上表面与空气接触，然后在盘子底部均匀地加热. 当加热的温度小于某一个临界值时，该液体保持静止不动. 而当温度一超过这个临界值时，液体突然出现规整的对流图案. 该对流是沿着一些轴心朝上运动，到了表面后向四周扩散，然后沿着一个多边形的边界朝下流动. 每一个轴心形成一个多边形柱体的对流单元. 从俯视看它们大多是六边形，从侧视看它们是如图 8.4 所示的对流卷形状.

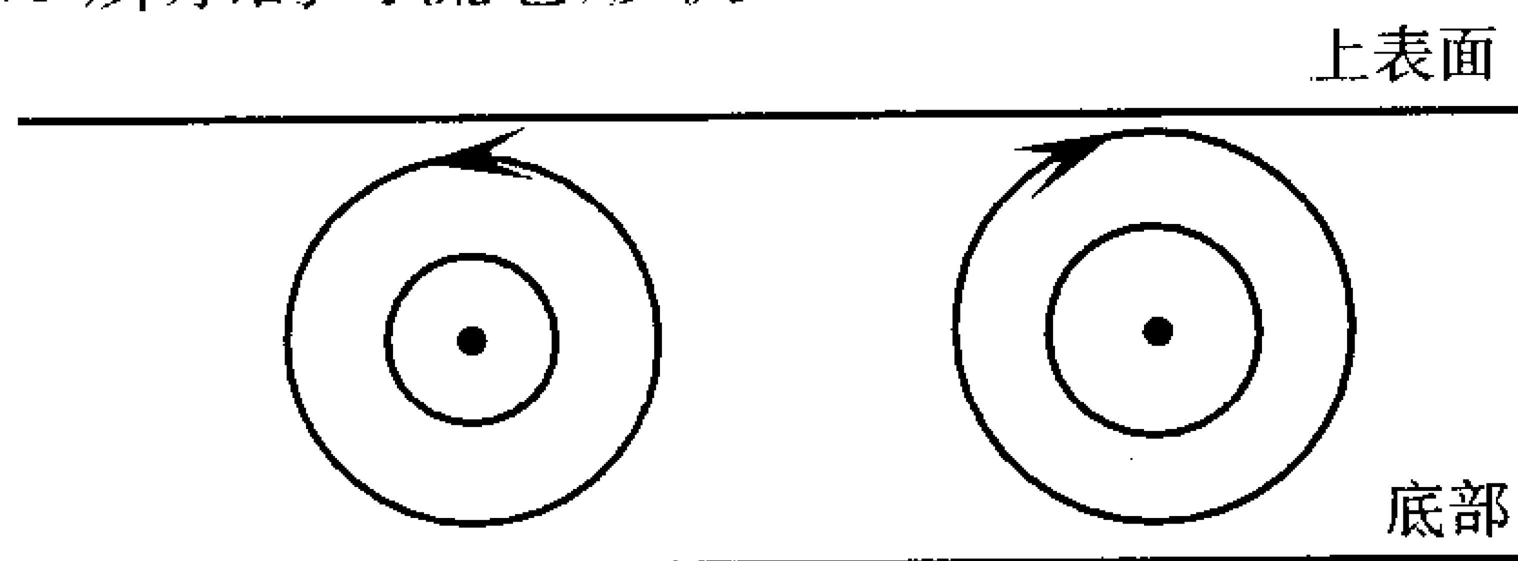


图 8.4　Benard 实验的对流侧视图

1916 年，Lord Rayleigh [87] 提出一个理论来解释 Benard 实验的对流现象. 他选择 Boussinesq 方程及水平周期边界条件作为 Benard 实验的控制方程，取线性化方程的法向模式求得临界特征值 R_c. 然后推断只有当下面无量纲参数（称为 Rayleigh 数）

$$R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}h^4 \tag{8.3.1}$$

超过某个临界特征值时，热对流才发生. 其中，g 是重力加速度，α 为热膨涨系数，$\beta = (\bar{T}_0 - \bar{T}_1)/h$ 为底部与上表面温度差，κ 是热扩散系数，ν 为黏性系数，h 为盘子高度.

Rayleigh 所提出的是一个线性理论，在他的分析中将 Boussinesq 方程的非线性项去掉，只考虑线性化方程. 然而他的推断是正确的，并被后来的实验所证实. 自 Rayleigh 的先驱性工作后，Rayleigh-Benard 对流问题被广泛的研究. 对于线性理论的进一步发展可参见文献 [8,17].

但是对于 Rayleig-Benard 对流问题，一个完备的非线性理论仍然是需要的，以深化对该问题的理解. 在这一节，应用在第六章中提出的吸引子分歧理论，再结合 §8.1 中介绍的二维不可压缩流的几何理论，对 Rayleigh- Benard 对流问题发展了一套非线性理论，它包括：

(1) 对所有物理上合理的边界条件，关于 Boussinesq 方程当 Rayleigh 数穿过第一特征值时建立了吸引子分歧定理 (或连续性跃迁定理)；

(2) 分歧出新的解是渐近稳定的，并且吸引整个空间中的几乎所有的解;

(3) 证明了 Boussinesq 方程几乎所有解都以 (8.2.2) 所示的对流卷作为其渐近结构.

§8.3.2 Boussinesq 方程

Rayleigh-Benard 对流能够被 Boussinesq 方程所控制 [8,17,87], 该方程为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u-\nu\Delta u+\rho_0^{-1}\nabla\rho=-gk[1-\alpha(T-\bar{T}_0)], \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T-\kappa\Delta T=0, \\ \mathrm{div}u=0, \end{cases} \tag{8.3.2}$$

其中 g 是重力加速度， ρ_0 为质量密度， ν 为黏性系数， α 为膨涨系数， κ 为热扩散系数， $k=(0,0,1)$ 为 x_3 方向的单位向量， $u=(u_1,\cdots,u_n)(n=2,3)$ 为速度场 ,p 为压力函数， T 为温度函数， $\bar{T}_0$ 为底部温度.

令区域 $\Omega=D\times(0,h),D\subset R^m(m=1,2)$ 为一开集， $x=(x',x_3)\in\Omega,x'\in D,X_3\in(0,h)$. 假设在底部 $x_3=0$ 和顶部 $x_3=h$ 的温度为

$$T=\bar{T}_0,\quad 在x_3=0;\quad T=\bar{T}_1,\quad 在x_3=h.$$

为了使方程 (8.3.2) 无量纲化，令

$$\begin{aligned} &x=hx',\quad t=h^2t'/\kappa,\quad u=\kappa u'/h,\\ &T=\beta h(T'/\sqrt{R})+\bar{T}_0-\beta hx_3',\\ &p=\rho_0\kappa^2p'h^2-g\rho_0(hx_3'+\alpha\beta h^2(x_3')^2/2),\\ &P_r=\nu/\kappa, \end{aligned}$$

其中 $\beta=(\bar{T}_0-\bar{T}_1)/h,R$ 为 Rayleigh 数如 (8.3.1) 所定义， P_r 为 Prandtl 数.

省去上撇，方程 (8.3.2) 的无量纲形式可写为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p\right]-\Delta u-\sqrt{R}Tk=0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T-\sqrt{R}u_3-\Delta T=0, \\ \mathrm{div}u=0. \end{cases}$$

无量纲区域为 $\Omega=D\times(0,1)$. 方程配以初值为

$$(u,T)=(u_0,T_0),\quad 在t=0.$$

在 $\partial\Omega$ 的顶点、底部及侧边界 $\partial D\times(0,1)$ 的边界条件需要考虑. 在顶部和底部 $x_3=0,1$, 对于无量纲的 T 边界条件为

$$T=0,\quad 在\ x_3=0,1.$$

对于 u 在 $x_3=0,1$ 有三种边界条件

$$u=0,\quad 在\ x_3=0,1, \tag{8.3.3}$$

$$u_3=0,\quad \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_3}=0,\quad 在\ x_3=0,1,\quad \widetilde{u}\in D, \tag{8.3.4}$$

$$\begin{cases} u=0, & 在x_3=0,\\ u_3=0,\quad \dfrac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_3}=0, & 在x_3=1,\quad \widetilde{u}\in D. \end{cases} \tag{8.3.5}$$

(8.3.3)~(8.3.5) 分别称为刚性 − 刚性, 自由 − 自由及刚性 − 自由边界条件, 它们适用于不同的物理情况. 具体的物理意义详细可见后面物理评论一节.

在侧边界 $\partial D\times(0,1)$, 下面的边界条件都是具有物理意义. 在不同的物理条件下, 通常采用它们中的一个.

(1) Dirichlet 边界条件

$$u=0,\quad T=0,\quad 或\frac{\partial T}{\partial n}=0, \tag{8.3.6}$$

(2) 自由边界条件

$$u_n=0,\quad \frac{\partial u_n}{\partial\tau}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial n}=0,\quad 或T=0, \tag{8.3.7}$$

其中 n 和 τ 分别为 $\partial D\times(0,1)$ 上的法向量和切向量.

(3) 周期边界条件

$$(u,T)(\widetilde{x}+KL,x_3)=(u,T)(\widetilde{x},x_3), \tag{8.3.8}$$

其中 $\widetilde{x}\in D, KL=(k_1L_1,k_2L_2)$.

综上所述, 描述 Rayleigh-Benard 对流的完备数学问题可归为如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p\right]-\Delta u-\sqrt{R}Tk=0,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T-\sqrt{R}u_3-\Delta T=0,\\ \mathrm{div}u=0,\\ T=0,\quad 在x_3=0,1,\\ u的边界条件取\ (8.3.3)\sim(8.3.5)\ 与\ (8.3.6)\sim(8.3.8)\ 的\\ 各种不同组合中的一个,\\ (u,T)=(u_0,T_0),\quad 在t=0. \end{cases} \tag{8.3.9}$$

建立空间框架如下

$$H = \{(u,T) \in L^2(\Omega, R^n) \times L^2(\Omega)|\ \text{div}u = 0, \quad u_3|_{x_3=0,1} = 0\},$$

$$H_1 = \{(u,T) \in H^2(\Omega, R^n) \times H^2(\Omega)|\text{div}u = 0, u\text{满足 (8.3.9) 中的边界条件}\}.$$

§8.3.3 Rayleigh-Benard 问题的吸引子分歧

问题 (8.3.9) 的线性化方程由下面给出

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p - \sqrt{R}Tk = 0, \\ -\Delta T - \sqrt{R}u_3 = 0, \\ \text{div}u = 0, \end{cases} \tag{8.3.10}$$

这里 R 为 Rayleigh 数，边界条件与 (8.3.9) 一致.

关于 Rayleigh 数 R 的特征值方程 (8.3.10) 是对称的. 因此 (8.3.10) 的所有特征值 $R_k(k = 1, 2, \cdots)$ 是实数，并且表示为

$$0 < R_1 \leqslant R_2 \leqslant \cdots \leqslant R_k \leqslant \cdots.$$

第一特征值 R_1, 也记为 $R_C = R_1$, 被称为临界 Rayleigh 数. 令 R_C 的重数为 $m(m \geqslant 1)$ 以及 (8.3.10) 的第一特征函数为 $\Psi_i = (e_i, T_i) \in H_1(1 \leqslant i \leqslant m)$, 满足正交性

$$\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle_H = \int_\Omega [e_i \cdot e_j + T_i T_j] dx = \delta_{ij}.$$

记 E_0 是 (8.3.10) 的第一特征向量空间

$$E_0 = \left\{ \sum_{k=1}^m \alpha_k \Psi_k |\ \alpha_k \in R^1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m \right\}.$$

下面给出的是关于问题 (8.3.9) 的 S^m 吸引子分歧定理，它们是建立 Rayleigh-Benard 对流问题非线性理论的基础.

定理 8.11 对于 Rayleigh-Benard 问题 (8.3.9), 有如下结论:

(1) 当 Rayleigh 数小于或等于临界 Rayleigh 数时， $R \leqslant R_C$,(8.3.9) 的稳态解 $(u, T) = 0$ 是全局渐近稳定的;

(2) 当 $R > R_C$ 时， (8.3.9) 从 $((u, T), R) = (0, R_C)$ 分歧出一个吸引子 Σ_R, 当 $m > 1$ 时， Σ_R 是连通的，并且是一个 $(m-1)$ 维的同调球.

(3) 对任何 $(u, T) \in \Sigma_R$, 其速度场 u 可表示为

$$u = \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k + o\left(\sum_{i=1}^m \alpha_k e_k \right), \tag{8.3.11}$$

其中 e_k 是 E_0 中第一特征向量的速度场.

(4) 分歧出的吸引子 Σ_R 吸引 H/Γ, 这里 Γ 为 $(u,T)=0$ 的稳定流形有余维 m 在 H 中.

定理 8.12 如果 (8.3.10) 的第一特征值 $R_1=R_C$ 是单的, 即 $\dim E_0=1$, 那么问题 (8.3.9) 从 $((u,T),R)=(0,R_C)$ 分歧出的吸引子 Σ_R 是由严格两个奇点构成: $\Sigma_R=\{\phi_1,\phi_2\}$. 并且下面结论成立:

(1) ϕ_1 和 ϕ_2 可表达为

$$\begin{cases}\phi_1=\alpha(R-R_C)^{\frac{1}{2}}\Psi_1+o(|R-R_C|^{\frac{1}{2}}),\\ \phi_2=-\alpha(R-R_C)^{\frac{1}{2}}\Psi_1+o(|R-R_C|^{\frac{1}{2}}),\end{cases}\tag{8.3.12}$$

其中 $\alpha>0$ 为一常数, Ψ_1 为 (8.3.10) 的第一特征向量;

(2) H 能够分解为两个开集 $H=\bar{U}_1+\bar{U}_2, U_1\cap U_2=\phi$, 并且 $\phi_i\in U_i(i=1,2)$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|S_R(t)\phi_0-\phi_i\|=0,\quad \forall\phi_0\in U_i(i=1,2),$$

其中 $\phi_0=(u_0,T_0), S_R(t)\phi_0$ 为 (8.3.9) 的解.

定理 8.11 的证明 分几步进行证明.

第一步. 首先, 不失一般性, 假设 Pramdtl 数 $P_r=1$, 否则必须考虑 (8.3.9) 的下面等价形式, 并且其证明是一样的.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p-P_r\Delta u-\sqrt{R}\sqrt{P_r}\theta k=0,\\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\theta-\sqrt{R}\sqrt{P_r}u_3-\Delta\theta=0,\\ \mathrm{div}u=0,\end{cases}$$

其中 $\theta=\sqrt{P_r}T$.

然后定义映射 $L_\lambda=-A+\lambda B$ 和 $G:H_1\to H$ 如下

$$\begin{cases}A\phi=(-P(\Delta u),-\Delta T),\\ B\phi=(P(Tk),u_3),\\ G(\phi)=(-P[(u\cdot\nabla)u],-(u\cdot\nabla)T),\end{cases}\tag{8.3.13}$$

对任何 $\phi=(u,T)\in H_1$, 其中 $\lambda=\sqrt{R}$ 以及 $P:L^2(\Omega,R^n)\to H$ 是 Leray 投影. 这样问题 (8.3.9) 可写成如下算子方程

$$\begin{cases}\dfrac{d\phi}{dt}=L_\lambda\phi+G(\phi),\quad \phi\in H_1\\ \phi(0)=\phi_0.\end{cases}\tag{8.3.14}$$

由 (8.3.13) 定义的算子满足下面性质:

(i) 线性算子 $L_\lambda = -A + \lambda B$ 是对称的;

(ii) 非线性算子是正交算子，即

$$\langle G(\phi), \phi \rangle_H = 0, \quad \forall \phi \in H_1; \tag{8.3.15}$$

(iii) 由 (8.3.13) 定义的算子 $L_\lambda = -A + B$ 和 $G : H_1 \to H$ 满足条件 (6.0.2) 和 (6.0.3).

第二步. 现在需要验证条件 (6.2.1) 和 (6.2.2). 考虑下面特征值问题

$$L_\lambda \phi = \beta(\lambda)\phi, \quad \phi = (u, T) \in H_1. \tag{8.3.16}$$

特征值问题 (8.3.16) 是等价于下面方程

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla \rho - \lambda T k + \beta(\lambda) u = 0, \\ -\Delta T - \lambda u_3 + \beta(\lambda) T = 0, \\ \text{div} u = 0, \\ (u, T)\text{满足 (8.3.9) 的边界条件}. \end{cases} \tag{8.3.17}$$

由对称算子特征值理论知, (8.3.16)(或 (8.3.17)) 的所有特征值 $\beta_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是实数，并且满足

$$\begin{cases} \beta_1(\lambda) \geqslant \beta_2(\lambda) \geqslant \cdots \geqslant \beta_k(\lambda) \geqslant \cdots, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k(\lambda) = -\infty. \end{cases} \tag{8.3.18}$$

在 (8.3.18) 中的第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 与 (8.3.10) 的第一特征值 $\lambda_1 = \sqrt{R_C}$ 之间有如下关系

$$\beta_1(\lambda) \begin{cases} < 0, & \text{若} 0 \leqslant \lambda - \lambda_1, \\ = 0, & \text{若} \lambda = \lambda_1. \end{cases} \tag{8.3.19}$$

为了证明 (6.2.1) 和 (6.2.2), 由 (8.3.18) 和 (8.3.19), 只需证明

$$\beta_1(\lambda) > 0, \quad \text{当} \lambda > \lambda_1. \tag{8.3.20}$$

因为 (8.3.17) 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 具有最小性质

$$-\beta_1(\lambda) = \min_{(u,T)\in H_1} \frac{\displaystyle\int_\Omega [|\nabla u|^2 + |\nabla T|^2 - 2\lambda T u_3] dx}{\displaystyle\int_\Omega [T^2 + u^2] dx}. \tag{8.3.21}$$

很清楚对应于 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_1$ 的第一特征向量 $(e,\varphi)\in H_1$ 满足下面关系

$$\int_\Omega[|\nabla e|^2+|\nabla\varphi|^2-2\lambda e_3\varphi]dx\begin{cases}=0, & 当\lambda=\lambda_1,\\ <0, & 当\lambda>\lambda_1.\end{cases}\tag{8.3.22}$$

这样，(8.3.20) 可从 (8.3.21) 和 (8.3.22) 推出．于是条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 对 L_λ 的特征值 (8.3.18) 成立.

第三步．最后，为了应用定理 6.2 来证明定理 8.11, 将证明状态 $(u,T)=0$ 是问题 (8.3.9) 在临界 Rayleigh 数 $\lambda_1=\sqrt{R_C}$ 是全局渐近稳定的平衡点.

由定理 3.11, 只需证明方程 (8.3.9) 在 (8.3.10) 的第一特征空间 E_0 中除了平凡稳态解 $(u,T)=0$ 外没有其他不变集.

因为问题 (8.3.9) 在 H 中存在一个全局吸引子 [20]．因此，所有不变集在 H 中是一致有界的．假设 (8.3.14) 在 $\lambda_1=\sqrt{R_C}$ 有一个不变集 $B\subset E_0, B\neq\{0\}$. 那么 B 中元素都是 (8.3.14) 的线性部分 L_λ 对应于 $\beta_1(\lambda_1)=0$ 的特征向量．限制在 E_0 上，方程 (8.3.9) 取如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T=0,\\ \text{div}u=0,\end{cases}\tag{8.3.23}$$

$\forall(u,T)\in E_0$. 容易看出，对于 (8.3.23) 的解 $(u,T)\in B$, 函数 $(\widetilde{u},\widetilde{T})=\alpha(u(\alpha(t)),T(\alpha t))\in\alpha B\subset E_0$ 也是 (8.3.23) 的解．即对任何实数 $\alpha\in R^1$, 集合 $\alpha B\subset E_0$ 也是 (8.3.14) 的一个不变集．这样，推出 (8.3.14) 在 $\lambda=\lambda_1$ 有一个无界的不变集，这与 (8.3.14) 存在一个全局吸引子的结论矛盾．因此 (8.3.14) 在 $\lambda=\lambda_1$ 的不变集 B 只能由 $(u,T)=0$ 构成．由定理 6.2, 我们能够得到该定理．证毕.

定理 8.12 的证明　由定理 8.11, 只需证明方程 (8.3.14) 从 $(\phi,\lambda)=(0,\lambda_1)$ 在 $\lambda>\lambda_1$ 严格地分歧出两个奇点 ϕ_1 和 $\phi_2\in H_1$, 并且满足 (8.3.12)．下面将应用 Lyapunov-Schmidt 约化来证明这一结论.

因为算子由 (8.3.13) 定义的算子 $L_\lambda:H_1\to H$ 是一个对称全连续场，其所有特征向量

$$\{\Psi_k|k=1,2,\cdots\}\subset H_1\tag{8.3.24}$$

构成 H 的一个正交基 (见定理 4.2), 并且 H 能够分解为

$$\begin{aligned}&H=E_0^\lambda\oplus E_1^\lambda,\\ &E_0^\lambda=\{x\Psi_1|\ x\in R^1,\quad \Psi_1为L_\lambda第一特征向量\},\\ &E_1^\lambda=\left\{\sum_{k=2}^\infty y_k\Psi_k\in H|\ y_k\in R^1,\quad \Psi_k如(8.3.24)\right\}.\end{aligned}$$

此外，E_0^λ 和 E_1^λ 都是 L_λ 的不变子空间.

令 $P_1: H \to E_1^\lambda$ 为规范投影. 对任意 $\phi \in H$,

$$\phi = x\Psi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} y_k \Psi_k, x, \quad y_k \in R^1.$$

方程 $L_\lambda \phi + G(\phi) = 0$ 能够被分解为

$$\beta_1(\lambda)x + \langle G(\phi), \Psi_1 \rangle_H = 0, \tag{8.3.25}$$

$$\beta_k(\lambda)y_k + \langle G(\phi), \Psi \rangle_H = 0, \quad k = 2, 3, \cdots, \tag{8.3.26}$$

其中 $\beta_j(\lambda)$ 为 L_λ 的特征值，满足 (8.3.18)~(8.3.20), 即

$$\beta_1(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_1, \\ = 0, & \lambda = \lambda_1, \\ > 0, & \lambda > \lambda_1, \end{cases} \tag{8.3.27}$$

$$\beta_j(\lambda_1) < 0, \quad \forall j \geqslant 2. \tag{8.3.28}$$

另一方面，由 (8.3.13) 定义的 G 是一个二重线性算子，并且

$$\begin{cases} \langle G(u,v), w \rangle_H = -\langle G(u,w), v \rangle, \\ \langle G(u,v), v \rangle_H = 0, \quad \forall u, v, w \in H_1. \end{cases} \tag{8.3.29}$$

从 (8.3.25) 和 (8.3.29) 可推出

$$\beta_1(\lambda)x - \sum_{k=2}^{\infty} x y_k \langle G(\Psi_1), \Psi_k \rangle_H + O(\|y\|^2) = 0. \tag{8.3.30}$$

从 (8.3.26) 和 (8.3.29) 可得到

$$y_k = -\frac{x^2}{\beta_k(\lambda)} \langle G(\Psi_1), \Psi_k \rangle_H + o(|x|^2), \quad k \geqslant 2. \tag{8.3.31}$$

将 (8.3.31) 代入 (8.3.30) 得

$$\beta_1(\lambda)x - ax^3 + o(|x|^3) = 0, \tag{8.3.32}$$

其中

$$a = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{-\beta_k(\lambda)} \langle G(\Psi_1), \Psi_k \rangle_H^2 > 0, \quad \text{在}\lambda = \lambda_1\text{附近 (由 8.95)}.$$

方程 (8.3.32) 是 (8.3.14) 的 Lyapunov-Schmidt 约化分歧方程，它决定了 (8.3.14) 奇点的分歧. 从 (8.3.27) 可以看到方程 (8.3.32) 从 $(x, \lambda) = (0, \lambda_1)$ 在 $\lambda > \lambda_1$ 分歧出严格两个奇点 x_1 和 x_2

$$x_{1,2} = \pm(\beta_1(\lambda)/a)^{\frac{1}{2}} + o(|\beta_1|^{\frac{1}{2}}).$$

因而方程 (8.3.14) 从 $(\phi,\lambda)=(0,\lambda_1)$ 分歧出严格两个解

$$\begin{cases}\phi_1 = b\beta_1^{\frac{1}{2}}(\lambda)\Psi_1 + o(|\beta_1|^{\frac{1}{2}}),\\ \phi_2 = -b\beta_1^{\frac{1}{2}}(\lambda)\Psi_1 + o(|\beta_1|^{\frac{1}{2}}),\end{cases} \tag{8.3.33}$$

其中 $b>0$ 为常数.

下面证明公式 (8.3.12), 记 $\Psi_1(\lambda_1)=\Psi_1^0$, 则有

$$-A\Psi_1^0 + \lambda_1 B\Psi_1^0 = 0, \tag{8.3.34}$$

$$-A\Psi_1 + \lambda B\Psi_1 = \beta_1(\lambda)\Psi_1. \tag{8.3.35}$$

用 (8.3.35) 减去 (8.3.34) 可得

$$\begin{aligned}\beta_1(\lambda) &= \frac{\langle(-A+\lambda B)(\psi_1-\psi_1^0),\psi_1^0\rangle_H}{\langle\Psi_1,\Psi_1^0\rangle_H} + \frac{(\lambda-\lambda_1)\langle B\psi_1^0,\psi_1^0\rangle_H}{\langle\Psi_1,\Psi_1^0\rangle_H}\\ &= \frac{\langle\psi_1-\psi_1^0,(-A+\lambda B)\psi_1^0\rangle_H}{\langle\Psi_1,\Psi_1^0\rangle_H}\\ &\quad +(\lambda-\lambda_1)\frac{\langle B\Psi_1^0,\Psi_1^0\rangle_H}{\langle\Psi_1,\Psi_1^0\rangle_H}(\text{由}L_\lambda=-A+\lambda B\text{的对称性}).\end{aligned} \tag{8.3.36}$$

由于 $\Psi_1(\lambda)\to\Psi_1^0$ 对 $\lambda\to\lambda_1$, 从 (8.3.34) 和 (8.3.36) 推出

$$\beta_1'(\lambda_1) = \lim_{\lambda\to\lambda_1}\frac{\beta_1(\lambda)-\beta_1(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1} = \langle B\Psi_1^0,\Psi_1^0\rangle_H/\langle\Psi_1^0,\Psi_1^0\rangle. \tag{8.3.37}$$

从 (8.3.34) 可知

$$\langle B\psi_1^0,\psi_1^0\rangle_H = \lambda_1^{-1}\langle A\psi_1^0,\psi_1^0\rangle > 0.$$

因此由 (8.3.37) 可知

$$\beta_1(\lambda) = C(\lambda-\lambda_1) + o(|\lambda-\lambda_1|), \tag{8.3.38}$$

其中 $C=\lambda_1^{-1}\langle A\Psi_0,\Psi_0\rangle/\|\Psi_0\|_H^2>0, \lambda=\sqrt{R}, \lambda_1=\sqrt{R_C}$.

从 (8.3.33) 和 (8.3.38) 就推出公式 (8.3.12). 定理得证.

§8.3.4　Benard 对流卷结构

这一小节的目的是应用 §8.1 介绍的结构稳定性定理来研究二维 Rayleigh-Benard 问题 (8.3.9) 分歧解的拓扑结构及其结构稳定性. 这直接与 Rayleigh-Benard 对流产生的对流卷图形结构相关联, 从理论上严格地证明与实验观察相一致的相变图案.

从理论上讲, 当容器在 x_2 方向的尺度 L_2 与 x_1 方向尺度 L_1 之比 L_2/L_1 很小时, 其对流在 x_2 方向波数 $k_2=0$. 这意味着三维 Rayleigh-Benard 问题在这

种情况下可约化为二维问题. 物理实验也证实了这一点. 此外, 由于在 Benard 实验中表现出的蜂窝状对流结构在 x_1x_2 平面上具有某种对称性, 从横截面的侧视角度看, 三维 Rayleigh-Benard 对流能够很好地从二维观点得到理解.

令 $\Omega=(0,L)\times(0,1)\subset R^2, x=(x_1,x_3)\in\Omega$. 为了简单, 这里只考虑自由 − 自由边界条件, 即取 (8.3.4) 和 (8.3.7) 作为组合的边界条件. 此时 Rayleigh-Benard 问题 (8.3.9) 可写为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_1+\dfrac{\partial p}{\partial x_1}\right]-\Delta u_1=0,\\ \dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u_3}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_3+\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\right]-\Delta u_3-\sqrt{R}T=0,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T-\sqrt{R}u_3-\Delta T=0,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\end{cases} \tag{8.3.39}$$

$$\begin{cases}u_n=0, \quad \dfrac{\partial u_\tau}{\partial n}=0\text{在}\partial\Omega\text{上},\\ T=0, \quad \text{在}x_3=0,1,\\ \dfrac{\partial T}{\partial x_1}=0, \quad \text{在}x_1=0,L,\end{cases} \tag{8.3.40}$$

$$(u,T)=(u_0,T_0), \quad \text{在}t=0, \tag{8.3.41}$$

这里 $u=(u_1,u_3)$ 是对应于 (x_1,x_3) 坐标的速度场.

方程 (8.3.39) 的特征值方程为

$$\begin{cases}-\Delta u_1+\dfrac{\partial p}{\partial x_1}=0,\\ -\Delta u_3+\dfrac{\partial p}{\partial x_3}=\lambda T,\\ -\Delta T=\lambda u_3,\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}=0,\end{cases} \tag{8.3.42}$$

其中 $\lambda=\sqrt{R}$, 边界条件为 (8.3.40).

关于特征值问题 (8.3.42) 和 (8.3.40), 取变量分离如下

$$\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{dh(x_1)}{dx_1}\dfrac{d\psi(x_3)}{dx_3},\\ u_3=h(x_1)\psi(x_3),\\ T=h(x_1)\varphi(x_3),\end{cases} \tag{8.3.43}$$

其中 $a^2>0$ 为待定常数.

由 (8.3.42) 及边界条件 $u_1=0$ 在 $x_1=0,1$, 有

$$\begin{cases}\dfrac{d^2h}{dx_1^2}=-a^2h,\\ h'(0)=h'(L)=0.\end{cases}\tag{8.3.44}$$

此外，函数 R 和 φ 满足

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d^2}{dx_3^2}-a^2\right)^2\psi=a^2\lambda\varphi,\\ \left(\dfrac{d^2}{dx_3^2}-a^2\right)\varphi=-\lambda\psi.\end{cases}\tag{8.3.45}$$

边界条件 (8.3.40) 产生

$$\begin{cases}\varphi(0)=\varphi(1)=0,\\ \psi(0)=\psi(1)=0,\\ \psi''(0)=\psi''(1)=0,\end{cases}\tag{8.3.46}$$

特征值问题 (8.3.44) 的解为

$$h(x_1)=\cos ax_1,\quad a^2=\frac{k^2\pi^2}{L^2},\quad k=1,2,\cdots.\tag{8.3.47}$$

对于给定的 $a=\dfrac{k\pi}{L}$, 问题 (8.3.45) 和 (8.3.46) 的第一特征值 $\lambda_1(a)$ 和第一特征向量由下式给出

$$\begin{cases}\lambda_1(a)=(\pi^2+a^2)^{\frac{3}{2}}/a,\\ (\psi,\varphi)=(\sin\pi x_3,\dfrac{1}{a}\sqrt{\pi^2+a^2}\sin\pi x_3).\end{cases}\tag{8.3.48}$$

待定常数 $a=k\pi/L$ 由波数 k 确定，而 k 应该使 $\lambda_1(a)$ 取最小值，即取整数 $k_0\in N$. 使其满足

$$\lambda_1^2=\lambda_1^2(k_0\pi/L)=\min_{k\in N}\left[\pi^4L^2(1+k^2/L^2)^3/k^2\right].\tag{8.3.49}$$

当 L 充分大时，从 (8.3.49) 可解出波数 k, 波长 a 和临界 Rayleigh 数为

$$\begin{cases}k\simeq\dfrac{L}{\sqrt{2}},a\simeq\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\\ R_C=\lambda_1^2\simeq\dfrac{27}{4}\pi^4.\end{cases}\tag{8.3.50}$$

从 (8.3.43),(8.3.47),(8.3.48) 和 (8.3.50) 可以得到对应的第一特征向量 $\Psi_1 = ((u_1, u_3), T)$ 为

$$\begin{cases} u_1 = -\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi x_1}{\sqrt{2}}\cos\pi x_3, \\ u_3 = \cos\dfrac{\pi x_1}{\sqrt{2}}\sin\pi x_3, \\ T = \sqrt{3}\cos\dfrac{\pi x_1}{\sqrt{2}}\sin\pi x_3. \end{cases} \tag{8.3.51}$$

此时，在 (8.3.51) 中的速度场

$$e = \left(-\sqrt{2}\sin\frac{k\pi x_1}{L}\cos\pi x_3, \cos\frac{k\pi x_1}{L}\sin\pi x_3\right) \tag{8.3.52}$$

有 k 个漩涡，其拓扑结构如图 8.5 所示.

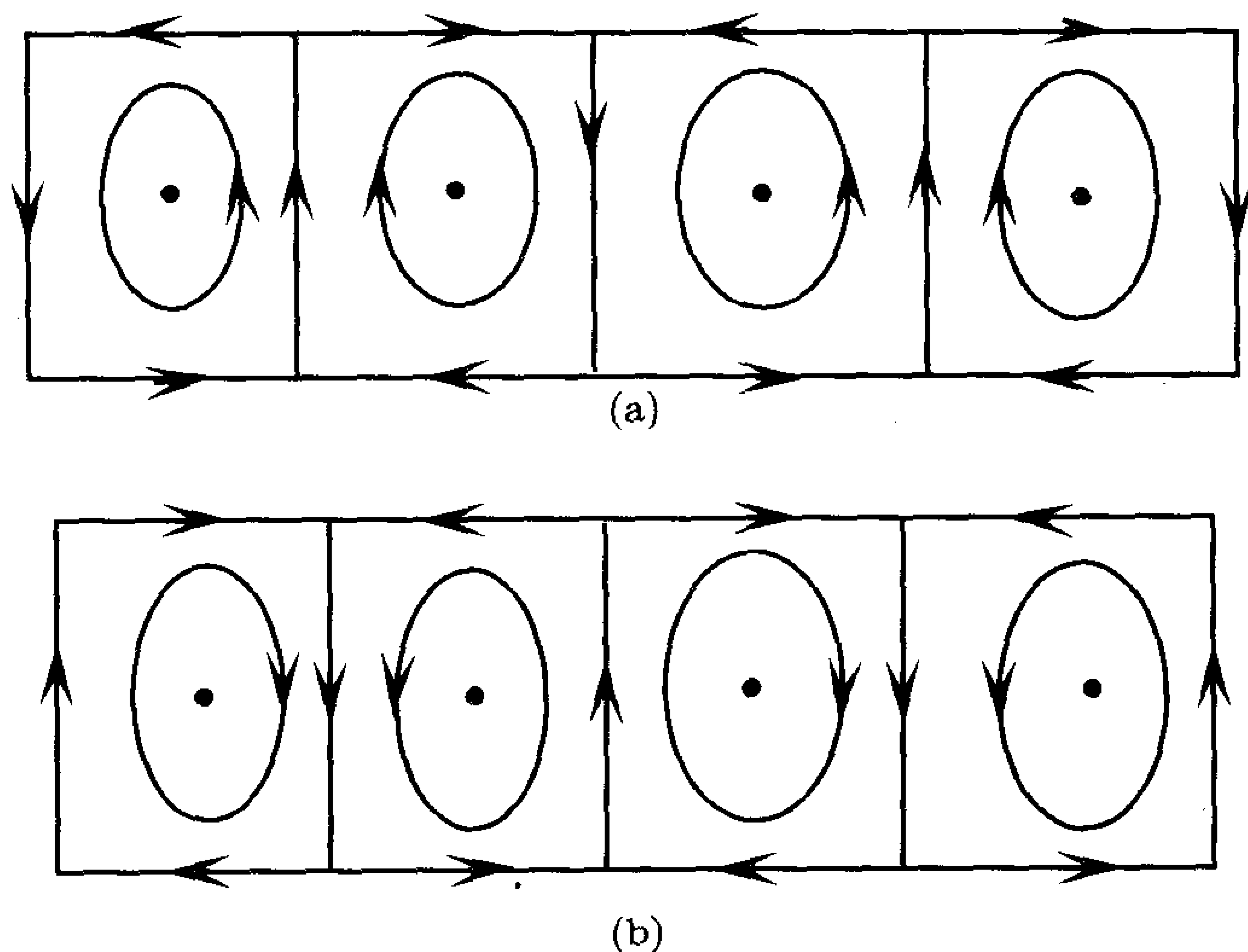


图 8.5 (a) 和 (b) 有相反的定向

下面定理表明二维 Rayleigh-Benard 问题 (8.3.39)~(8.3.41) 解的渐近结构是拓扑等价于图 8.5 所示的对流卷结构，此与物理实验观察的现象是一致的.

定理 8.13 存在一个数 $\delta > 0$, 当 Rayleigh 数 R 满足 $R_C < R < R_C+\delta(R_C \simeq \dfrac{27}{4}\pi^2)$ 时， H 能够分解为两个开集 $H = \bar{U}_1 + \bar{U}_2, U_1 \cap U_2 = \phi$, 使得下面结论成立:

(1) 对任何初值 $\phi_0 = (u_0, T_0) \in U_i (i = 1, 2)$, 存在时间 $t_0 > 0$, 使当 $t > t_0$ 时，问题 (8.3.39)~(8.3.41) 解 $(u(t,\phi_0), T(t,\phi_0))$ 中的速度场 $u(t,\phi_0)$ 拓扑等价于图 8.5(a) 所示结构对 $\phi_0 \in U_1$, 等价于 (b) 所示结构对 $\phi_0 \in U_2$;

(2) 当 $t > t_0$ 时， $u(t,\phi_0)$ 具有 $k \simeq L/\sqrt{2}$ 个漩涡.

证明 当 x_1 方向的水平长度 $L \gg 1$ 充分大时，其波数 k 和临界 Rayleigh 数 R_C 由 (8.3.50) 给出. 容易验证，由 (8.3.52) 给出的第一特征向量速度场 $\pm e$ 具有如图 8.5(a) 和 (b) 所示拓扑结构，并且具有 $k \simeq L/\sqrt{2}$ 个漩涡. 由结构稳定性定理 (定理 8.1), 速度场 $\pm e$ 是结构稳定的. 再由定理 8.12 和表达式 (8.3.12), 问题 (8.3.39)~(8.3.41) 从 $(0, R_C)$ 分歧出的两个稳态解 ϕ_1 和 ϕ_2 的速度场分别拓扑等价于 e 和 $-e$ 对 $R_C < R < R_C + \delta$, 并且也是结构稳定的.

对任何初值 $\phi_0 = (u_0, T_0) \in H$, 存在一个时间 $\tau > 0$, 使得问题 (8.3.39)~(8.3.41) 的解 $(u(t,\phi_0), T(t,\phi_0))$ 是 C^∞ 对 $t > \tau$. 因此该定理能够立刻从定理 8.12 和下面将证明的 H^k 范数一致有界性定理推得. 这样定理 8.13 得证.

为了获得定理 8.13 以及后面将证明的 Taylor 漩涡结构定理，需要下面 H^k 范数一致有界性定理对问题 (8.3.39)~(8.3.41) 成立. 记

$$H_B^k = \{(u,T) \in H^k(\Omega, R^2) \cap H \,|\, (u,T)\text{满足}(8.3.40)\}.$$

定理 8.14 令 $k \geqslant 1$ 为任一整数. 若 $\phi_0 = (u_0, T_0) \in H_B^k$, 那么存在一个数 $C > 0$ 依赖于 ϕ_0, 使得问题 (8.3.39)~(8.3.41) 的解 $(u(t,\phi_0), T(t,\phi_0))$ 是一致 H^k 有界的，

$$\|(u(t,\phi_0), T(t,\phi_0))\|_{H^k} \leqslant C, \quad \forall t \geqslant 0.$$

证明 令 ψ 是流函数，使得

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad u_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

那么方程 (8.3.39) 可改写为 (为了方便这里取 $P_r = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + J[\psi, \Delta\psi] + \Delta^2\psi + \lambda\dfrac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + J[T, \psi] - \Delta T - \lambda\dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \end{cases} \tag{8.3.53}$$

其中对任何函数 f 和 $g, J[f,g]$ 定义为

$$J[f,g] = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

边界条件 (8.3.40) 被归为

$$\begin{cases} \psi = 0, \quad \partial^2\psi/\partial x_3^2 = 0, \quad T = 0, \quad \text{在}x_3 = 0, 1, \\ \psi = 0, \quad \partial^2\psi/\partial x_1^2 = 0, \quad \partial T/\partial x_1 = 0, \quad \text{在}x_1 = 0, L. \end{cases} \tag{8.3.54}$$

只需证明 (8.3.53) 和 (8.3.54) 的解在下面空间中是一致有界的即可.

$$E^k = \{(\psi, T) \in H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)\text{满足}(8.3.54)\}.$$

由对称全连续场谱理论可知，下面问题的特征向量 $\{(e_j, h_j)\}$ 构成 E^k 的一

正交基

$$\begin{cases} \Delta^2 e = \lambda e, \\ -\Delta h = \lambda h, \\ (e,h)\text{满足边界条件}(8.3.54), \end{cases}$$

并且它们由下式给出

$$\begin{cases} e_{kj} = \sin\frac{k\pi}{L}x_1\varphi_{kj}(x_3), \\ h_{kj} = \cos\frac{k\pi}{L}x_1 w_{kj}(x_3), \end{cases} \tag{8.3.55}$$

其中 φ_{kj} 和 w_{kj} 满足

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}\right)^2 \varphi_{kj} = \lambda_{kj}\varphi_{kj}, \\ \varphi_{kj} = \varphi_{kj}'' = 0, \quad \text{在}x_3 = 0,1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\left(\frac{d^2}{dx_3^2} - \frac{k^2\pi^2}{L^2}\right) w_{kj} = \lambda_{kj} w_{kj}, \\ w_{kj} = 0, \quad \text{在}x_3 = 0,1. \end{cases}$$

另一方面，考虑 x_1 方向的周期边界条件

$$\psi(x_1,x_3) = \psi(x_1+2L,x_3), \qquad \psi = \psi'' = 0, \quad \text{在}x_3 = 0,1, \tag{8.3.56}$$

$$T(x_1,x_3) = T(x_1+2L,x_3), \qquad T = 0, \qquad \text{在}x_3 = 0,1. \tag{8.3.57}$$

令 $Q = R \times (0,1) \subset R^2$, 以及

$$H_p^k(Q) = \left\{\psi \in H^k(Q) \mid \psi\text{满足}(8.3.56)\right\},$$

$$H_p^k(Q) = \{T \in H^k(Q) \mid T\text{满足}(8.3.57)\}.$$

那么函数 $(\psi,T) \in H_p^{k+2}(Q) \times \mathcal{H}_p^k(Q)$ 有 Fourier 展开

$$\psi = \sum_{k,j=1}^{\infty} \psi_{kj}\sin\frac{k\pi x_1}{L}\varphi_{kj}(x_3) + \widetilde{\psi}_{kj}\cos\frac{k\pi x_1}{L}\varphi_{kj}(x_3),$$

$$T = \sum_{k,j=1}^{\infty} T_{kj}\cos\frac{k\pi x_1}{L}w_{kj}(x_3) + \widetilde{T}_{kj}\sin\frac{k\pi x_1}{L}W_{kj}(x_3).$$

考虑 $H_p^{k+2}(Q) \times \mathcal{H}_p^k(Q)$ 的子空间 $E^k(Q)$, 它由所有满足下面条件的函数 (ψ,T) 组成

$$\begin{cases} \psi(-x_1,x_3) = -\psi(x_1,x_3), \\ T(-x_1,x_3) = T(x_1,x_3). \end{cases}$$

$E^k(Q)$ 中函数具有下面形式的 Fourier 展开

$$\psi = \sum_{k,j=1}^{\infty} \psi_{kj} \sin \frac{k\pi x_1}{L} \varphi_{kj}(x_3),$$

$$T = \sum_{k,j=1}^{\infty} T_{kj} \cos \frac{k\pi x_1}{L} W_{kj}(x_3).$$

显然子空间 $E^k(Q)$ 是在 $H^{k+2}(Q) \times \mathcal{H}^k(\theta)$ 中是闭的，令 $E(Q)$ 是 $E^k(\theta)$ 在 L^2 范数下的完备化．可以看到

$$(\Delta\psi, T), \quad (\Delta^2\psi, \Delta T), \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right), \quad (J[\psi, \Delta\psi], J[T, \psi]) \in E(Q)$$

对任何 $(\psi, T) \in E^k(Q)(k \geqslant 2)$ 成立．

因而子空间 $E^k(Q)$ 对问题 (8.3.53) 及周期边界条件 (8.3.56) 和 (8.3.57)．也就是说若初值 $\phi \in E^k(Q)$，那么问题 (8.3.53), (8.3.56) 和 (8.3.57) 的解 $(\psi(t,\phi), T(t,\phi))$ 对所有时间 $t \geqslant 0$ 都保持在 $E^k(Q)$ 中

$$(\psi(t,\phi), T(t,\phi)) \in E^k(Q), \quad \forall t \geqslant 0,$$

这里 $(\psi(0,\phi), T(0,\phi)) = \phi$.

问题 (8.3.53), (8.3.56) 和 (8.3.57) 的解 $(\psi(t,\phi), T(t,\phi))$ 在 $H^{k+2} \times H^k$ 范数下是一致有界的，只要初值 $\phi \in H^{k+2}(Q) \times H^k(Q)$[20]. 注意到 (8.3.55) 的函数构成 E^k 的一个正交基，这里

$$E^k = E^k(Q)|_\Omega.$$

$E^k(Q)|_\Omega$ 为 $E^k(Q)$ 的函数限制在 Ω 上所组成的空间．这样，就证明了对任何 $\phi \in E^k$, 问题 (8.3.53) 和 (8.3.54) 的解 $(\psi(t,\phi), T(t,\phi))$ 是在 $H^{k+2} \times H^k$ 范数下一致有界的．定理得证.

注 8.3 对于方程 (8.3.39) 配以下面边界条件

$$\begin{cases} u_1 = 0, \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial x_1} = 0, & 在 x_1 = 0, L, \\ u = T = 0, & 在 x_3 = 0, 1, \end{cases} \tag{8.3.58}$$

定理 8.13 和 8.14 同样成立.

§8.3.5 关于流体动力学的评论

与物理与化学中其他相变问题不同， Rayleigh-Benard 热不稳定性是人们在平时日常生活中经常能够见到的一种自然现象，它为大家所熟知．从物理上，

Rayleigh-Benard 对流是属于非平衡相变范畴，它在流体动力学稳定性理论中具有基本的重要性.

从 Lord Rayleigh 建立的线性理论，人们对 Rayleigh-Benard 对流有了许多了解. 其中最重要的一个方面就是知道 Rayleigh 数 R 是决定对流是否发生的关键因素，并且从理论上能够算出容器高度远小于水平直径情况下临界 Rayleigh 数 R_C 的值. 然而由于 Rayleigh-Benard 对流本质上是一个非线性问题，因而线性理论是不足以完全理解这个问题. 特别是线性理论不能说明为什么相变所产生的对流具有稳定性，也不能表明发生相变的类型以及相变的临界指数 β 等.

定理 8.11 和 8.12 是 Rayleigh-Benard 对流问题非线理论的基础，而定理 8.13 则从理论上严格地证明了二维 Rayleigh-Benard 对流的发生. 这个非线性理论从如下几个方面加深了人们对 Rayleigh-Benard 对流的理解：

(1) Rayleigh-Benard 对流的稳定性是由流体的黏性及热扩散与非线性项 $((u\cdot\nabla)u,(u\cdot\nabla)T)$ 相互作用的结果，并且该稳定性是全局的.

(2) 对所有合理的物理边界条件及容器的几何尺寸，热对流发生的相变都是连续性的，没有跳跃型的相变. 这在相变现象中是很特别的.

(3) 相变的临界指数，即公式 (8.3.12) 中 $(R-R_C)^\beta$ 的指数 $\beta=\dfrac{1}{2}$. 即使 R_C 的特征值重数 $m>1$, 也可以证得临界指数 $\beta=\dfrac{1}{2}$. 这本质上是由 (8.3.13) 定义的非线性项 $G(\phi)$ 的正交性质 (8.3.29) 造成的.

(4) 从理论上人们清楚了热对流的图形结构是由 (8.3.10) 的第一特征向量拓扑结构所决定，定理 8.11 中的结论 (3) 就表明了这一点. 这是连续型相变的基本特征.

事实上，从 Rayleigh-Benard 对流的非线性理论，人们关于热对流还可以有更多的理解，特别是在后面将介绍的赤道上大气层的 Walker 环流研究中，我们能够看到这一点.

为了使人们对流体的物理方面有更多的了解，下面对几个常见的边界条件物理意义给予简单的说明.

首先是 Dirichlet 边界条件，即速度场 u 在边界上没有滑动：$u|_{\partial\Omega}=0$. 在物理上称为刚性边界条件. 这种条件主要适合于这些自然状况：①流体边界的表面不光滑，具有较大的摩擦系数；②流体在靠近刚性边界附近的流速较低；③流体的黏性系数大.

第二种边界条件是自由边界条件，它的数学表达为

$$u_n=0,\quad \frac{\partial u_\tau}{\partial n}=0,\quad 在\partial\Omega上.$$

这种边界条件物理上也称为自由滑动边界条件，该条件的物理意义是流体在边界上的剪切应力为零. 这种边界条件主要适用于这些自然状况：①边界为两种

不同流体的相交面，如水的表面与空气接触，或者油层在水上浮动；②刚性边界表面非常光滑，摩擦系数很小；③在刚性边界附近流速较高，如风吹沙起就属于这种情况；④流体的黏性系数很小.

最后，人们常见的边界条件是周期边值问题. 这种问题是常用在下述几种情况：①流体在一个环形域内运动. 此时，周期边界条件仅在某个一维方向，如环形域的 θ 角方向；②流体是在一个盘子内，其盘子的高度与其平面 x 和 y 方向直径比都非常小. 此时多采用 xy 平面上的周期边界条件. Rayleigh-Benard 问题的传统线性理论及 Yudovich 等人的定态分歧理论 [86,113,114] 都是采用这种周期边界条件.

这里需要强调指出，上述三种常用的边界条件没有一个是严格符合自然现象的，它们都是在不同环境和条件下的一种近似. 在大多数情况下这种近似能够很好地描述流体运动，并保留了它们的实质特征.

§8.4　Taylor 问题

§8.4.1　Taylor 实验与 Taylor 漩涡

在上一节，我们看到热不平衡是造成流体动力学不稳定性的一个重要原因. 这一节，我们将进一步了解到，由于流体弯曲运动产生的离心力是造成不稳定性的另一个重要原因.

由离心力产生不稳定性的理论研究是从著名的 Taylor 实验开始的. 1921 年， G.I.Taylor 考察两个同轴圆柱体之间环形空间中黏性流体的稳定性现象. 在他的实验中，取 r_1 和 $r_2(r_1 < r_2)$ 为两个同轴圆柱体的半径，并且使两个柱体沿同方向进行旋转. 令 Ω_1 和 Ω_2 分别为内柱体和外柱体旋转的角速度，记

$$T = \frac{4\Omega_1^2}{\nu} l^4, \tag{8.4.1}$$

其中 ν 为动力黏性系数， l 为长度单位. 无量纲数 T 称为 Taylor 数. Taylor 考虑了这种情况，即两个柱体之间的间隙 $r_2 - r_1$ 与柱体平均径 $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ 相比是很小，并且两柱体是沿同一个方向旋转. 他发现当 Taylor 数 T 小于某个临界值 $T_C(T < T_C)$ 时，两柱体间的流体流 (称为 Couette 流)，是稳定的，而当 T 超过 T_C 时， $T_C < T < T_C + \varepsilon$ 对某个 $\varepsilon > 0$, 从这个绕柱体旋转的基本流中突然生出漩涡流，这些漩涡在两柱体的纵向截面区域中规整地排列，并且是轴对称的. 如图 8.6 所示.

自从 Taylor 的实验后，人们从理论上和实验上对弯曲流的稳定性进行了大量的研究 [8,17,96,97]，令

$$\mu = \Omega_2/\Omega_1, \quad \eta = r_1/r_2. \tag{8.4.2}$$

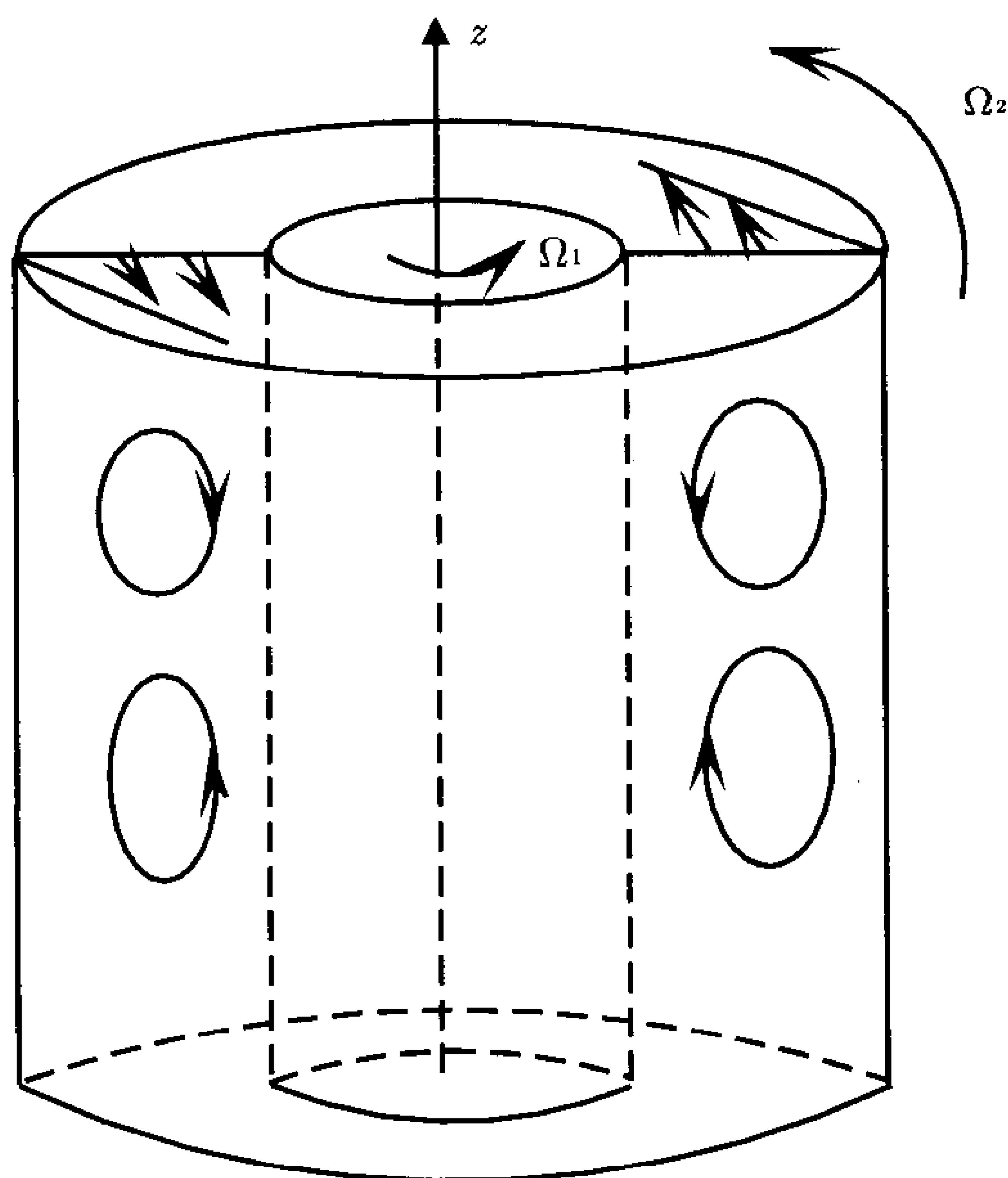


图 8.6 Taylor 漩涡

则根据 Rayleigh 判据，当 $\mu > \eta^2$ 时，两柱体间的 Couette 流总是稳定的. 因而不稳定一定是在 $\eta^2 > \mu$ 的情况下发生. 进一步的实验表明，当两柱体间隙 $r_2 - r_1$ 与平均半径 $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ 相比不是很小，或者两柱体在相反方向旋转 ($\mu < 0$) 的情况下，相变后产生的流的结构就复杂多了.

§8.4.2 控制方程

在两个同轴柱体之间不可压缩黏性流的控制方程是柱坐标 (r, θ, z) 的 Navier-Stokes 方程，表达为

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}\right), \tag{8.4.3}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}\right), \tag{8.4.4}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta u_z, \tag{8.4.5}$$

$$\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r u_z)}{\partial z} = 0, \tag{8.4.6}$$

其中 ν 为动力黏性系数， ρ 为质量密度， $u = (u_r, u_\theta, u_z)$ 为速度场， p 为压力函数，以及

$$u \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Taylor 问题的基本流，称为 Couctte 流，就是方程 (8.4.3)~(8.4.6) 的一个稳态解，其表达为

$$\begin{cases} u_u = u_z = 0, \quad u_\theta = V(r), \quad p = \rho \int \frac{1}{r} V^2(r) dr, \\ V(r) = ar + b/r. \end{cases} \tag{8.4.7}$$

由边界条件

$$V(r_1) = \Omega_1 r_1, \quad V(r_2) = \Omega_2 r_2,$$

在 (8.4.7) 中的常数 a 和 b 由下式给出

$$a = -\Omega_1 \eta^2 \frac{1 - \mu/\eta^2}{1 - \eta^2}, \quad b = \Omega_1 \frac{r_1^2(1 - \mu)}{1 - \eta^2}, \tag{8.4.8}$$

其中 μ 和 η 是由 (8.4.2) 所定义. 这里总是假设

$$0 \leqslant \mu < \eta^2. \tag{8.4.9}$$

为了研究 Couette 流 (8.4.7) 的稳定性，需要考虑它的摄动状态

$$u_r, \quad V + u_\theta, \quad u_z, \quad p + \rho \int \frac{1}{r} V^2(r) dr.$$

按照 Taylor 的方式，假设上述摄动是轴对称的，也就是说摄动函数 (u_r, u_θ, u_z) 及 p 是与 θ 无关. 这样，从 (8.4.3)~(8.4.6) 得

$$\begin{cases} \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_z = \nu \Delta u_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = \nu(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2V}{r} u_\theta, \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = \nu(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2}) - (V' + \frac{V}{r}) u_r, \\ \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r u_z)}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{8.4.10}$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$(\widetilde{u} \cdot \nabla) = u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

方程 (8.4.10) 的定义域为 $M = (r_1, r_2) \times (0, L) \subset R^2$, 这里 L 是两柱体之间流体的高度. 有几种物理上合理的边界条件. 在径向有两种边界条件:

(1) 自由边界条件

$$u_r = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad u_\theta = 0, \quad \text{在} r = r_1, r_2; \tag{8.4.11}$$

(2) 刚性边界条件

$$u_r = u_z = u_\theta = 0, \quad \text{在} r = r_1, r_2. \tag{8.4.12}$$

在 z 方向有四种边界条件:

(1) 自由边界条件

$$u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \quad \text{在} z = 0, L; \tag{8.4.13}$$

(2) Dirichlet 边界条件

$$u_z = u_r = u_\theta = 0, \quad \text{在} z = 0, L; \tag{8.4.14}$$

(3) 自由 - 刚性边界条件

$$\begin{cases} u_z = 0, \quad \dfrac{\partial u_r}{\partial z} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \quad \text{在} z = L, \\ u_z = u_r = u_\theta = 0, \quad \text{在} z = 0; \end{cases} \tag{8.4.15}$$

(4) 周期边界条件

$$u = (u_z, u_r, u_\theta) \text{在} z \text{方向是周期的}. \tag{8.4.16}$$

方程的无量纲化. 为了讨论 Taylor 问题的跃迁, 需要考虑方程 (8.4.10) 的无量纲形式. 为此取下面变换

$$\begin{cases} x = l x', \quad x = (r, r\theta, z), \quad l \text{为某一长度单位}, \\ t = l^2 t'/\nu, \\ u = \nu u'/l, \quad u = (u_z, u_r, u_\theta), \\ p = \rho \nu^2 p'/l^2. \end{cases} \tag{8.4.17}$$

省略上撇, 方程 (8.4.10) 的无量纲形式为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_z}{\partial t} = \Delta u_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} - (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_z, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t} = (\Delta - \dfrac{1}{r^2}) u_r + \dfrac{2d^2}{\nu}(a + \dfrac{b}{r^2}) u_\theta - \dfrac{\partial p}{\partial r} + (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_r - u_\theta^2 / r, \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} = (\Delta - \dfrac{1}{r^2}) u_\theta + \dfrac{2l^2 a}{\nu} u_r + (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_\theta + \dfrac{u_r u_\theta}{r}, \\ \dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial (r u_z)}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{8.4.18}$$

其中 a, b 由 (8.4.8) 给出, Δu 和 $(\widetilde{u} \cdot \nabla)$ 如 (8.4.10) 中所定义.

§8.4.3　小间隙情况

首先考虑 r_2-r_1 与 $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ 之比较小，并且 $\mu>0$ 的情况，这就是 Taylor 最初进行实验的条件. 此时在 (8.4.17) 中取 $l=d=r_2-r_1$, 忽略 $r^{-n}(n\geqslant 1)$ 的项，然后从 (8.4.18) 得到小间隙情况的近似方程如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_z}{\partial t}=\Delta u_z-\dfrac{\partial p}{\partial z}-(\widetilde{u}\cdot\nabla)u_z, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t}=\Delta u_r-\dfrac{\partial p}{\partial r}+\lambda(1-(1-\mu)(r-r_1))u_\theta-(\widetilde{u}\cdot\nabla)u_r, \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial t}=\Delta u_\theta+\lambda u_r-(\widetilde{u}\cdot\nabla)u_\theta, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0, \end{cases} \tag{8.4.19}$$

其中 $\lambda=\sqrt{T}, T$ 为 Taylor 数由下式给出

$$T=4\times\Omega_1^2 d^4/\nu^2,\quad \alpha=(\eta^2-\nu)/(1-\eta^2).$$

方程 (8.4.19) 配以下面边界条件

$$\text{条件 (8.4.11) 或 (8.4.12) 与 (8.4.13)}\sim\text{(8.4.16) 中一个的组合}. \tag{8.4.20}$$

取空间框架为

$$H=\{u\in(\widetilde{u},u_0)\in L^2(M,R^3)|\ \mathrm{div}\widetilde{u}=0,\quad \widetilde{u}_n|_{\partial M}=0\},$$

$$H_1=\{u=(\widetilde{u},u_\theta)\in H^2(M,R^3)\cap H|\ u\text{满足(8.4.20)}\}.$$

(8.4.19) 的线性化方程由下式给出

$$\begin{cases} -\Delta u_z+\dfrac{\partial p}{\partial z}=0, \\ -\Delta u_r+\dfrac{\partial p}{\partial r}=\lambda u_\theta-\lambda(1-\mu)(r-r_1)u_\theta, \\ -\Delta u_\theta=\lambda u_r, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial r}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0. \end{cases} \tag{8.4.21}$$

令 $\widetilde{\lambda}_0>0$ 是 (8.4.21) 及边界条件 (8.4.20) 的第一特征值. 称下面的数

$$T_C=\widetilde{\lambda}_0^2$$

为临界 Taylor 数.

当 $\mu \to 1$ 时，(8.4.21) 归到下面称特征值方程

$$\begin{cases} -\Delta u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ -\Delta u_r + \dfrac{\partial p}{\partial r} = \lambda u_\theta, \\ -\Delta u_\theta = \lambda u_r, \\ \mathrm{div}\widetilde{u} = 0. \end{cases} \tag{8.4.22}$$

令 (8.4.22) 和 (8.4.20) 的第一特征值为 $\lambda_0 > 0$ 有代数重数 $m(m \geqslant 1)$, 对应的特征向量为 $v_i(1 \leqslant i \leqslant m)$. 其对应的特征空间为

$$E_0 = \mathrm{span}\{v_i|\ 1 \leqslant i \leqslant m\}. \tag{8.4.23}$$

不难验证，在条件 (8.4.9) 假设下，对无量纲长度单位 $d = r_2 - r_1 = 1$ 及小间隙情况

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) \gg d = r_2 - r_1 = 1,$$

条件 $\mu \to 1$ 可等价地被下面条件取代

$$r_1 = (2 + \delta)/(1 - \mu), \tag{8.4.24}$$

其中 $\delta > 0$ 为某个实数. 此时 Taylor 数 T 中的参数

$$\alpha = (\eta^2 - \mu)/(1 - \eta^2) \simeq \delta/2.$$

下面给出小间隙情况下的 Taylor 问题非平衡相变的跃迁定理，它包括了所有可能的物理边界条件.

定理 8.15 假设 $r_1 \gg d$ 满足 (8.4.24). 那么 Taylor 问题 (8.4.19) 和 (8.4.20) 在 $(u, T) = (0, T_C)(T_C = \widetilde{\lambda}_0^2$ 为临界 Taylor 数) 发生跃迁，即发生非平衡相变. 更具体地，存在一个数 $\kappa > 0$, 当 $0 < T - T_C < \kappa$ 时，下面结论成立:

(1) 问题 (8.4.19) 及 (8.4.20) 有一个吸引子 $\mathcal{A}_T, 0 \notin \mathcal{A}_T, \dim\mathcal{A}_T \leqslant m$, 使得 $\mathcal{A}_T$ 吸引 H/Γ, 其中 Γ 是 $u = 0$ 的稳定流形在 H 中有余维 $\mathrm{codim}\Gamma \geqslant 1$;

(2) 对任何 $u_T \in \mathcal{A}_T$ 有如下表达式

$$\begin{cases} u_T = v_T + w_T^{\mu}, v_T \in E_0 \quad (E_0\text{如 (8.4.23) 所定义}), \\ \lim\limits_{\mu \to 1, T \to \lambda_0^2} \|w_T^{\mu}\| / \|v_T\| = 0, \end{cases} \tag{8.4.25}$$

其中 λ_0 是 (8.4.22) 的第一特征值.

定理 8.16 假设 $r_1 \gg d$ 满足 (8.4.24), 并且 (8.4.22) 的第一特征值 λ_0 是单的. 那么下面结论成立:

(1) 在定理 8.15 中的吸引子 $\mathcal{A}_T$ 由 Taylor 问题 (8.4.19) 和 (8.4.20) 的严格两个平衡点构成，即 $\mathcal{A}_T = \{u_1^T, u_2^T\}$, 并且

$$\begin{cases} u_1^T = \alpha_1(T,\mu)v_0 + w_1(T,\mu), \\ u_2^T = -\alpha_2(T,\mu)v_0 + w_2(T,\mu), \\ w_i(T,\mu) = o(|\alpha_i(T,\mu)|), \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{8.4.26}$$

其中 $\alpha_i > 0$ 及 $\alpha_i(T,\mu) \to 0$ 当 $T \to \lambda_0^2, \mu \to 1$.

(2) 进一步，H 能够被分解为两个开集 U_1^T 和 U_2^T:

$$H = \bar{U}_1^T + \bar{U}_2^T, U_1^T \cap U_2^T = \phi, \quad o \in \partial U_1^T \cap \partial U_2^T,$$

使得 $U_i^T \in U_i^T (i = 1,2)$, 并且

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\varphi) - u_i^T\| = 0, \quad 对\varphi \in U_i^T (i = 1,2),$$

其中 $u(t,\varphi)$ 是 (8.4.19) 和 (8.4.20) 的解其初值为 φ.

注 8.4 在定理 8.15 和 8.16 中，Taylor 问题的相变模式只有两种：一种是连续性跃迁，另一种是混合型. 相变取哪一种模式依赖于边界条件.

注 8.5 表达式 (8.4.25) 和 (8.4.26) 对 Taylor 问题的相变是非常有用的，它表明相变的图形结构是由对称特征值问题 (8.4.22) 的第一特征向量所控制.

定理 8.15 的证明 将应用定理 6.23 来证明该定理. 首先定义映射

$$\begin{aligned} &G : H_1 \to H, \\ &S_\lambda^\mu : H_1 \to H, \\ &L_\lambda = -A + \lambda B : H_1 \to H \end{aligned}$$

如下

$$\begin{cases} Au = P\{\Delta\widetilde{u}, \Delta u_\theta\}, \\ Bu = P\{(0, u_\theta), u_r\}, \\ S_\lambda^\mu u = P\{\lambda(0, -(1-\mu)(r - r_1)u_\theta), 0\}, \\ G(u) = P\{[(\widetilde{u}\cdot\nabla)\widetilde{u}], (\widetilde{u}\cdot\nabla)u_\theta\}, \end{cases} \tag{8.4.27}$$

其中 $u = (\widetilde{u}, u_\theta) \in H_1, \widetilde{u} = (u_z, u_r), P : L^2(M, R^3) \to H$ 为 Leray 投影. 这样问题 (8.4.19) 和 (8.4.20) 可等价地写成下面抽象形式

$$\frac{du}{dt} = L_\lambda u + S_\lambda^\mu u + G(u). \tag{8.4.28}$$

容易验证，由 (8.4.28) 定义的算子满足条件 (6.0.2) 和 (6.0.3), 并且 L_λ 是对称的，S_λ^μ 满足

$$\|S_\lambda^\mu\| \leqslant \lambda(1-\mu).$$

由 (8.4.24), 当 $r_1 \to \infty$ 时, $(1-\mu) \to 0$. 因而条件 (6.6.2) 成立.

再来考虑下面特征值问题

$$L_\lambda u = \beta(\lambda) u, \quad u = (u_z, u_r, u_\theta) \in H_1.$$

由 (8.4.27), 上面的抽象方程对应于下面方程

$$\begin{cases} \Delta u_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \beta(\lambda) u_z, \\ \Delta u_r - \dfrac{\partial p}{\partial r} + \lambda u_\theta = \beta(\lambda) u_r, \\ \Delta u_\theta + \lambda u_r = \beta(\lambda) u_\theta, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial r} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{8.4.29}$$

显然 (8.4.29) 与 Benard 问题的线性化方程 (8.3.17) 具有相同形式. 因而由 (8.3.19) 和 (8.3.20) 可以看到, (8.4.29) 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 与 (8.4.22) 的第一特征值 λ_0 之间有如下关系

$$\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \text{当}\lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \text{当}\lambda = \lambda_0, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \\ > 0, & \text{当}\lambda > \lambda_0, \end{cases}$$

其中 $m \geqslant 1$ 是 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 的重数. 此外由 (8.3.18) 可以得到 (8.4.29) 的其他特征值 $\beta_j(\lambda)(j \geqslant m+1)$ 满足

$$\beta_j(\lambda_0) < 0, \quad \forall j \geqslant m+1.$$

于是条件 (6.2.1) 和 (6.2.2) 被满足.

现在需要证明 $u=0$ 是下面方程在 $\lambda = \lambda_0$ 的全局渐近稳定的平衡点

$$\frac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u), \quad u \in H_1. \tag{8.4.30}$$

同样地, 方程 (8.4.30) 与 Benard 问题 (8.3.9) 具有相同形式. 因而 $u=0$ 是 (8.4.30) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的全局渐近平衡解.

最后, 应用与 Foias et al.[20] 相同的方式可以证明方程 (8.4.28), 即问题 (8.4.19) 和 (8.4.20) 对任何 $\lambda, \mu \in R^1$ 具有一个全局吸引子. 这样该定理可从定理 6.23 推得. 定理证毕.

定理 8.16 的证明 该定理是定理 6.27 的直接推论, 其条件都在定理 8.15 的证明中被验证.

§8.4.4 z 周期边界条件

这一节考虑一般非小间隙情况 z 周期边界条件的 Taylor 问题. 在 (8.4.17)

中取 $l = r_2$, 则从 (8.4.18) 可得到如下形式的无量纲方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_z}{\partial t} = \Delta u_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} - (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_z, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t} = \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_r + \lambda \left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right) u_\theta - \dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{u_\theta^2}{r} - (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_r, \\ \dfrac{\partial u_\theta}{\partial t} = \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta + \lambda \kappa u_r - \dfrac{u_r u_\theta}{r} - (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_\theta, \\ \dfrac{\partial (r u_z)}{\partial z} + \dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0, \end{cases} \tag{8.4.31}$$

其中 $\lambda = \sqrt{T}, T$ 为 Taylor 数, κ 和 T 由下式给出

$$T = \frac{4(1-\mu)^2 r_1^4 \Omega_1^2}{(1-\eta^2)^2 \nu^2}, \quad \kappa = \frac{1 - \mu/\eta^2}{1-\mu}. \tag{8.4.32}$$

此时无量纲区域为 $M = (\eta, 1) \times R^1 \subset R^2$, 边界条件取 (8.4.12) 与 (8.4.16) 的组合

$$\begin{cases} u = (u_z, u_r, u_\theta) = 0, \quad 在 r = \eta, 1, \\ u 在 z 方向是周期的. \end{cases} \tag{8.4.33}$$

需要指出, 这一节的结果对 (8.4.11) 和 (8.4.16) 组合的边界条件也是成立的.

对于问题 (8.4.31) 和 (8.4.33), 建立如下空间框架

$$H = \{u \in L^2(M, R^3) |\ \text{div}(r\widetilde{u}) = 0, u 是 z 周期的\},$$

$$H_1 = \{u \in H^2(M, R^3) \cap H |\ u 满足 (8.4.33)\},$$

H 空间的内积定义为

$$\langle u, v \rangle_H = \int_M r u \cdot v dz dr.$$

算子 $L_\lambda = -A + \lambda B$ 及 $G : H_1 \to H$ 定义为

$$\begin{cases} Au = P(-\Delta u_z, -\left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_r, -\left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta), \\ Bu = P(0, \left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right) u_\theta, \kappa u_r), \\ G(u) = -P\left((\widetilde{u} \cdot \nabla) u_z, (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_r - \dfrac{u_\theta^2}{r}, (\widetilde{u} \cdot \nabla) u_\theta + \dfrac{u_\theta u_r}{r}\right), \end{cases} \tag{8.4.34}$$

其中 $P : L^2(M, R^3) \to H$ 为 Leray 投影. 这样, Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.33) 可写为下面抽象形式

$$\frac{du}{dt} = L_\lambda u + G(u), \quad u \in H_1. \tag{8.4.35}$$

1. 特征值问题

首先考虑 (8.4.35) 线性化算子的特征值问题

$$L_\lambda u = \beta(\lambda)u. \tag{8.4.36}$$

L_λ 的共轭算子 $L_\lambda^* = -A + \lambda B_\lambda^*$ 的特征值方程为

$$L_\lambda^* u^* = \beta(\lambda)u^*. \tag{8.4.37}$$

由 (8.4.34), 对方 (8.4.36) 的方程可写为

$$\begin{cases} \Delta u_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \beta(\lambda)u_z, \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_r + \lambda\left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right) u_\theta - \dfrac{\partial p}{\partial r} = \beta(\lambda)u_r, \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta + \lambda\kappa u_r = \beta(\lambda)u_\theta, \\ \dfrac{\partial(ru_z)}{\partial z} + \dfrac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0, \end{cases} \tag{8.4.38}$$

其中 $\lambda = \sqrt{T}, \Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

对应于 (8.4.37) 的方程为

$$\begin{cases} \Delta u_z^* - \dfrac{\partial p^*}{\partial z} = \beta(\lambda)u_z^*, \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_r^* + \lambda\kappa u_\theta^* - \dfrac{\partial p^*}{\partial r} = \beta(\lambda)u_r^*, \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta^* + \lambda\left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right) u_r^* = \beta(\lambda)u_\theta^*, \\ \dfrac{\partial(ru_z^*)}{\partial z} + \dfrac{\partial(ru_r^*)}{\partial r} = 0. \end{cases} \tag{8.4.39}$$

在这一节，总是将 (8.4.38) 和 (8.4.39) 配以边界条件 (8.4.33). 当 $0 \leqslant \mu$ 时，对每个给定周期 L, 存在 $\lambda_0(L)$, 使得 (8.4.38) 特征值 $\beta_i(\lambda)$ 满足 [37,98,102,115]

$$\beta_i(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0(L), \\ = 0, & \lambda = \lambda_0(L), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0(L), \end{cases} \tag{8.4.40}$$

$$\mathrm{Re}\beta_j(\lambda_0(L)) < 0, \quad \forall j \geqslant m+1. \tag{8.4.41}$$

此外，存在一个最小周期 $L' > 0$, 使得

$$\lambda_0 = \lambda_0(L') = \min_{L>0} \lambda_0(L), \tag{8.4.42}$$

并且 (8.4.40) 在 $\lambda_0 = \lambda_0(L')$ 的重数 $m = 2$.

下面总是取 L' 作为周期，为了简单，记为 L. 下面的数称为临界 Taylor 数

$$T_C = \lambda_0^2, \quad \lambda_0\text{如(8.4.42)}. \tag{8.4.43}$$

不难看出，(8.4.38) 对应于 $\beta_1(\lambda_0) = \beta_2(\lambda_0) = 0$ 的两个特征向量 ψ_1 和 $\widetilde{\psi}_1$ 取如下形式

$$\psi_1 = \begin{cases} \psi_z = -\sin\dfrac{2\pi z}{L} D_* h(r), \\ \psi_r = a\cos\dfrac{2\pi z}{L} h(r), \\ \psi_\theta = \cos\dfrac{2\pi z}{L}\Phi(r), \end{cases} \tag{8.4.44}$$

$$\widetilde{\psi}_1 = \begin{cases} \widetilde{\psi}_z = \cos\dfrac{2\pi z}{L} D_* h(r), \\ \widetilde{\psi}_r = a\sin\dfrac{2\pi z}{L} h(r), \\ \widetilde{\psi}_\theta = \sin\dfrac{2\pi z}{L}\Phi(r), \end{cases} \tag{8.4.45}$$

其中 $(h(r), \Phi(r))$ 满足

$$\begin{cases} (DD_* - a^2)^2 h = a^2\lambda_0\left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right)\Phi, \\ (DD_* - a^2)\Phi = -\lambda_0\kappa h, \\ h = Dh = 0, \quad \Phi = 0, \ \text{在} r = \eta, 1, \end{cases} \tag{8.4.46}$$

其中

$$D = \frac{d}{dr}, \quad D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}, \quad a = \frac{2\pi}{L}.$$

与 ψ_1 和 $\widetilde{\psi}_1$ 对偶的 (8.4.39) 第一特征向量 ψ_1^* 和 $\widetilde{\psi}_1^*$ 为

$$\psi_1^* = \begin{cases} \psi_z^* = -\sin\dfrac{2\pi z}{L} D_* h^*(r), \\ \psi_r^* = a\cos\dfrac{2\pi z}{L} h^*(r), \\ \psi_\theta^* = \cos\dfrac{2\pi z}{L}\Phi^*(r), \end{cases} \tag{8.4.47}$$

$$\widetilde{\psi}_1^* = \begin{cases} \widetilde{\psi}_z^* = \cos\dfrac{2\pi z}{L} D_* h^*(r), \\ \widetilde{\psi}_r^* = a\sin\dfrac{2\pi z}{L} h^*(r), \\ \widetilde{\psi}_\theta^* = \sin\dfrac{2\pi z}{L}\Phi^*(r), \end{cases} \tag{8.4.48}$$

其中 $(h^*(r),\Phi^*(r))$ 满足

$$\begin{cases}(DD_*-a^2)^2h^*=\lambda_0\kappa\Phi^*,\\(DD_*-a^2)\Phi^*=-a^2\lambda_0(\frac{1}{r^2}-\kappa)h^*,\\h^*=Dh^*=0,\Phi^*=0,\text{在}r=\eta,1.\end{cases}\tag{8.4.49}$$

2. 周期边界条件的跃迁定理

对于 (8.4.44) 和 (8.4.47) 给出的第一特征向量 ψ_1 和 ψ_1^*, 定义一个数 α 如下

$$\alpha=\frac{1}{\langle\psi_1,\psi_1^*\rangle}\langle G(\varphi,\psi_1)+G(\psi_1,\varphi),\psi_1^*\rangle_H,\tag{8.4.50}$$

其中 $\varphi\in H_1$ 满足方程

$$(A-\lambda_0B)\varphi=G(\psi_1,\psi_1),\tag{8.4.51}$$

这里 A 和 B 由 (8.4.34) 所定义, $G(u,v)$ 为双线性算子满足

$$\begin{cases}G(u,v)=-P\left((\widetilde{u}\cdot\nabla)v_z,(\widetilde{u}\cdot\nabla)v_r-\frac{u_\theta v_\theta}{r},(\widetilde{u}\cdot\nabla)v_\theta+\frac{u_\theta v_r}{r}\right),\\\langle G(u,v),w\rangle_H=-\langle G(u,w),v\rangle_H.\end{cases}\tag{8.4.52}$$

显然由 (8.4.50) 定义的参数 α 是 μ 和 η 的函数, 在 z 周期边界条件的 Taylor 问题中, 它起到超导问题中参数 R 相同的作用. 这里总是假设 (8.4.9) 成立.

定理 8.17 假设 (8.4.50) 给的参数 $\alpha<0$, 则 Taylor 问题 (8.4.31) 及 (8.4.33) 从 $(u,T)=(0,T_C)$ 发生连续性的跃迁, 这里 T_C 如 (8.4.43) 所给的临界 Taylor 数, 并且下面结论成立:

(1) Taylor 问题从 $(u,T)=(0,T_C)$ 在 $T>T_C$ 分歧出一个吸引子 $\mathcal{A}_T$ 同胚于一个圆圈, 即 $\mathcal{A}_T=S^1$, 并且 $\mathcal{A}_T$ 是由奇点构成, 这里 T 为 Taylor 数;

(2) 存在 $u=0$ 的一个邻域 $U\subset H$, 使得 $\mathcal{A}_T$ 吸引 U/Γ, 这里 Γ 是 $u=0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2;

(3) 对任何 $u\in\mathcal{A}_T,u$ 能够表达为

$$\begin{cases}u=|\beta_1(\lambda)/\alpha|^{\frac{1}{2}}v+o(|\beta_1(\lambda)|),\\v=x\psi_1+y\widetilde{\psi}_1,\quad x^2+y^2=1,\end{cases}\tag{8.4.53}$$

其中 α 如 (8.4.50), ψ_1 和 $\widetilde{\psi}_1$ 由 (8.4.44) 和 (8.4.45) 给出.

定理 8.18 当 $\alpha>0$ 时, Taylor 问题 (8.4.31) 及 (8.4.33) 从 $(u,T)=(0,T_C)$ 发生跳跃性的跃迁, 并且下面结论成立:

(1) Taylor 问题有一个鞍结分歧点 $T^* < T_C$, 即问题 (8.4.31) 和 (8.4.33) 在 $T = T^*$ 生出一个圆圈 $\Sigma^* = S^1$ 由奇点构成, 并从 (Σ^*, T^*) 在 $T^* < T$ 分歧出两个奇点圆圈 Σ_1^T 和 Σ_2^T 满足 (如图 8.2 所示)

$$\begin{cases} \lim\limits_{T \to T_C = 0} \Sigma_1^T = \{0\}, \\ \text{dist}(\Sigma_2^{T_C}, 0) = \min\limits_{u \in \Sigma_2^{T_C}} \|u\|_H > 0; \end{cases}$$

(2) 对每个 $T^* < T < T_C$, 空间 H 能够分解成两个开集

$$H = \bar{U}_1^T + \bar{U}_2^T, \quad U_1^T \cap U_2^T = \varnothing, \quad \Sigma_1^T \subset \partial U_1^T \cap \partial U_2^T,$$

使得 Taylor 问题有两个不交吸引子 $\mathcal{A}_1^T$ 和 $\mathcal{A}_2^T$

$$\mathcal{A}_1^T = \{0\} \subset U_1^T, \quad \Sigma_2^\lambda \subset \mathcal{A}_2^T \subset U_2^T,$$

并且 $\mathcal{A}_i^T$ 吸引 $U_i^T (i = 1, 2)$.

(3) 当 Taylor 数 T 增大穿过 T_C 时, 吸引子 $\mathcal{A}_2^T$ 吸引 $H/\Gamma, \Gamma$ 为 $u = 0$ 的稳定流形有余维 2, 并且

$$\text{dist}(\mathcal{A}_2^T, 0) > 0, \quad \forall T > T_C.$$

定理 8.17 和 8.18 的证明 将证明分为下面几步进行.

第一步. 要表明, Taylor 问题 (8.4.31) 及 (8.4.33) 如果分歧出奇点, 则奇点一定是作为一个圆圈 S^1 出现. 事实上, 由于 (8.4.31) 和 (8.4.33) 关于 z 方向的平移是不变的

$$u(z, r) \to u(z + z_0, r), \quad \forall z_0 \in R^1,$$

这意味着如果 u_0 是 (8.4.31) 和 (8.4.33) 的一个奇点, 则对任何 $z_0 \in R^1, u_0(z+z_0, r)$ 也是一个奇点. 因而

$$\Sigma = \{u_0(z + z_0, r) | \, z_0 \in R^1\}$$

是问题 (8.4.31) 和 (8.4.33) 的一个奇点集合, 它同胚于一个圆圈 S^1. 这样就证明了 (8.4.31) 和 (8.4.33) 的奇点是以 S^1 出现的.

第二步. 中心流形约化. 将应用定理 6.1 来导出 (8.4.35) 在中心流形上的约化方程.

由谱定理 (定理 4.4), (8.4.35) 到 (8.4.36) 的第一特征空间上的约化方程为如下形式

$$\frac{dx}{dt} = \beta_1(\lambda)x + \frac{1}{\langle \psi_{1\lambda}, \psi_{1\lambda}^* \rangle_H} \langle G(u), \psi_{1\lambda}^* \rangle_H, \tag{8.4.54}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_1(\lambda)y + \frac{1}{\langle\widetilde{\psi}_{1\lambda}, \widetilde{\psi}^*_{1\lambda}\rangle_H}\langle G(u), \widetilde{\psi}^*_{1\lambda}\rangle_H, \tag{8.4.55}$$

其中 $\psi_{1\lambda}, \widetilde{\psi}_{1\lambda}$ 和 $\psi^*_{1\lambda}, \widetilde{\psi}^*_{1\lambda}$ 分别为 (8.4.36) 和 (8.4.37) 对应于第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda_0(T_C = \lambda_0^2)$ 附近的特征向量 (由 (8.4.40)~(8.4.42) 可知 $\beta_1(\lambda)$ 重数 $m = 2$), 并且

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} (\psi_{1\lambda}, \widetilde{\psi}_{1\lambda}) = (\psi_1, \widetilde{\psi}_1), \\ \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} (\psi^*_{1\lambda}, \widetilde{\psi}^*_{1\lambda}) = (\psi^*_1, \widetilde{\psi}^*_1), \end{cases} \tag{8.4.56}$$

这里 $\psi_1, \widetilde{\psi}_1$ 和 $\psi^*_1, \widetilde{\psi}^*_1$ 分别由 (8.4.45)~ (8.4.48) 给出.

令 $\Psi_0 : E_0 \to E_1$ 是 (8.4.35) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的中心流形函数，这里

$$\begin{aligned} &E_0 = \text{span}\{\psi_1, \widetilde{\psi}_1\}, \\ &E_1 = \{u \in H |\ \langle u, \psi^*_1\rangle_H = 0, \quad \langle u, \widetilde{\psi}^*_1\rangle_H = 0\}. \end{aligned}$$

记 $u_0 = x\psi_1 + y\widetilde{\psi}_1 \in E_0$. 容易验证

$$G(u_0) = G(u_0, u_0) \in E_1.$$

因此，由定理 6.1 得到

$$\begin{cases} \Psi_0 = \phi(x,y) + o(|x|^2 + |y|^2), \\ -L_{\lambda_0}\phi = G(\psi_1, \psi_1)x^2 + G(\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_1)y^2 + (G(\psi_1, \widetilde{\psi}_1) + G(\widetilde{\psi}_1, \psi))xy. \end{cases} \tag{8.4.57}$$

此外，在 $\lambda = \lambda_0$ 附近的中心流形函数 Ψ_λ 满足

$$\|\Psi_\lambda - \Psi_0\| \to 0, \quad 在\lambda \to \lambda_0. \tag{8.4.58}$$

因此，对于 $u = u_0 + \Psi_\lambda(u_0)$, 从 (8.4.54)~(8.4.58) 可以推出

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = {} & \beta_1(\lambda)x + \frac{x}{\rho}\langle G(\phi, \psi_1) + G(\psi_1, \phi), \psi^*_1\rangle_H \\ & + \frac{y}{\rho}\langle G(\phi, \widetilde{\psi}_1) + G(\widetilde{\psi}_1, \phi), \psi^*_1\rangle_H \\ & + o(|x|^3 + |y|^3 + \varepsilon_1(\lambda) \cdot O(|x|^3 + |y|^3), \end{aligned} \tag{8.4.59}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = {} & \beta_1(\lambda)y + \frac{x}{\rho}\langle G(\phi, \psi_1) + G(\psi_1, \phi), \widetilde{\psi}^*_1\rangle_H \\ & + \frac{y}{\rho}\langle G(\phi, \widetilde{\psi}_1) + G(\widetilde{\psi}_1, \phi), \widetilde{\psi}^*_1\rangle_H \\ & + o(|x|^3 + |y|^3) + \varepsilon_2(\lambda) \cdot O(|x|^3 + |y|^3), \end{aligned} \tag{8.4.60}$$

其中 $\rho = \langle\psi_1, \psi^*_1\rangle_H = \langle\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}^*_1\rangle_H$, 以及

$$\varepsilon_i(\lambda) \to 0, \quad 当\lambda \to \lambda_0, \quad i = 1, 2.$$

另一方面，通过直接计算可以得到

$$
\begin{aligned}
G(\psi_1,\psi_1) &= P(\psi_0+\psi_2),\\
G(\widetilde{\psi}_1,\widetilde{\psi}_1) &= P(\psi_0-\psi_2),\\
G(\psi_1,\widetilde{\psi}_1) &= P(\widetilde{\psi}_0+\widetilde{\psi}_2),\\
G(\widetilde{\psi}_1,\psi_1) &= P(-\widetilde{\psi}_0+\widetilde{\psi}_2),
\end{aligned}
$$

其中 $P: L^2(M,R^3)\to H$ 为 Leray 投影，以及

$$
\psi_0 = -\begin{cases} 0,\\ \dfrac{1}{2}\left(a^2D_*h\cdot h + a^2hDh - \dfrac{1}{r}\Phi^2\right),\\ \dfrac{1}{2}a\left(D_*h\Phi + hD\Phi + \dfrac{1}{r}h\Phi\right), \end{cases}
$$

$$
\psi_2 = -\begin{cases} \dfrac{a}{2}\sin 2az((D_*h)^2 - hDD_*h),\\ \dfrac{1}{2}\cos 2az\left(a^2hDh - a^2D_*hh - \dfrac{1}{r}\Phi^2\right),\\ \dfrac{a}{2}\cos 2az\left(hD\Phi - D_*h\Phi + \dfrac{1}{r}\Phi h\right), \end{cases}
$$

$$
\widetilde{\psi}_0 = -\begin{cases} \dfrac{a}{2}((D_*h)^2 + hDD_*h),\\ 0,\\ 0, \end{cases}
$$

$$
\widetilde{\psi}_2 = -\begin{cases} -\dfrac{a}{2}\cos 2az((D_*h)^2 - hDD_*h),\\ \dfrac{1}{2}\sin 2az\left(a^2hDh - a^2D_*hh - \dfrac{1}{r}\Phi^2\right),\\ \dfrac{a}{2}\sin 2az\left(hD\Phi - D_*h\Phi + \dfrac{1}{r}\Phi h\right). \end{cases}
$$

这样，方程 (8.4.57) 就改写为

$$
(A-\lambda_0B)\phi = P[(x^2+y^2)\psi_0 + (x^2-y^2)\psi_2 + 2xy\widetilde{\psi}_2]. \tag{8.4.61}
$$

如果记

$$
\phi = -[(x^2+y^2)\phi_0 + (x^2-y^2)\phi_2 + 2xy\widetilde{\phi}_2], \tag{8.4.62}
$$

其中 $\phi_0, \phi_2, \widetilde{\phi}_2$ 表达为

$$\begin{cases} \phi_0 = (0, 0, \varphi), \\ \phi_2 = \left(-\dfrac{1}{2}\sin 2az\varphi_z, \cos 2az\varphi_r, \cos 2az\varphi_\theta\right), \\ \widetilde{\phi}_2 = \left(\dfrac{1}{2}\cos 2az\widetilde{\varphi}_z, \sin 2az\widetilde{\varphi}_r, \sin 2az\widetilde{\varphi}_\theta\right), \end{cases} \tag{8.4.63}$$

那么从 (8.4.61)~(8.4.63) 能够得到

$$\varphi_z = \widetilde{\varphi}_z, \quad \varphi_r = \widetilde{\varphi}_r, \quad \varphi_\theta = \widetilde{\varphi}_\theta.$$

φ_z, φ_r 和 φ_θ 满足

$$\begin{cases} (DD_* - 4a^2)^2\varphi_r + 4a^2\lambda_0\left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right)\varphi_\theta = 4a^2H_2 + 2aDH_1, \\ (DD_* - 4a^2)\varphi_\theta + \lambda_0\kappa\varphi_r = H_3, \\ \varphi_z = \dfrac{1}{2a}D_*\varphi_r, \\ \varphi_z = \varphi_\theta = \varphi_r = 0, \quad D\varphi_r = 0, \quad \text{在} r = \eta, 1, \end{cases}$$

这里 H_1, H_2 和 H_3 由下式给出

$$\begin{aligned} H_1 &= a((D_*h)^2 - hDD_*h), \\ H_2 &= a^2hDh - a^2D_*hh - \frac{1}{r}\Phi^2, \\ H_3 &= a\left(hD\Phi - D_*h\Phi + \frac{1}{r}\Phi h\right). \end{aligned}$$

由 (8.4.63) 能够算出

$$\begin{aligned} &\langle G(\widetilde{\psi}_1, \phi_i) + G(\phi_i, \widetilde{\psi}_1), \psi_1^*\rangle_H = 0, \quad i = 1, 2, \\ &\langle G(\psi_1, \phi_i) + G(\phi_i, \psi_1), \widetilde{\psi}_1^*\rangle_H = 0, \quad i = 0, 2, \\ &\langle G(\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\phi}_2) + G(\widetilde{\phi}_2, \widetilde{\psi}_1), \widetilde{\psi}_1^*\rangle_H = 0, \\ &\langle G(\psi_1, \widetilde{\phi}_2) + G(\widetilde{\phi}_2, \psi_1), \psi_1^*\rangle_H = 0. \end{aligned}$$

然后将 ϕ 代入到 (8.4.59) 和 (8.4.60) 中可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \beta_1 x - \frac{1}{\rho}x(x^2 + y^2)\langle G(\phi_0, \psi_1) + G(\psi_1, \phi_0), \psi_1^*\rangle_H \\ & -\frac{1}{\rho}x(x^2 - y^2)\langle G(\phi_2, \psi_1) + G(\psi_1, \phi_2), \psi_1^*\rangle_H \\ & -\frac{1}{\rho}2xy^2\langle G(\widetilde{\phi}_2, \widetilde{\psi}_1) + G(\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\phi}_2), \psi_1^*\rangle_H \\ & +o(|x|^3 + |y|^3) + \varepsilon_1(\lambda)\cdot O(|x|^3 + |y|^3), \end{aligned} \tag{8.4.64}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}= & \beta_1 y-\frac{1}{\rho}y(x^2+y^2)\langle G(\phi_0,\widetilde{\psi}_1)+G(\widetilde{\psi}_1,\phi_0),\widetilde{\psi}_1^*\rangle_H \\ & -\frac{1}{\rho}y(x^2-y^2)\langle G(\phi_2,\widetilde{\psi}_1)+G(\widetilde{\psi}_1,\phi_2),\widetilde{\psi}_1^*\rangle_H \\ & -\frac{1}{\rho}2yx^2\langle G(\widetilde{\phi}_2,\psi_1)+G(\psi_1,\widetilde{\phi}_2),\widetilde{\psi}_1^*\rangle_H \\ & +o(|x|^3+|y|^3)+\varepsilon_2(\lambda)\cdot O(|x|^3+|y|^3).\end{aligned} \tag{8.4.65}$$

通过直接计算得

$$\begin{aligned}\langle G(\phi_2,\psi_1)+G(\psi_1,\phi_2),\psi_1^*\rangle_H &= \langle G(\widetilde{\phi}_2,\widetilde{\psi}_1)+G(\widetilde{\psi}_1,\widetilde{\phi}_2),\psi_1^*\rangle_H \\ &= \langle G(\phi_2,\widetilde{\psi}_1)+G(\widetilde{\psi}_1,\phi_2),\widetilde{\psi}_1^*\rangle_H \\ &= \langle G(\widetilde{\phi}_2,\psi_1)+G(\psi_1,\widetilde{\phi}_2),\widetilde{\psi}_1^*\rangle_H.\end{aligned}$$

因此方程 (8.4.64) 和 (8.4.65) 可表达为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\beta_1(\lambda)x+\alpha x(x^2+y^2)+o(|x|^3+|y|^3)+\varepsilon_1\cdot O(|x|^3+|y|^3),\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta_1(\lambda)y+\alpha y(x^2+y^2)+o(|x|^3+|y|^3)+\varepsilon_2\cdot O(|x|^3+|y|^3),\end{cases} \tag{8.4.66}$$

其中

$$\alpha=-\frac{1}{\rho}\langle G(\phi_0+\phi_2,\psi_1)+G(\psi_1,\phi_0+\phi_2),\psi_1^*\rangle_H. \tag{8.4.67}$$

从 (8.4.61) 和 (8.4.62) 可知

$$\begin{cases}\varphi=-(\phi_0+\phi_2),\\ (A-\lambda_0 B)\varphi=G(\psi_1,\psi_1)=P(\psi_0+\psi_2).\end{cases}$$

因此由 (8.4.67) 给出的数 α 与 (8.4.50) 的数相同.

第三步. 定理 8.17 的证明. 当 $\alpha<0$ 时, $(x,y)=0$ 是方程 (8.4.66) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点. 因而 $u=0$ 是 (8.4.35) 在 $\lambda=\lambda_0$ 的局部渐近稳定平衡点. 由 (8.4.40) 和 (8.4.41) 及定理 6.2 能够得到结论 (2). 从 (8.4.66) 可得到结论 (3).

(8.4.35) 在 $(u,\lambda)=(0,\lambda_0)$ 处分歧出奇点 [102,115]. 再由第一步可知 (8.4.35) 从 $(0,\lambda_0)$ 分歧出的吸引子 $\mathcal{A}_T$ 一定含有一个由奇点构成的圆圈 S^1. 再从 (8.4.66) 和定理 5.11 可得到结论 (1).

第四步. 定理 8.18 的证明. 将使用鞍结点分歧定理 (定理 6.14) 证明该定理. 记

$$\begin{aligned}H^* &= \{(u_z,u_r,u_\theta)\in H\,|\,u_z(-z,r)=-u_z(z,r)\},\\ H_1^* &= H_1\cap H^*.\end{aligned}$$

容易验证 H^* 在 $L_\lambda + G$ 的作用下不变，即

$$L_\lambda + G : H_1^* \to H^*, \tag{8.4.68}$$

并且 $L_\lambda : H_1^* \to H^*$ 的第一特征值 $\beta_1(\lambda)$ 在 $\lambda = \lambda_0(T = T_C)$ 是单重的，其第一特征向量 ψ_1 由 (8.4.44) 给出．因而，从 (8.4.54) 和 (8.4.66)，可以看到

$$\langle G(x\psi_1 + \Psi(x,\lambda)), \psi_1^* \rangle_H = \alpha x^3 + o(|x|^3),$$

且 $\alpha > 0$ 如定理假设．

容易验证，对于 (8.4.68)，定理 6.14 的条件都是满足的．因而 (8.4.68) 在 $\lambda < \lambda_0$ 一侧存在一个鞍结分歧点 $\lambda^* < \lambda_0$(即 $T^* < T_C, \lambda^* = \sqrt{T^*}$)．

再由第一步，便可证得定理 8.18．

定理 8.17 和 8.18 的证明完毕．

§8.4.5 其他边界条件

1. 自由边界条件

现在考虑 (8.4.12) 和 (8.4.13) 相结合的边界条件

$$\begin{cases} u = 0, & \text{在}r = \eta, 1, \\ u_z = 0, & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \quad \text{在}z = 0, L. \end{cases} \tag{8.4.69}$$

问题 (8.4.31) 和 (8.4.69) 与 z 周期边值问题有相似的一面，即它们的特征向量都可以进行变量分离．

考虑下面特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_z + \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ -\left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_r + \dfrac{\partial p}{\partial r} = \lambda \left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa\right) u_\theta, \\ -\left(\Delta - \dfrac{1}{r^2}\right) u_\theta = \lambda \kappa u_r, \\ \dfrac{\partial (r u_z)}{\partial z} + \dfrac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0. \end{cases} \tag{8.4.70}$$

当 $0 \leqslant \mu < \eta^2$ 时，对几乎所有 $L > 0$(除可数个以外)，(8.4.70) 和 (8.4.69) 的第一特征值 $\lambda_0(L)$ 是单重的，其第一特征向量 ψ 可表达为 [37,98]

$$\psi = \begin{cases} \psi_z = -\sin \dfrac{k\pi z}{L} D_* h(r), \\ \psi_r = a_k \cos \dfrac{k\pi z}{L} h(r), \\ \psi_\theta = \cos \dfrac{k\pi z}{L} \Phi(r), \end{cases} \tag{8.4.71}$$

其中 $a_k = k\pi/L, k \geqslant 1$ 为依赖于流体高度 L 的整数，$(h(r), \Phi(r))$ 满足下面方程

$$\begin{cases} (DD_* - a_k^2)^2 h = a_k^2 \lambda_1 \left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa \right) \Phi, \\ (DD_* - a_k^2)\Phi = -\lambda_1 \kappa h, \\ h = Dh = 0, \quad \Phi = 0, \quad 在 r = \eta, 1. \end{cases} \tag{8.4.72}$$

对每一个整数 $k \geqslant 1$,(8.4.72) 有一个第一特征值 $\lambda_1 = \lambda_1(k)$. (8.4.70) 和 (8.4.69) 的第一特征值 $\lambda_0(L)$ 为

$$\lambda_0(L) = \min_{k \in N} \lambda_1(k) \tag{8.4.73}$$

在 (8.4.71) 中的波数 k 就是由 (8.4.73) 确定的，它代表了高度为 L 的流体漩涡个数.

同样，特征值问题 (8.4.38) 和 (8.4.69) 的所有特征值 $\beta_j(\lambda)$ 在 (8.4.73) 所给的 $\lambda_0(L)$ 处满足条件 (8.4.40) 和 (8.4.41).

ψ 的对偶特征向量 ψ^* 取如下形式

$$\psi^* = \begin{cases} \psi_z^* = -\sin \dfrac{k\pi z}{L} D_* h^*(r), \\ \psi_r^* = a_k \cos \dfrac{k\pi z}{L} h^*(r), \\ \psi_\theta^* = \cos \dfrac{k\pi z}{L} \Phi^*(r), \end{cases} \tag{8.4.74}$$

其中 $(h^*(r), \Phi^*(r))$ 满足

$$\begin{cases} (DD_* - a_k^2)^2 h^* = \lambda_1 \kappa \Phi^*, \\ (DD_* - a_k^2)\Phi^* = -a_k^2 \lambda_1 \left(\dfrac{1}{r^2} - \kappa \right) h^*, \\ h^* = Dh^* = 0, \quad \Phi^* = 0, \quad 在 r = \eta, 1. \end{cases}$$

对于 (8.4.71) 和 (8.4.74) 所给的第一特征向量 ψ 和 ψ^*, 定义下面的数

$$\alpha_0 = \frac{1}{\langle \psi, \psi^* \rangle_H} \langle G(\Phi, \psi) + G(\psi, \Phi), \psi^* \rangle, \tag{8.4.75}$$

其中 Φ 满足

$$(A - \lambda_0(L)B)\Phi = G(\psi, \psi),$$

这里算子 A, B 如 (8.4.34),G 如 (8.4.52) 所定义. 记

$$H = \{ u \in L^2(M, R^3) | \operatorname{div}(r\widetilde{u}) = 0 \}.$$

定理 8.19 假设 (8.4.75) 给的参数 $\alpha_0 < 0$, 则 Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.69) 在 $(u,\lambda) = (0, \lambda_0(L))$ 处发生连续性的跃迁，这里 $\lambda_0(L)$ 如 (8.4.73), 并且下面结论成立:

(1) Taylor 问题从 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0(L))$ 在 $\lambda > \lambda_0(L)$ 分歧出一个吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 由严格两个奇点构成 $\mathcal{A}_\lambda = \{u_1^\lambda, u_2^\lambda\}$;

(2) 存在 $u = 0$ 的一个邻域 $U \subset H$ 能够分解为两个开集

$$U = \bar{U}_1^\lambda + \bar{U}_2^\lambda, \quad U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \phi, \quad 0 \in \partial U_1^\lambda \cap \partial U_2^\lambda,$$

使得 $u_i^\lambda \in U_i^\lambda (i = 1, 2)$, 并且

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t, u_0) - u_i^\lambda\|_H = 0, \quad \forall u_0 \in U_i^\lambda, \ \ i = 1, 2,$$

这里 $u(t, u_0)$ 是 (8.4.31) 和 (8.4.69) 的解，其初值为 u_0.

(3) u_1^λ 和 u_2^λ 能够表达为

$$u_{1,2}^\lambda = \pm|\beta_1(\lambda)/\alpha_0|^{\frac{1}{2}}\psi + o(|\beta_1(\lambda)|).$$

其中 α_0 如 (8.4.75), ψ 如 (8.4.71), $\beta_1(\lambda)$ 满足 (8.4.40).

定理 8.20 当 $\alpha_0 > 0$ 时， Taylor 问题 (8.4.31) 及 (8.4.69) 在 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0(L))$ 发生跳跃性的跃迁，并且下面结论成立:

(1) Taylor 问题在 $\lambda < \lambda_0(L)$ 一侧有两个鞍结分歧点 (u_1^*, λ^*) 和 (u_2^*, λ^*), $0 < \lambda^* < \lambda_0(L)$, 并从每个 (u_i^*, λ^*) 在 $\lambda^* < \lambda$ 分歧出两个奇点分支 Γ_{i1}^λ 和 Γ_{i2}^λ, 如图 8.7 所示，并且 $\Gamma_{ij}^\lambda (1 \leqslant i, j \leqslant 2)$ 满足

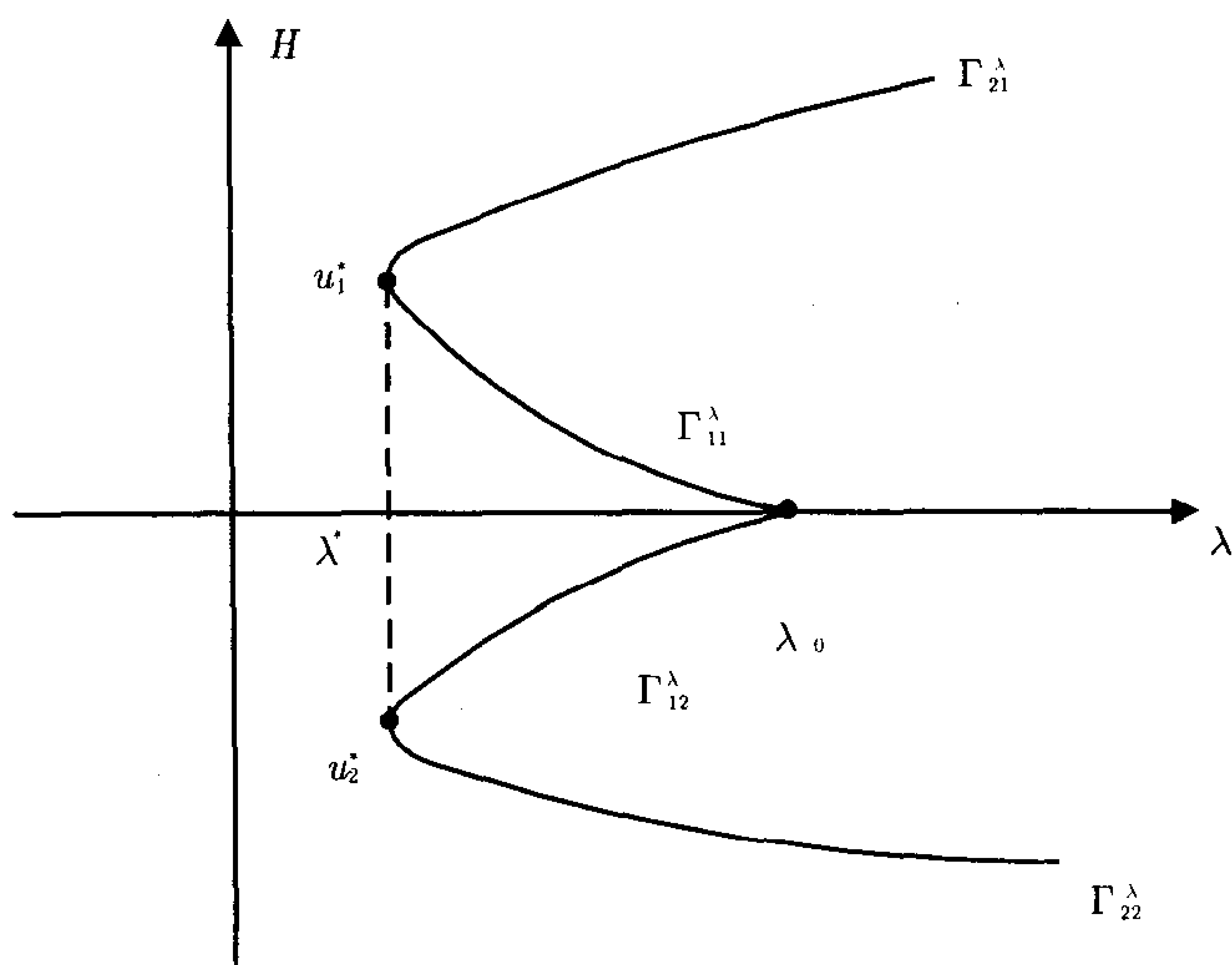


图 8.7

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\lambda_0(L)} \Gamma_{1j}^{\lambda} = \{0\}, & j=1,2, \\ \text{dist}(\Gamma_{2j}^{\lambda}, 0) > 0, & j=1,2, \quad 对\lambda \geqslant \lambda_0; \end{cases}$$

(2) 对每个 $\lambda^* < \lambda < \lambda_0(L)$, 空间 H 能够分解为两个开集

$$H = \bar{U}_1^{\lambda} + \bar{U}_2^{\lambda}, \quad U_1^{\lambda} \cap U_2^{\lambda} = \varnothing, \quad \Gamma_{11}^{\lambda}, \Gamma_{12}^{\lambda} \subset \partial U_1^{\lambda} \cap \partial U_2^{\lambda},$$

使得 Taylor 问题有两个吸引子 $\mathcal{A}_1^{\lambda}$ 和 $\mathcal{A}_2^{\lambda}$

$$\mathcal{A}_1^{\lambda} = \{0\} \subset U_1^{\lambda}, \quad \Gamma_{21}^{\lambda}, \Gamma_{22}^{\lambda} \subset \mathcal{A}_2^{\lambda} \subset U_2^{\lambda},$$

并且 $\mathcal{A}_i^{\lambda}$ 吸引 $U_i^{\lambda} (i=1,2)$.

(3) 当 λ 增大穿过 $\lambda_0(L)$ 时, 吸引子 $\mathcal{A}_2^{\lambda}$ 吸引 $H/\Gamma, \Gamma$ 为 $u=0$ 的稳定流形有余维 1, 并且

$$\text{dist}(\mathcal{A}_2^{\lambda}, 0) > 0, \quad \forall \lambda > \lambda_0(L).$$

定理 8.19 和 8.20 的证明是类似于定理 8.17 和 8.18. 这里省去证明细节.

2. 刚性边界条件和自由 – 刚性边界条件

刚性边界条件是取下面形式

$$u|_{\partial M} = 0. \tag{8.4.76}$$

自由 – 刚性边界条件为

$$\begin{cases} u = 0, & 在r = \eta, 1, \\ u = 0, & 在z = 0, \\ u_z = 0, & \dfrac{\partial u_r}{\partial z} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, \quad 在z = L. \end{cases} \tag{8.4.77}$$

因为从数学的角度, 这两种边界条件 (8.4.76) 和 (8.4.77) 没有实质性的区别. 因而这里只考虑刚性边界条件 (8.4.76), 其结果对于自由 – 刚性边界条件 (8.4.77) 也是成立的.

由单特征值的一般性定理 [52], 对几乎所有的实数对 $(\eta, L) \in (0,1) \times (0, +\infty)$, 在区域 $M = (0, L) \times (\eta, 1)$ 中特征值问题 (8.4.70) 和 (8.4.76) 的第一特征值 λ_0 是单重的, 并且 (8.4.38) 和 (8.4.76) 的所有特征值 $\eta_j(\lambda)$ 在 λ_0 处满足

$$\begin{cases} \beta_1(\lambda) \begin{cases} < 0, & \lambda < \lambda_0, \\ = 0, & \lambda = \lambda_0, \\ > 0, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \\ \text{Re}\beta_j(\lambda_0) < 0, \quad \forall j \geqslant 2. \end{cases} \tag{8.4.78}$$

事实上, 条件 (8.4.78) 能够通过应用证明 (8.3.34)~(8.3.38) 的方法证得, 只是用

第一特征向量 ψ 的共轭 ψ^* 取内积即可. 关于一般线性全连续场特征值临界横穿的更一般结果可参见文献 [69,70].

令 λ_0 是 (8.4.38) 和 (8.4.76) 的第一特征值并且是单重的, ψ 是第一特征向量, ψ^* 为对偶特征向量. 假定

$$\langle G(\psi), \psi^* \rangle_H \neq 0. \tag{8.4.79}$$

定理 8.21 假设条件 (8.4.79) 成立. 那么 Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.76) 在 $(u, \lambda) = (0, \lambda_0)$ 是一个混合型的跃迁, 并且下面结论成立:

(1) Taylor 问题在 $\lambda < \lambda_0$ 一侧具有一个鞍结分歧点 $(u^*, \lambda^*), 0 < \lambda^* < \lambda_0$, 并且有两个奇点分支 Γ_1^λ 和 Γ_2^λ 从 (u^*, λ^*) 分歧出来 (如图 6.4 (a) 所示), 它们满足

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \Gamma_1^\lambda = \{0\}, \\ \text{dist}(\Gamma_2^\lambda, 0) > 0, \quad 在\lambda = \lambda_0; \end{cases}$$

(2) 存在 $\delta > 0$, 对每个 $\lambda \neq \lambda_0, \lambda^* < \lambda < \lambda_0 + \delta$, 空间 H 能够分解成两个开集 $H = \bar{U}_1^\lambda + \bar{U}_2^\lambda, U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \phi$, 使得该问题有两个吸引子 $\mathcal{A}_i^\lambda \subset U_i^\lambda (i = 1, 2)$, 并且 $\mathcal{A}_i^\lambda$ 吸引 U_i^λ;

(3) Γ_i^λ 与吸引子 $\mathcal{A}_i^\lambda$ 有如下关系

$$\begin{cases} \Gamma_2^\lambda \subset \mathcal{A}_2^\lambda, \quad \text{dist}(\mathcal{A}_2^\lambda, 0) > 0, \quad \forall \lambda > \lambda^*, \\ \mathcal{A}_1^\lambda = \{0\}, \quad 当\lambda^* < \lambda < \lambda_0, \\ \mathcal{A}_1^\lambda = \Gamma_1^\lambda, \quad 当\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta. \end{cases}$$

定理 8.21 是定理 6.10 和 6.14 的直接推论.

§8.4.6 Taylor 漩涡结构

在小间隙情况下, Taylor 实验中观察到的漩涡结构应该在非线性理论中得到体现. 这一节将从数学上严格地证实 Taylor 漩涡的存在及其稳定性, 从而获得与实验一致的理论结果.

这里只考虑自由边界条件 (8.4.69) 的情况. 下面定理表明, 小间隙情况下 Taylor 问题的解是以 Taylor 漩涡作为其渐近结构, 并在轴对称扰动下具有稳定性.

定理 8.22 令 $r_1 \gg r_2 - r_1$ 满足 (8.4.24), 则 Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.69) 在 $(u, T) = (0, T_C)$ 发生连续性跃迁, 这里 $T_C = \lambda_0^2(L)$ 为临界 Taylor 数, $\lambda_0(L)$ 如 (8.4.73). 并且当 $T_C < T < T_C + \delta$, 对某个 $\delta > 0, H$ 可分解为两个开集 $H = \bar{U}_1^\lambda + \bar{U}_2^\lambda, U_1^\lambda \cap U_2^\lambda = \varnothing$, 使得下面结论成立:

(1) 对任何初值 $u_0 \in U_i^\lambda (i = 1, 2)$, 存在时间 $t_0 > 0$, 使当 $t > t_0$ 时，Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.69) 的解 $u(t, u_0) = (\widetilde{u}, u_\theta)$ 中 $\widetilde{u} = (u_z, u_r)$ 拓扑等价于图 8.8(a) 所示结构对 $u_0 \in U_1^\lambda$, 等价于 (b) 所示结构对 $u_0 \in U_2^\lambda$, 这里 $u(t, u_0)$ 是以 u_0 为初值的解.

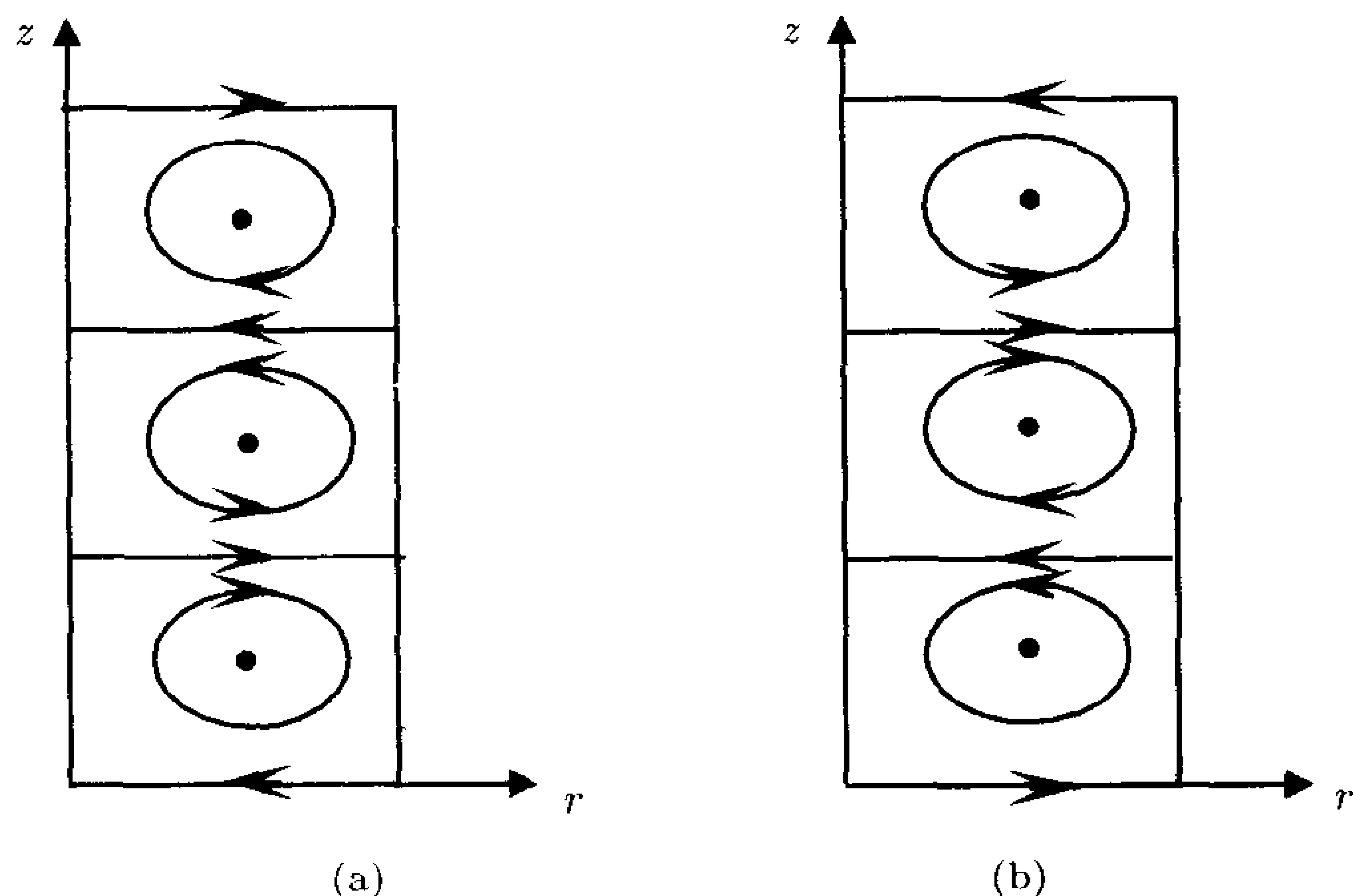


图 8.8　(a) 和 (b) 有相反的定向

(2) 当 $t > t_0$ 时，$\widetilde{u}(t, u_0)$ 具有 $k \simeq \dfrac{3.117}{\pi} L$ 个漩涡，这里长度尺标取 $d = r_2 - r_1 = 1, L \gg d = 1$.

证明　应用定理 8.16 和 8.19 再结合结构稳定性定理 (定理 8.2) 来证明该定理.

首先，当 $r_1 \gg r_2 - r_1$ 满足 (8.4.24), 方程 (8.4.19) 是 (8.4.31) 的近似，而特征方程 (8.4.21) 是 (8.4.70) 的近似. 因而定理 8.16 和定理 8.19 对证明该定理都是有效的. 分下面几步进行证明.

第一步. 第一特征向量的拓扑结构. 由 (8.4.24) 知 $1 - \mu > 0$ 是一个小量，因而特征方程 (8.4.22) 是 (8.4.21) 或 (8.4.70) 的近似. 先考虑 (8.4.22) 及 (8.4.69) 第一特征向量的拓扑结构.

如分离变量 (8.3.43) 那样，可以求得 (8.4.22) 和 (8.4.69) 的第一特征向量为

$$\varphi_1 = \begin{cases} u_r = \cos a_k z h(r), \\ u_z = -\dfrac{1}{a_k} \sin a_k z h'(r), \\ u_\theta = \dfrac{1}{a_k^2 \lambda_0} \cos a_k z \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - a_k^2 \right)^2 h(r), \end{cases} \tag{8.4.80}$$

其中 $a_k = \dfrac{k\pi}{L}, \lambda_0 = \lambda_0(L)$ 如 (8.4.73), 而 $h(r)$ 满足

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - a_k^2 \right)^3 h = -a_k^2 \lambda_0^2 h, \\ h = h' = 0, \quad \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - a^2 \right)^2 h = 0, \quad 在 r = r_1, r_1 + 1. \end{cases} \tag{8.4.81}$$

当 $L \gg 1$, 即流体高度相对于两柱体之间的间隙充分大时，第一特征值 λ_0 和波长 a_k 为

$$\lambda_0^2 \simeq 1700, \quad a_k \simeq 3.117, \tag{8.4.82}$$

并且第一特征向量 $h(r)$ 由下式给出

$$h(r) \simeq \cos\alpha_0\xi - 0.06\cos h\alpha_1\xi\cos\alpha_2\xi + 0.1\sin h\alpha_1\xi\sin\alpha_2\xi, \tag{8.4.83}$$

其中 $\xi = r - r_1 - \dfrac{1}{2}, \alpha_0 \simeq 3.97, \alpha_1 \simeq 5.2, \alpha_2 \simeq 2.1, \cos hx$ 和 $\sin hx$ 为双曲函数[8]. 函数 (8.4.83) 的图形如图 8.9 所示.

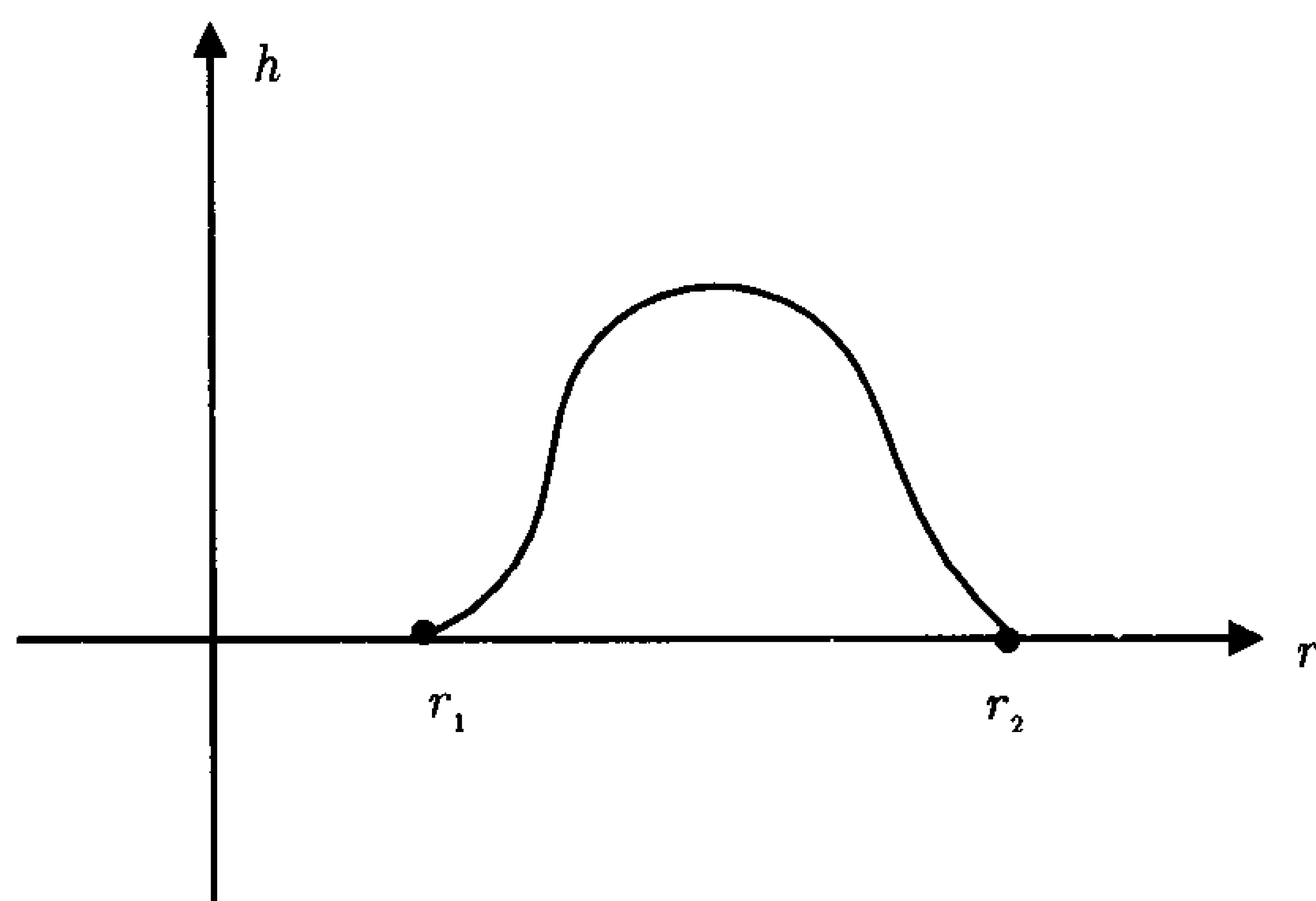


图 8.9 特征函数 (8.4.83) 图形

第二步. 在 (8.4.80) 中的向量场

$$\widetilde{u}_0 = (\cos a_k z h(r), -\frac{1}{a_k}\sin a_k = h'(r)) \tag{8.4.84}$$

具有图 8.8 所示的拓扑结构，并且由 $a_k = \dfrac{k\pi}{L}$ 及 (8.4.82) 可知 (8.4.84) 具有 $k \simeq 3.117L/\pi$ 个漩涡.

下面证明 (8.4.84) 是结构稳定的. 通过直接计算从 (8.4.83) 可以得到

$$h''(r) \neq 0, \quad 在r = r_1和r_1 + 1, \quad 及h''(r_0) \neq 0,$$

其中 $r_0 = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$ 满足 $h'(r_0) = 0$. 因此有

$$\det D\widetilde{u}(r,z) \neq 0, \quad 在(r,z) = \left(r_0, \frac{3L}{2k}\right), \quad j = 1, \cdots, k,$$

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z\partial r} & \dfrac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial r} & \dfrac{\partial u_z}{\partial r^2} \end{pmatrix} = \cos^2\frac{k\pi z}{L}h''(r) \neq 0,$$

对所有边界点 $(r,z)=(r_i,jL/k), i=1,2, 1\leqslant j\leqslant k$.

这样，向量场 (8.4.84) 是 D 正则的．由定理 8.2 可知向量场 (8.4.84) 是结构稳定的.

第三步．要证明 (8.4.70) 和 (8.4.69) 的第一特征向量 (8.4.71) 中的场

$$\widetilde{u}=\left(a_k\cos\frac{k\pi z}{L}\widetilde{h}(r), -\sin\frac{k\pi z}{L}D_*\widetilde{h}(r)\right) \tag{8.4.85}$$

是拓扑等价于 (8.4.84), 这里 $D_*=\dfrac{d}{dr}+\dfrac{1}{r}, \widetilde{h}(r)$ 满足下面方程，它是由 (8.4.72) 导出

$$\begin{cases} (DD_*-a_k^2)^3\widetilde{h}=-a_k^2\lambda_1^2\kappa\left(\dfrac{1}{r^2}-\kappa\right)\widetilde{h} \\ \widetilde{h}=D\widetilde{h}=0, \quad (DD_*-a_k^2)^2\widetilde{h}=0, \quad 在r=\eta,1. \end{cases} \tag{8.4.86}$$

当采用尺标 $r_2-r_1=1$ 取代 $r_2=1$ 在 (8.4.17) 中，方程 (8.4.81) 是 (8.4.86) 的近似，因而 $\|\widetilde{h}-h\|$ 是一个小量．于是由 (8.4.84) 的结构稳定性可推知 (8.4.85) 也是结构稳定的，并且拓扑等价于向量场 (8.4.84).

第四步．由 (8.4.24), $1-\mu$ 是一个小量．此时 (8.4.22) 和 (8.4.69) 的第一特征向量 (8.4.80) 逼近 (8.4.70)(8.4.69) 的第一特征向量 (8.4.71), 即 $\|\psi-\varphi_1\|$ 是一个小量.

对于 (8.4.80) 所给的特征向量 φ_1, 有

$$\alpha=\frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\langle G(\Phi,\varphi_1)+G(\varphi_1,\Phi),\varphi_1\rangle_H,$$

其中 Φ 满足

$$(A-\lambda_0B)\Phi=G(\varphi_1,\varphi_1), \tag{8.4.87}$$

这里算子 A 和 B 由 (8.4.27) 所定义.

由 (8.4.52), 有

$$\langle G(\Phi,\varphi_1),\varphi_1\rangle_H=0,$$

$$\langle G(\varphi_1,\Phi),\varphi_1\rangle_H=-\langle G(\varphi_1,\varphi_1),\Phi\rangle_H.$$

因此从 (8.4.87) 推出

$$\begin{aligned}\alpha&=-\frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\langle G(\varphi_1,\varphi_1),\Phi\rangle_H\\&=-\frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\langle (A-\lambda_0B)\Phi,\Phi\rangle_H.\end{aligned}$$

$A-\lambda_0B$ 是对称扇形算子，并且

$$G(\varphi_1,\varphi_1)\perp\ker(A-\lambda_0B), \quad \Phi\perp\ker(A-\lambda_0B).$$

因此推出

$$\alpha = -\frac{1}{\|\psi_1\|^2}\langle (A-\lambda_0 B_0)^{\frac{1}{2}}\Phi, (A-\lambda_0 B_0)^{\frac{1}{2}}\Phi\rangle_H.$$

即 $\alpha < 0$. 再由 $\|\psi - \varphi_1\|$ 是一个小量可知，对于 (8.4.71) 所给的特征向量 ψ, 由 (8.4.75) 所定义的数 $\alpha_0 < 0$. 这样，由定理 8.19 推知 Taylor 问题 (8.4.31) 和 (8.4.69) 从 $(u,\lambda) = (0,\lambda_0)$ 处发生连续型的跳迁. 此外再由第三步的结论以及注 8.3 和定理 8.19 的结论 (3) 便可推得该定理. 定理证毕.

§8.4.7 关于流体动力学的解释

Taylor 问题在物理中也属于非平衡相变范畴, 该相变的物理机制与 Rayleigh-Benard 对流不同，它是由旋转产生的离心力造成的. Taylor[97] 在 1923 年建立线性理论得到了 Taylor 数和临界 Taylor 数. 1966 年，Velte [102] 和 Iudovich [115] 独立地对 z 周期边界条件的 Taylor 问题建立了定态分歧理论. 然而，这些理论都有一个共同的缺陷，就是不能解释为什么产生的相变具有稳定性，并且也无法说明相变的类型及其跃迁的动力学性质. 下面对 Taylor 问题的非线性理论进行物理解说，以加深人们对该问题的理解.

1. z 周期边界条件和自由边界条件

这两种边界条件下，Taylor 问题具有相似的相变性质. 正如在 Benard 问题的物理评述中所说，z 周期边界条件是高度 L 与两柱体之间间隙 $r_2 - r_1$ 相比充分大情况的一种近似, 自由边界条件 (8.4.69) 是边界充分光滑及流体黏性系数很小或流体在边界附近高速运动等情况下的近似描述.

定理 8.17~8.20 表明，周期和自由两种边界条件的 Taylor 问题在 $\mu \geqslant 0$ 情况下只有连续和跳跃这两类跃迁模式. 相变发生的稳态流有三种不同类型:

类型 1： $u = 0$ 代表 Couette 流;

类型 2： $u = C(T - T_C)^\beta \psi + o(|T - T_C|^\beta)$ 代表具有单列 Taylor 漩涡结构的稳态流;

类型 3：在 T_C 附近远离 $u = 0$ 的稳态流.

当 $\alpha < 0$ 和 $\alpha_0 < 0$ 时，Taylor 问题的非平衡相变具有下面动力学性质:

(1) 只有一个相变临界 Taylor 数 $T_C(=\lambda_0^2)$, 在 T_C 处 I 型稳态流与 II 型稳态流之间将发生状态跃迁;

(2) 在 T_C 处的相变是连续的，也就是说，当 Taylor 数 T 连续增加地超过 T_C 时，流体状态将从 Couette 流中生出 Taylor 漩涡，其漩转速度从零连续地随 T 而增长. 反之当 T 减小地穿过 T_C 时，Taylor 漩涡会连续地减弱而消失;

(3) 相变的临界指数 $(T - T_C)^\beta$ 为 $\beta = \dfrac{1}{2}$;

(4) 在小间隙情况下，参数 α 和 α_0 一定满足 $\alpha < 0$ 和 $\alpha_0 < 0$, 这是因为即使外圆柱不转动，在内圆柱高速转动带动下，在边界 r_2 上流体转 $\Omega_2 > 0$, 并且

有

$$\mu = \Omega_2/\Omega_1 \to 1, \quad \text{当} r_1/(r_2 - r_1) \to \infty.$$

由定理 8.22 证明的第四步知 $\alpha < 0$ 和 $\alpha_0 < 0$. 这说明在小间隙同方向转动圆柱体的 Taylor 型实验中只能观察到单排列漩涡结构的相变现象.

当 $\alpha > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$ 时， Taylor 问题的非平衡相变具有完全不同的动力学性质. 根据定理 8.18 和定理 8.20, 可以总结为以下几个物理性质:

(1) 有两个不同的相变临界 Taylor 数 T_C^1 和 $T_C^2, T_C^1 < T_C^2 (T_C^1 = \lambda^{*2}, T_C^2 = \lambda_0^2)$, 在 T_C^1 和 T_C^2 处只存在 I 型和 III 型稳态流之间的状态跃迁;

(2) 在 T_C^1 和 T_C^2 处的相变都是不连续的，即 I 型流和 III 型流之间转换时，其流速之间存在一个间隙;

(3) 当 Taylor 数 $T < T_C^1$ 时，对流体的任何扰动经过一段时间后会恢复到 Couette 流状态；当 $T_C^1 < T < T_C^2$ 时，一个大的扰动可能会产生 Couette 流和 III 型流之间的跃迁；而当 $T_C^2 < T$ 时，任何扰动都可恢复到 III 型.

一个重要的问题是，是否存在 $\alpha > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$ 的情况. 前面我们看到，如果 $\alpha > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$, 那么它一定是在宽间隙的条件下发生. 由于理论上的困难，这个问题可能只能通过数值计算和物理实验来确定.

2. 刚性边界条件和自由 – 刚性边界条件

这两种边界条件在物理实验中最容易实现. 从数学的角度, 定理 8.21 不是一个好的定理, 因为条件 (8.4.79) 不容易被验证. 然而从物理的角度定理 8.21 非常有意义. 这是因为在物理实验中能被观察到的现象在数学上都满足条件 (8.4.79). 也就是说在这两种边界条件下，不满足 (8.4.79) 的情况，即下面关系

$$\langle G(\psi), \psi^* \rangle_H = 0$$

成立的条件在物理实验中既不能被观察到也不能被实现.

从定理 8.21 可以看到另一种非常不同的相变模式: 混合型跃迁. 虽然在第七章关于二元体相分离的研究中遇到过混合型跃迁. 然而那里的情况有些特殊. 主要原因是初值条件的变化是由状态的涨落造成，变化幅度小，并且不易人为控制，然而流体情况就不一样了，方程的初始条件可通过扰动而任意改变，这样混合型相变的动力学特征就可以通过物理实验而观察到.

现在根据定理 8.21 关于混合型相变总结成下面几个物理的动力学性质:

(1) 有两个不同的相变临界 Taylor 数 $T_C^1 < T_C^2 (T_C^1 = \lambda^{*2}, T_C^2 = \lambda_0^2)$,Taylor 数 T 在 $T_C^1 < T < T_C^2$ 内只有 I 型流与Ⅲ型流之间的跃迁, 在 $T_C^2 < T < T_C^2 + \delta (\delta > 0$ 为某一数) 仅有Ⅱ型流与Ⅲ型流之间的跃迁;

(2) 在 T_C^1 处的相变是不连续的， T_C^2 处既可能发生连续性相变又可能发生不连续的相变;

(3) 当 T 增大地穿过 T_C^1 时，只有较大的扰动才可能从 Couette 流跃迁到Ⅲ型流状态，而当 T 降低地越过 T_C^1 时Ⅲ型流状态一定会跃迁到 Couette 流状态；

(4) 当 T 增大地穿过 T_C^2 时， Couette 流状态或者跃迁到Ⅱ型流上，或者跃迁到Ⅲ型流上，而当 T 降低地穿过 T_C^2 时，Ⅱ型流状态一定会跃迁到Ⅰ型流态上，但Ⅲ型流状态需要一个较大的扰动才可能跃迁到Ⅰ型流状态上；

(5) Ⅱ型流相变的临界指数 $\beta = 1$；

(6) 在小间隙情况下，由定理 8.15 和 8.16, 人们很难从实验上区分Ⅱ型流和Ⅲ型流，因为它们都是被第一特征向量所控制，此时 T_C^1 与 T_C^2 也非常接近. 这再一次说明在小间隙同轴圆柱体同向旋转的古典 Taylor 实验中，无论是什么物理边界条件，所观测到的相变都是在 Couette 流和如图 8.8 所示的 Taylor 漩涡流之间进行.

3. 关于 $\mu < 0$ 情况

当 $\mu < 0$, 也就是内柱体与外柱体的旋转不同方向时，物理实验表明情况要复杂得多. 特别是当 $|\mu|$ 较大时，相变不再是轴对称的. 此时必须考虑三维摄动方程，而二维摄动方程 (8.4.10) 不再有效. 然而当 $|\mu|$ 较小时，还能保持轴对称, 但是数值计算表明 Taylor 漩涡在径向 r 的排列不再是单一的. 这说明分别由 (8.4.50) 和 (8.4.75) 定义的参数 α 和 α_0 一定是大于零的, 即 $\alpha > 0$ 和 $\alpha_0 > 0$[8,17].

4. 关于三维初值扰动

所有关于 Taylor 问题的相变定理 (定理 8.15~8.22) 全是轴对称条件下获得的. 这种假设是建立在物理实验的基础之上，也是 Taylor 线性理论所采用的. 这种假设对 $\mu \geqslant 0$ 是合理的.

值得指出的是，定理 8.15~8.22 只适用于轴对称的初值扰动，即初始条件 $u(0) = u_0$ 必须与 θ 无关. 作者对小间隙情况证明了 Taylor 问题相变的三维摄动理论 [70], 从而完整地从数学上理解了小间隙同向旋转的 Taylor 问题.

§8.5 赤道上大气层的 Walker 环流

§8.5.1 赤道上的 Walker 环流

由地球表面与大气层顶部的温差而产生的热对流是大气物理与气象学的主要研究对象之一. 它对整个地球的气候演化与变迁起到重要作用，并且与地球自转一起构成大气环流的主驱动力.

在大气环流中，一个重要的现象就是赤道上的 Walker 环流，它是由 Walker 根据气象观测资料提出的一种理论 [89]. 由于地球赤道的地理位置关于地球自转轴以及南半球与北半球温度分布具有一种对称性，很自然地，从理论上人们可以

推测地球大气层在赤道的截面关于大气环流应该是一个不变的环面. 这一点也可从全局大气环流动力方程得到证实 (见后面详细讨论). 又由于上下温差的作用, 在这个赤道大气层环面上产生对流. 这样就形成了赤道上的 Walker 环流. 具体 Walker 环流的结构如图 8.10 所示.

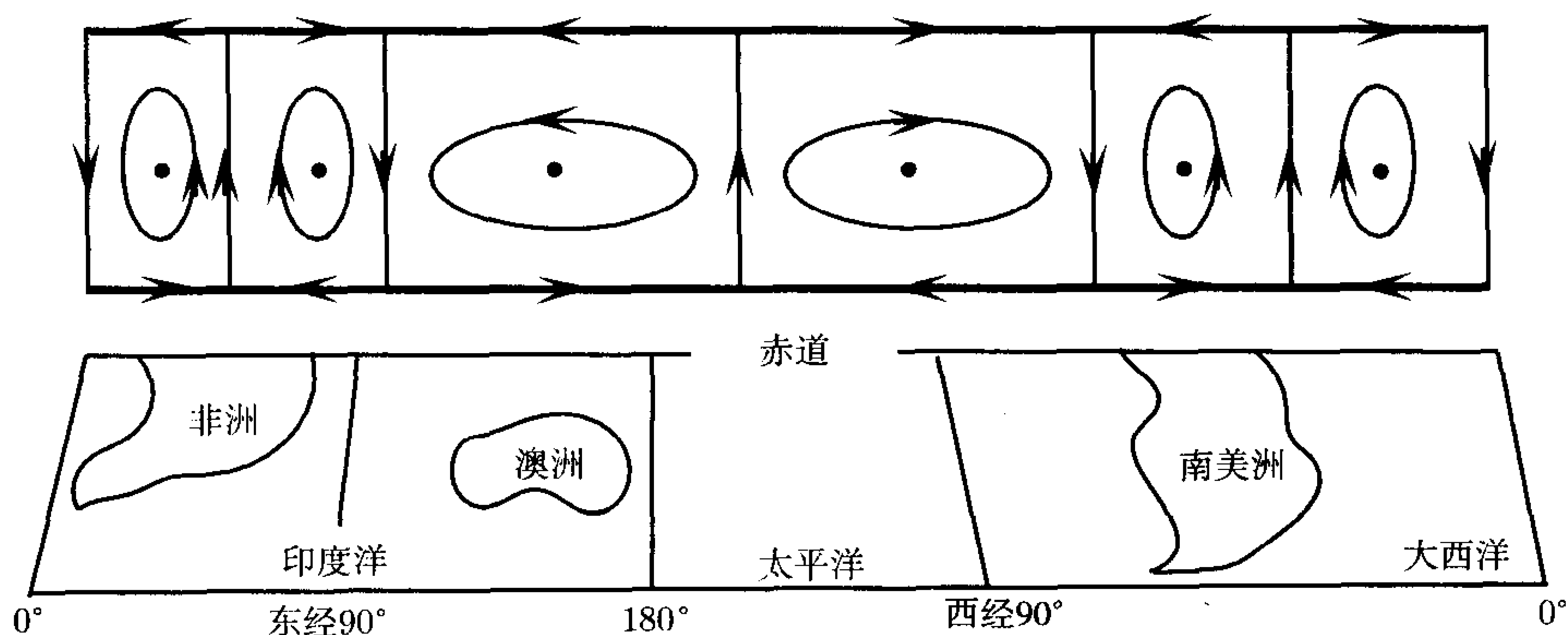


图 8.10　赤道上大气层的 Walker 环流

虽然 Walker 环流的提出是建立在大量气象观察资料上, 并且具有合理的理论基础, 然而该理论没有得到任何严格地数学推证. 在地球这样一个大尺度上, 任何气象观测资料都不能作为 Walker 环流存在的充分证据. 同时大气物理实验也很难模拟大气环流的动态演化. 因而从地球物理大气基本方程的角度, 对大气环流动力学进行研究, 并建立相应的数学理论是一个具有非常重要意义的课题.

这一节的目的就是从理想化的大气基本方程出发, 根据地球物理原理及问题本身特点作必要的简化, 然后从数学上证明赤道上环流的存在性, 这类环流相似于 Walker 环流, 并且得到一些相关动力学性质.

§8.5.2　大气动力学基本方程

控制大气环流的动力学方程是由球坐标下考虑地球自转的 Navier-Stokes 方程与热力学方程相耦合的系统. 在全球尺寸上, 由于大气运动中的空气在局部的可压缩性对全局的宏观影响可以忽略不计, 因而可以近似地认为全球大气运动是不可压缩的.

全球坐标为 (φ,θ,r), 其中 φ 代表径度, θ 代表纬度及 r 代表球径向坐标. 或者更直观地说, φ 代表了地球东西向的角坐标, θ 为南北向的角坐标, r 为地球中心到大气层的半径. 其对应的流体速度为 $u=(u_\varphi,u_\theta,u_r)$. 这样, 在球坐标下考虑地球的 Navier-Stokes 方程为

$$\rho\left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+\nabla_u u_\varphi+\frac{u_\varphi u_r}{r}-\frac{u_\varphi u_\theta}{r}\mathrm{tg}\theta-2\Omega\sin\theta u_\theta+2\Omega\cos\theta u_r\right]$$

$$= \mu\bar{\Delta}u_\varphi - \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \tag{8.5.1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \nabla_u u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} + \frac{u^2\varphi}{r}\mathrm{tg}\theta + 2\Omega\sin\theta u_\varphi\right] = \mu\bar{\Delta}u_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}, \tag{8.5.2}$$

$$\rho\left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + \nabla_u u_r - \frac{u_\varphi^2 + u_\theta^2}{r} - 2\Omega\cos\theta u_\varphi\right] = \mu\bar{\Delta}u_r - \frac{\partial p}{\partial r} - \rho g, \tag{8.5.3}$$

$$\mathrm{div}u = 0, \tag{8.5.4}$$

其中 $(\varphi,\theta,r) \in (0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \times (r_0, r_0+h), r_0$ 为地球半径， h 为大气层高度， μ 为黏性系数， ρ 为质量密度， Ω 为地球自转角速度， p 为压力， g 为重力加速度，在球坐标下，微分算子 $\nabla_u = u\cdot\nabla, \mathrm{div}u$ 和 $\bar{\Delta}$ 定义如下

$$\begin{cases} \nabla_u = \cdot\nabla = \dfrac{u_\varphi}{r\cos\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \dfrac{u_\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + u_r\dfrac{\partial}{\partial r}, \\ \mathrm{div}u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \dfrac{1}{r\cos\theta}\dfrac{\partial(u_\theta\cos\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\cos\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}, \\ \bar{\Delta}u_\varphi = \Delta u_\varphi + \dfrac{2}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \dfrac{2\sin\theta}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{u_\varphi}{r^2\cos^2\theta}, \\ \bar{\Delta}u_\theta = \Delta u_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} - \dfrac{u_\theta}{r^2\cos\theta} - \dfrac{2}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}, \\ \bar{\Delta}u_r = \Delta u_r - \dfrac{2u_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial(u_\theta\cos\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{2}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}, \\ \Delta = \dfrac{1}{r^2\cos\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\cos^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right). \end{cases} \tag{8.5.5}$$

球坐标下的热力学方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla_u T = \kappa\Delta T + Q, \tag{8.5.6}$$

其中微分算子 ∇_u 和 Δ 如 (8.5.5) 中所定义， Q 为内部加热率， κ 为热扩散系数, T 为温度.

在流体是不可压缩情况下，质量密度满足下面经验关系

$$\rho = \rho_0(1-\alpha(T-T_0)), \tag{8.5.7}$$

其中 ρ_0 为温度 T_0 时的质量密度， α 为热膨涨系数.

- 在地球物理流体动力学中，需要对方程 (8.5.1)~(8.5.7) 进行简化．首先，在大气层中内部加热率 Q 通常是由火山爆发、工厂排热及太阳对大气层热辐射加温效应产生．由于空气的可穿透性，太阳热辐射直接对空间产生的加热效应很小．而就地球整体而言，火山爆发及工厂排热等热源可以忽略不计．因而可令

$$Q = 0 \text{ 在 } (8.5.6) \text{ 中}.$$

- 其次，由于大气对流层主要分布高度大约为 10~15km, 这与它的水平方向尺度和地球半径 (约 6000km) 相比很小. 因此可以用区域 $S^2\times(r_0,r_0+h)$ 作为大气层定义域，用地球半径 r_0 取代 (8.5.1) ~(8.5.5) 中的变量 r. 这一近似过程在大气科学中广泛采用，并证明具有良好精确性.
- 最后就是关于方程 (8.5.1)~(8.5.3) 采用 Boussinesq 近似. 这里流体热对流问题中普遍采用的方法. 由于对一般流体热膨涨系数 α 非常小，通常在 10^{-3} 到 10^{-4} 范围. 在温度变化不大 (在 10° 数量级) 情况下，作为 u 的系数 ρ 可以挖取为 ρ_0. 但是作为重力加速度的系数 ρ 不能近似取 ρ_0, 而必须取 (8.5.7)

在上述简化下，就得到下面大气环流的动力学基本方程

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\nu\bar{\Delta}u-2\omega\times u-\dfrac{1}{\rho_0}\nabla P-(1-\alpha(T-T_0))g\overrightarrow{k},\\ \dfrac{dT}{dt}=\kappa\Delta T,\\ \text{div}u=0,\end{cases}\tag{8.5.8}$$

这里 $(\varphi,\theta,z)\in M=S^2\times(r_0,r_0+h), u=u_\varphi e_\varphi+u_\theta e_\theta+u_z e_z, (e_\varphi,e_\theta,e_z)$ 为球面坐标系中的局部规范基，$\nu=\mu/\rho_0$ 为动力黏性系数，$\overrightarrow{k}=(0,0,e_z)$ 为高度 z 方向单位向量，

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}=&\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_\varphi+\frac{u_\varphi u_z}{r_0}-\frac{u_\varphi u_\theta}{r_0}\text{tg}\theta\right)e_\varphi\\&+\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_\theta+\frac{u_\theta u_z}{r_0}+\frac{u_\varphi^2}{r_0}\text{tg}\theta\right)e_\theta\\&+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_z-\frac{u_\varphi^2+u_\theta^2}{r_0}\right)e_z,\end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T,$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}u=&\left(\Delta u_\varphi+\frac{2}{r_0^2\cos\theta}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{2\sin\theta}{r_0^2\cos^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r_0^2\cos^2\theta}\right)e_\varphi\\&+\left(\Delta u_\theta+\frac{2}{r_0}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r_0^2\cos\theta}-\frac{2}{r^2\cos\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)e_\theta\\&+\left(\Delta u_z-\frac{2u_z}{r_0^2}-\frac{2}{r_0^2\cos\theta}\frac{\partial(u_\theta\cos\theta)}{\partial\theta}-\frac{2}{r_0^2\cos\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)e_z,\end{aligned}$$

$$\omega\times u=(\Omega\cos\theta u_z-\Omega\sin\theta u_\theta)e_\varphi+\Omega\sin\theta u_\varphi e_\theta-\Omega\cos\theta u_\varphi e_z,$$

$$\nabla p=\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}e_\varphi+\frac{1}{r_0}\frac{\partial p}{\partial\theta}e_\theta+\frac{\partial p}{\partial z}e_z,$$

$$\text{div}u=\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r_0\cos\theta}\frac{\partial(u_\theta\cos\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

其中微分算子 $(u\cdot\nabla)$ 和 Δ 表达为

$$(u\cdot\nabla)=\frac{u_\varphi}{r_0\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r_0}\frac{\partial}{\partial\theta}+u_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta=\frac{1}{r_0^2\cos\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r_0^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

对于大气环流运动，合适的物理边界条件有刚性和自由 - 刚性边界条件. 为了简单这里只考虑刚性边界条件

$$\begin{cases}u=0, & 在z=r_0,\quad r_0+h,\\ T=T_0 \quad 在z=r_0, & T=T_1,\quad 在z=r_0+h,\end{cases}\tag{8.5.9}$$

其中 T_1 代表大气层顶部温度， T_0 代表地球表面温度， $T_0>T_1$.

§8.5.3 赤道上大气环流方程

为了讨论 Walker 环流，需要作一个基本的大气物理假设，后面的整个理论就是建立在这个假设基础之上的. 该假设陈述如下：

假设 A 大气层的赤道截面是大气流体运动的一个不变环面. 或等价地说，大气环流速度场 $u=(u_\varphi,u_\theta,u_z)$ 在赤道 $\theta=0$ 上纬度分量 $u_\theta=0$.

假设 A 的大气物理意义就是南半球或北半球的气流不会越过赤道进入另一个半球中去. 这个假设是建立在气象观测资料基础上的. 如果这个假设不成立则 Walker 环流的理论就不会是正确的.

根据假设 A, 令 $\theta=0,u_\theta=0$, 则从大气环流原始方程 (8.5.8), 得到下面赤道大气环流方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_\varphi+\dfrac{u_\varphi u_z}{r_0}=\nu\left(\Delta u_\varphi+\dfrac{2}{r_0^2}\dfrac{\partial u_z}{\partial\varphi}-\dfrac{2u_\varphi}{r_0^2}\right)-2\Omega u_z-\dfrac{1}{\rho_0 r_0}\dfrac{\partial p}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial u_z}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u_z-\dfrac{u_\varphi^2}{r_0}=\nu\left(\Delta u_z-\dfrac{2u_z}{r_0^2}-\dfrac{2}{r_0^2}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\ \qquad\qquad+2\Omega u_\varphi-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial z}-(1-\alpha(T-T_0))g,\\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+(u\cdot\nabla)T=\kappa\Delta T,\\ \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_z}{\partial z}=0,\end{cases}\tag{8.5.10}$$

其中

$$(u\cdot\nabla)=\frac{u_\varphi}{r_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta=\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

赤道截面的环形区域为 $M = S^1 \times (r_0, r_0 + h)$.

为了方便，记

$$(x_1, x_2) = (r\varphi, z) \quad 及(u_1, u_2) = (u_\varphi, u_z).$$

然后再关于方程 (8.5.10) 进行无量纲化如下

$$\begin{aligned}
&x = hx' \quad (x = x_1, x_2),\\
&t = h^2 t'/\kappa,\\
&u = \kappa u'/h,\\
&T = \beta h(T'/\sqrt{R}) + T_0 - \beta h x_2',\\
&p = \rho_0 \kappa^2 p'/h^2 - g\rho_0(hx_2' + \alpha\beta h^2 (x_2')^2/2),\\
&P_r = \nu/\kappa,
\end{aligned}$$

这里 $\beta = (T_0 - T_1)/h, T_0 > T_1$ 如 (8.5.9) 所定义，P_r 为 Prandtl 数，R 为 Rayleigh 数定义为

$$R = \frac{\alpha\beta g}{\kappa\nu} h^4.$$

省去上撇，方程 (8.5.10) 的无量纲形式可写为

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u_1}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u_1 + \dfrac{u_1 u_2}{r_0}\right] = \Delta u_1 + \dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{2u_1}{r_0^2} - 2\Omega u_2 - \dfrac{\partial p}{\partial x_1},\\
\dfrac{1}{P_r}\left[\dfrac{\partial u_2}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u_2 - \dfrac{u_1^2}{r_0}\right] = \Delta u_2 - \dfrac{2u_2}{r_0^2} - \dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2\Omega u_1 + \sqrt{R}T - \dfrac{\partial p}{\partial x_2},\\
\dfrac{\partial T}{\partial t} + (u\cdot\nabla)T = \Delta T + \sqrt{R}u_2,\\
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0,
\end{cases} \tag{8.5.11}$$

这里定义域为 $(x_1, x_2) \in M = (0, L) \times (r_0, r_0 + 1)$, 其中 r_0 和 L 分别为以 h 为单位的地球半径和赤道周长，及

$$\begin{aligned}
(u\cdot\nabla) &= u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2},\\
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

此时，边界条件 (8.5.9) 变为 x_1 方向是周期的， x_2 方向是自由 – 刚性边界条件. 具体表达为如下形式

$$\begin{cases}
u(x_1 + kL, x_2) = u(x), \quad T(x_1 + kL, x_2) = T(x), \quad \forall k \in N,\\
u = T = 0, \quad 在x_2 = r_0, \quad r_0 + 1.
\end{cases} \tag{8.5.12}$$

§8.5.4 Walker 环流及其稳定性

对赤道大气环流问题 (8.5.11) 和 (8.5.12), 建立空间如下

$$H = \{(u,T) \in L^2(M,R^3)|\ \mathrm{div}u = 0, (u,T)\text{是}x_1\text{周期的}\},$$

$$H_1 = \{(u,T) \in H^2(M,R^3) \cap H|\ (u,T)\text{满足}(8.5.12)\}.$$

算子 $L_\lambda = -A + B_\lambda$ 和 $G: H_1 \to H$ 定义如下

$$\begin{cases} -A\psi = P\left\{\left(\Delta u_1 + \dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{2u_1}{r_0^2}\right), \left(\Delta u_2 - \dfrac{2u_2}{r_0^2} - \dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right), \Delta T\right\}, \\ B_\lambda\psi = P\{-2\Omega u_2, 2\Omega u_1 + \lambda T, \lambda u_2\}, \\ G\psi = P\left\{\left((u\cdot\nabla)u_1 + \dfrac{u_1u_2}{r_0}\right), \left((u\cdot\nabla)u_2 - \dfrac{u_1^2}{r_0}\right), (u\cdot\nabla)T\right\}, \end{cases} \tag{8.5.13}$$

这里 $\lambda = \sqrt{R}, \psi = (u,T) \in H_1, P: L^2(M,R^3) \to H$ 为 Leray 投影.

这样, 在 (8.5.13) 的定义下问题 (8.5.11) 和 (8.5.12) 化为下面形式

$$\frac{d\psi}{dt} = L_\lambda\psi + G\psi. \tag{8.5.14}$$

考虑下面特征值问题

$$A\psi = B_\lambda\psi, \tag{8.5.15}$$

在后面将证明特征方程 (8.5.15) 是对称的, 因而所有特征值是实的, 并且第一特征值 λ_1 满足

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots (\text{不计重数}). \tag{8.5.16}$$

定义临界 Rayleigh 数 R_C 为

$$R_C = \lambda_1^2. \tag{8.5.17}$$

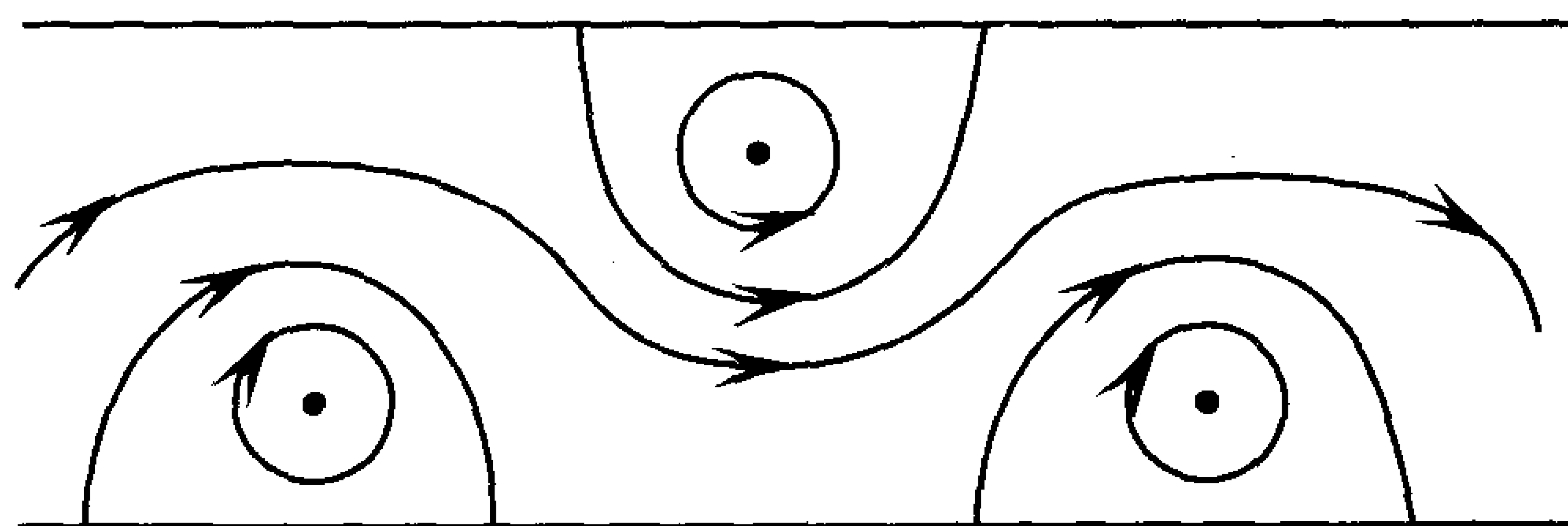
下面定理提供了方程 (8.5.11) 和 (8.5.12) 的 Walker 环流的存在性与稳定性.

定理 8.23 问题 (8.5.11) 和 (8.5.12) 在 $((u,T),R) = (0,R_C)$ 有一个连续性的跃迁, 并且下面结论成立:

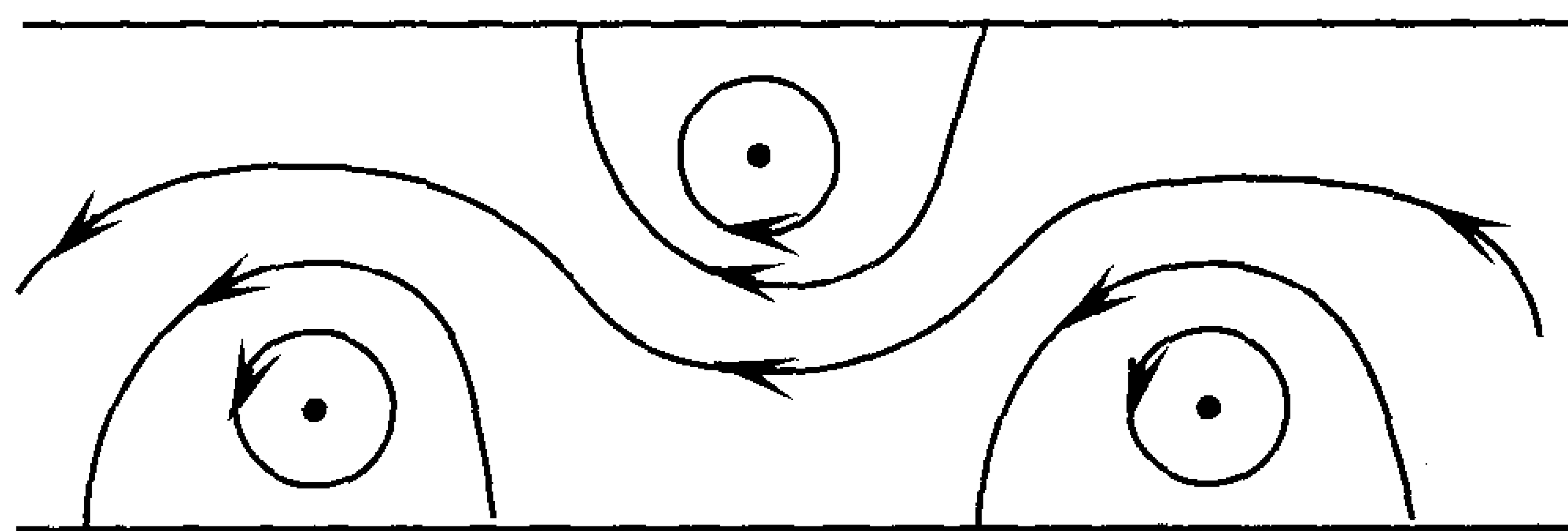
(1) 该问题从 $((u,T),R) = (0,R_C)$ 在 $R > R_C$ 分歧出一个圆圈吸引子 $\Sigma_R = S^1$, 并且 Σ_R 由奇点构成.

(2) 对任何 $\psi_0 = (u_0,T_0) \in H/(\Gamma \cup E)$, 存在一个时间 $t_0 \geqslant 0$, 对问题 (8.5.11) 和 (8.5.12) 以 ψ_0 为初值的解 $\psi(t,\psi_0)$ 对任何 $t > t_0$ 是拓扑等价于图 8.11(a) 或者 (b) 所示的结构, 这里 Γ 是 $(u,T) = 0$ 的稳定流形在 H 中有余维 2, 及

$$E = \left\{(u,T) \in H \middle| \int_M u_1 dx = 0\right\}.$$



(a) 一个朝东的行波流



(b) 一个朝西的行波流

图 8.11 行波流环绕地球进行全局行走

注 8.6 定理 8.23 关于下面边界问题也是成立的

$$\begin{cases} u, & T是x_1周期的, \\ u = T = 0, & 在x_2 = r_0, \\ u_2 = T = 0, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad 在x_2 = r_0 + 1. \end{cases} \tag{8.5.18}$$

条件 (8.5.18), 称为自由 – 刚性边界条件, 描述了大气层顶部是自由滑动的, 而在地球表面是不动的. 从实际问题看条件 (8.5.18) 比 (8.5.9) 更符合大气环流的情况. 但对两个边界条件的定理证明都是一样的, 只是刚性边界条件的证明可利用前面的一些结果.

§8.5.5 定理 8.23 的证明

定理的证明分为下面几步进行.

第一步. 方程 (8.5.11) 的等价形式. 因为对每一个定义在 $M = S^1 \times (r_0, r_0+1)$ 上的向量场 u,

$$\text{div}u = 0 \text{ 在}M\text{上},$$

存在一个流函数 ψ, 使得

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

因此方程 (8.5.11) 中的向量场

$$\begin{cases} (-2\Omega u_2, 2\Omega u_1) = 2\Omega\nabla\psi, \\ \left(\dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, -\dfrac{2}{r_0}\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = -\dfrac{2}{r_0}\nabla\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} \end{cases} \tag{8.5.19}$$

都是梯度场. 这意味着 (8.5.11) 等价于下面方程 (为了方便, 不失一般性, 假设 $P_r = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u_1 + \dfrac{u_1u_2}{r_0} = \Delta u_1 - \dfrac{2u_1}{r_0^2} - \dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u_2 - \dfrac{u_1^2}{r_0} = \Delta u_2 - \dfrac{2u_2}{r_0^2} + \lambda T - \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + (u\cdot\nabla)T = \Delta T + \lambda u_2, \\ \mathrm{div}u = 0. \end{cases} \tag{8.5.20}$$

从 (8.5.19) 也可看到, 由 (8.5.13) 定义的线性算子 $L_\lambda = -A + B_\lambda : B_1 \to H$ 是对称的, 因而 (8.5.16) 成立.

第二步. 容易看出方程 (8.5.20) 与 $n = 2$ 的 Benard 问题 (8.3.8) 具有相同的结构, 即在方程 (8.5.15) 中 L_λ 是对称的, G 是正交的, 并且 L_λ 的特征值 $\beta_j(\lambda)$ 在 (8.5.17) 给出的临界 Rayleigh 数 $R_C = \lambda_1^2$ 处满足条件 (6.2.1) 和 (6.2.2). 因而关于 Rayleigh-Benard 对流的吸引子分歧定理 (定理 8.11) 对赤道大气环流方程 (8.5.20) 也成立.

第三步. 为了得到结论 (1) 和 (2), 需要求解下面特征方程的第一特征向量

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \dfrac{2}{r_0^2}u_1 + \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ -\Delta u_2 + \dfrac{2}{r_0^2}u_2 + \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = \lambda T, \\ -\Delta T = \lambda u_2, \end{cases} \tag{8.5.21}$$

再配以边界条件 (8.5.12). 特征方程 (8.5.21) 就是抽象方程 (8.5.15) 的具体表达形式.

类似于方程 (8.4.38) 在 $\lambda = \lambda_0$ 的第一特征向量 (8.4.44) 和 (8.5.12), 方程 (8.5.21) 和 (8.5.12) 的第一特征值 λ_1 是 $m = 2$ 重的, 其特征向量为

$$\psi = \begin{cases} -\sin\dfrac{2k\pi}{L}x_1 h'(x_2), \\ \dfrac{2k\pi}{L}\cos\dfrac{2k\pi}{L}x_1 h(x_2), \\ \cos\dfrac{2k\pi}{L}x_1\Phi(x_2), \end{cases} \tag{8.5.22}$$

$$\widetilde{\psi}=\begin{cases}\cos\dfrac{2k\pi}{L}x_1h'(x_2),\\ \dfrac{2k\pi}{L}\sin\dfrac{2k\pi}{L}x_1h(x_2),\\ \sin\dfrac{2k\pi}{L}x_1\Phi(x_2),\end{cases}\tag{8.5.23}$$

其中 (h,Φ) 满足

$$\begin{cases}\left(D^2-a_k^2-\dfrac{2}{r_0^2}\right)^2h=\lambda_1a_k\Phi,\\ -\left(D^2-a_k^2-\dfrac{2}{r_0^2}\right)\Phi=\lambda_1a_kh,\\ \Phi=0,\quad h=h'=0,\quad 在x_2=r_0,r_0+1,\end{cases}\tag{8.5.24}$$

其中 $a_k=2k\pi/L,D=d/dx,k$ 是一个取决于 L 的整数.

此时由 (8.4.50) 定义的数 α 为

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{\|\psi\|^2}\langle G(\varphi,\psi)+G(\psi,\varphi),\psi\rangle_H\\&=-\frac{1}{\|\psi\|^2}\langle G(\psi),\varphi\rangle_H,\end{aligned}\tag{8.5.25}$$

其中 φ 满足

$$(A-B_{\lambda_1})\varphi=G(\psi),\tag{8.5.26}$$

这里 $G(\psi,\varphi)$ 是由 (8.5.13) 定义的 G 生成出的二重线性算子. 因而从 (8.5.25) 和 (8.5.26) 可得

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{-1}{\|\psi\|^2}\langle(A-B_{\lambda_1})\varphi,\varphi\rangle_H\\&=-\frac{1}{\|\psi\|^2}\langle(A-B_{\lambda_1})^{\frac12}\psi,(A-B_{\lambda_1})^{\frac12}\psi\rangle_H\\&<0\quad(由于A-B_\lambda是对称扇形算子).\end{aligned}$$

这样, 类似于定理 8.17, 我们可以证得结论 (1).

第四步. 吸引子解的结构. 由第二步的结论可知, 问题 (8.5.11) 和 (8.5.12) 从 $((u,T),R)=(0,R_C)$ 分歧出的吸引子 Σ_R 中元素 $\varphi\in\Sigma_R$ 可表达为

$$\varphi=|\beta_1(\lambda)/\alpha|^{\frac12}(x\psi+y\widetilde{\psi})+o(|\beta_1|),\tag{8.5.27}$$

其中 ψ 和 $\widetilde{\psi}$ 是由 (8.2.29) 和 (8.2.30) 给出, $x^2+y^2=1$.

为了证明结论 (2), 需要吸引子 Σ_R 中元素 $\varphi=(e,T)$ 中速度场 e 的拓扑结构. 由 (8.5.27) 可知

$$e=\begin{cases} r(\lambda)\cos\dfrac{2k\pi}{L}(x_1+\theta)h'(x_2)+o(r(\lambda)),\\ \dfrac{2k\pi}{L}r(\lambda)\sin\dfrac{2k\pi}{L}(x_1+\theta)h(x_2)+o(r(\lambda)),\end{cases}\tag{8.5.28}$$

这里 $r(\lambda)=(\beta_1(\lambda)/\alpha)^{\frac{1}{2}},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 由 (8.5.24) 可知, h 满足

$$\begin{cases} -(D^2-a^2)^3h=\beta^2h,\\ h=h'=(D^2-a^2)^2h=0,\quad 在x_2=r_0,r_0+1,\end{cases}\tag{8.5.29}$$

其中 $a=a_k+\dfrac{2}{r_0^2},\beta=\lambda a_k$.

显然 (8.5.31) 的第一特征向量 h 与 (8.4.81) 的第一特征向量具有相同形式. 即 h 可表达为

$$h(r)=\beta_0\cos\alpha_0\xi+\beta_1\cos h\alpha_1\xi\cos\alpha_2\xi+\beta_2\sin h\alpha_1\xi\sin\alpha_2\xi,\tag{8.5.30}$$

其中 $\xi=r-r_0-\dfrac{1}{2},\beta_i$ 和 α_i 是由 (8.5.31) 中边界条件确定. 因为以大气层高度 h 为单位的地球半径 $r_0\simeq 200$, 故 $r_0^{-2}\simeq 10^{-4}$ 数量级. 因此 (8.5.30) 的系数 β_i 和 α_i 与 (8.4.83) 的相近, 大约为

$$\beta_0\simeq 1,\qquad \beta_1\approx -0.06,\quad \beta_2\approx 0.1,$$

$$\alpha_0\simeq 3.97,\quad \alpha_1\simeq 5.2,\qquad \alpha_2\simeq 2.1.$$

因此由定理 8.22 的证明可知速度场 (8.5.28) 是 D 正则的对 $R_C<R<R_C+\varepsilon$ 对某个 $\varepsilon>0$.

(8.5.28) 的第一阶速度场

$$e_0=\begin{cases} r(\lambda)\cos\dfrac{2k\pi}{L}(x_1+\theta)h'(x_2),\\ \dfrac{2k\pi}{L}r(\lambda)\sin\dfrac{2k\pi}{L}(x_1+\theta)h(x_2),\end{cases}\tag{8.5.31}$$

是拓扑等价于如图 8.12 所示的结构. 由结构稳定性定理可知, e_0 是结构不稳定的, 因为在边界 $x_2=r_0$ 的鞍点是与不同连通分支 $x_2=r_0+1$ 的鞍点相连接.

第五步. 证明由 (8.5.28) 所给速度场 e 是拓扑等价于 (8.5.31) 的速度场 e_0, 即 e 有如图 8.12 所示结构.

为此目的, 将证明 H 中的子空间

$$E=\left\{(u,T)\in H\,\middle|\,\int_0^L\int_{r_0}^{r_0+1}u_1dx_1dx_2=0\right\}$$

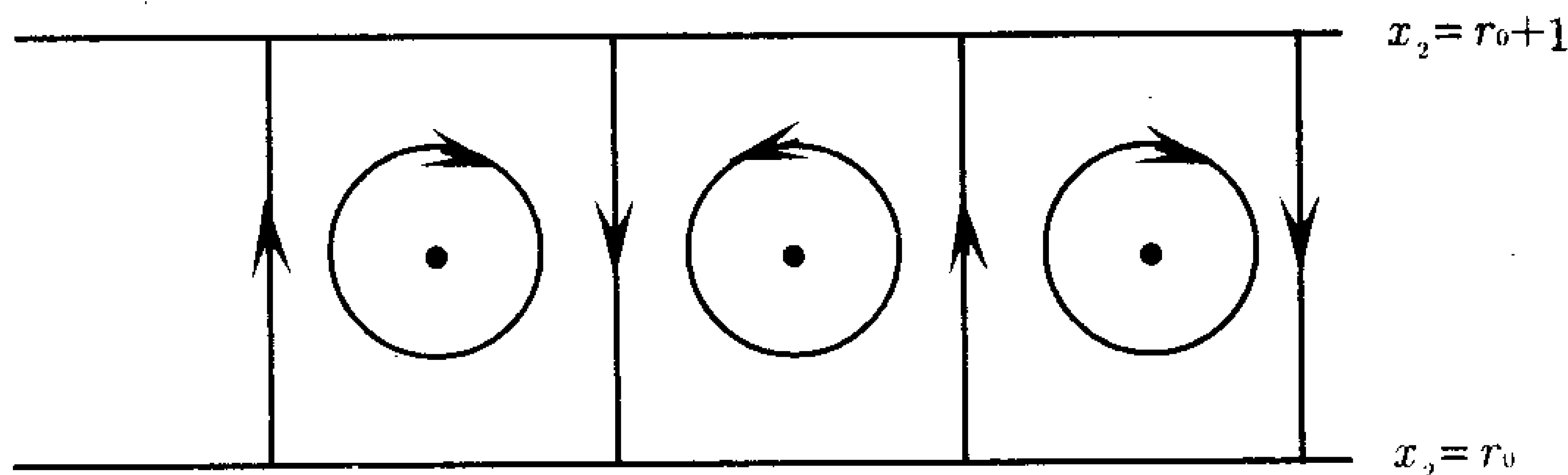


图 8.12

是关于问题 (8.5.20) 和 (8.5.12) 是不变的. 只需证明

$$\int_0^L\int_{r_0}^{r_0+1}(u\cdot\nabla)u_1dx=0,\quad \forall u\in H, \tag{8.5.32}$$

$$\int_0^L\int_{r_0}^{r_0+1}u_1u_2dx=0,\quad \forall u\in H \tag{8.5.33}$$

对任何 $u\in H_1$, 存在流函数 φ, 使得

$$u=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right).$$

因此有

$$\begin{aligned}\int_M(u\cdot\nabla)u_1dx&=\int_M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}\right)dx\\&=0\quad(\text{由分部积分}).\end{aligned}$$

因此, 等式 (8.5.32) 得证.

对任何 $u\in H, u=(u_1,u_2)$ 有 Fourier 展开

$$\begin{cases}u_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x_k\cos a_kx_1h_k'(x_2)-y_k\sin a_kx_1h_k'(x_2)),\\ u_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(x_ka_k\sin a_kx_1h_k(x_2)+y_ka_k\cos a_kx_1h_k),\end{cases} \tag{8.5.34}$$

这里 $a_k=\dfrac{2k\pi}{L}$. 注意到

$$\int_0^L\sin a_kx_1\cos a_jx_1dx_1=0,\quad \forall k,j\geqslant 0,$$

$$\int_0^L\sin a_kx_1\sin a_jx_1dx_1=\int_0^L\cos a_kx_1\cos a_jx_1dx_1=0,\quad \forall i\neq j,$$

$$\int_{r_0}^{r_0+1}h_k(x_2)h_k'(x_2)dx_2=0,\quad \forall k\geqslant 0$$

从 (8.5.34) 可推得 (8.5.33) 成立.

事实上， E 在 H 中的正交补空间 $E^{\perp}$ 为

$$E^{\perp}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\widetilde{\psi}_k \mid\ \widetilde{\psi}_k=(\sin k\pi(x_2-r_0),0,0),\quad k=\text{奇数}\right\}.$$

因此由 (8.5.32) 和 (8.5.33) 容易看出，方程 (8.5.20) 和 (8.5.12) 的奇点一定是在 E 中. 因而 (8.5.28) 的向量场 $e=(e_1,e_2)$ 满足

$$\int_M e_1 dx=0. \tag{8.5.35}$$

由 Ma 和 Wang[62] 的连接引理 (connection lemma), 从 (8.5.35) 可推出 e 是拓扑等价于 e_0.

第六步. 结论 (2) 的证明. 对任何初值 $\psi_0=(u_0,T_0)\in H/E$, 则 ψ_0 可表达为

$$\psi_0=\sum_k\alpha_k\widetilde{\psi}_{0k}+\Phi_0,\quad \Phi_0\in E,$$

$$\widetilde{\psi}_{0k}=(\sin k\pi(x_2-r_0),0,0),\quad k=\text{奇数}.$$

由 (8.5.32) 和 (8.5.33) 可以看到

$$\langle G(\psi),\widetilde{\psi}_{0k}\rangle=0,\quad \forall\psi\in H.$$

这里 G 由 (8.5.13) 给出. 这意味着 (8.5.11) 和 (8.5.12) 以 ψ_0 为初值的解有下面形式

$$\psi(t,\psi_0)=\sum_k\alpha_k e^{-t\beta_k}\widetilde{\psi}_k+\widetilde{\Phi}(t,\psi_0), \tag{8.5.36}$$

其中 $\widetilde{\Phi}\in E,\beta_k=k^2\pi^2+\dfrac{2}{r_0^2}$.

另一方面, 对每一个初值 $\psi_0\in H/\Gamma$ 存在分歧吸引子 Σ_R 的元素 $\varphi\in\Sigma_R$. 使得 (8.5.11) 和 (8.5.12) 的解

$$\lim_{t\to\infty}\|\psi(t,\psi_0)-\varphi\|_{C^r}=0, \tag{8.5.37}$$

对某个给定的 $r\geqslant 1$.

令 $k=\min\{k|\alpha_k\neq 0,k=\text{奇数}\}$, 则对任初值 $\psi_0\in H/(E\cup\Gamma)$, 由 (8.5.37), 存在 $t_0>0$, 使得问题 (8.5.11) 和 (8.5.12) 的解 $\psi(t,\psi_0)=(u(t,\psi_0),T(t,\psi_0))$ 中速度场 $u(t,\psi_0)$ 是拓扑等价于下面向量场对任 $t>t_0$,

$$\widetilde{u}=e+(\alpha_k e^{-t\beta_k}\sin k\pi(x_2-r_0),0), \tag{8.5.38}$$

其中 e 是由 (8.5.28) 所给向量场.

由第三步知 e 是 D 正则的. 再由第四步 e 是拓扑等价于如图 8.12 所示的结构, 通过应用 Ma 和 Wang[62,63] 鞍点连接的打断方法, 能够证明由 (8.5.38) 定义的向量场 $\widetilde{u}$ 是拓扑等价于如图 8.11(a) 或者 (b) 所示的拓扑结构当 $\alpha_k>0$ 或者 $\alpha_k<0$ 时. 这样就证明了结论 (2). 定理证毕.

§8.5.6 关于大气物理的评论

对赤道上大气层的 Walker 环流真正意义上的数学严格证明应该是对三维大气动力学基本方程 (8.5.8) 进行, 即首先证明其跃迁存在, 然后证明跃迁的稳态解在赤道截面 $\theta=0$ 上具有 Walker 环流. 但是, 由于三维原始问题的困难性与复杂性, 即使人们在数学上能够处理也使得 Walker 环流的本质难以清晰地表现出来. 我们应该注意这一事实, 即如果三维大气动力学基本方程从临界 Rayleigh 数 R_C 处跃迁出一个稳定状态 $\psi(\theta,\varphi,z)$, 那么 ψ 在赤道 $\theta=0$ 上的限制

$$\psi_0(\varphi,z)=\psi(0,\varphi,z)$$

一定是赤道大气环流方程 (8.5.10) 在 R_C 跃迁出的一个稳定状态. 因此, 在这里关于赤道上大气环流方程 (8.5.10) 所建立的数学理论是具有大气物理学意义的. 当然这里有一个先决条件就是前面关于大气物理所作的基本假设 A 必须成立. 这一点得到气象观测资料的支持.

我们有必要说明一下, 应用第六章建立的状态跃迁理论, 人们并不困难地可以证明三维大气动力学基本方程在临界 Taylor 数 R_C 处发生跃迁, 困难的是确定跃迁的类型和跃迁出稳态解的结构. 此外三维临界 Taylor 数 R_C 与二维环流方程 (8.5.10) 的临界 Taylor 数 R_C^1 可能是不同的, 但它们满足关系

$$R_C^1\leqslant R_C, \tag{8.5.39}$$

并且 R_C 一定是 (8.5.10) 的一个分歧点. 关系式 (8.5.39) 可由线性算子特征值理论得到证明. 如果 $R_C^1<R_C$, 那么这意味着对赤道大气环流方程 (8.5.10) 的所有临界特征值处的动态分歧研究都是具有大气物理意义的.

然而不论怎样, 定理 8.23 所确立的大气物理学意义是重要的, 因为它以严格的定理方式给出了 Walker 环流一个清晰的图像, 并且以最简单的数学形式 (相对而言) 揭示出该环流的许多有价值的特性. 我们将从下面几点对定理 8.23 的意义给予大气物理学的评论:

(1) 定理 8.23 结论 (2) 的一个重要性质就是给出赤道上大气层的 Walker 环流的全局结构是如图 8.11 所示的图案. 这个结构与大气物理学家心目中想像的如图 8.10 所示的结构有一个显著的差别就是图 8.11 中的环流结构中存在一个全局的行波流. 这个行波流从每一个环流圈旁边经过绕地球一周行走, 它在所有环流圈之间进行热交换, 起到热平衡的作用;

(2) 定理中关于跃迁是连续型的结论对大气物理是非常有意义的. 它意味着地球风暴的起落强度有一个连续变化的过程, 不会有这样的现象发生, 即一个十二级大风突然生起或停止;

(3) 我们注意到, 定理 8.23 的结论 (1) 在地球物理学上的解释就是 Walker 环流的环流圈位置, 称为相位, 可以在赤道上变动, 它依赖于外界对气候条件的干扰. 这与气象观测情况不同, 气象学资料显示赤道上 Walker 环流的相位基本上是固定的. 图 8.10 引自 Salby[89], 从图中可以看到自径度为零到东经 90°, 即非洲大陆这一段有一对对流圈, 从东经 90° 到西经 90° 这半个地球尺度上存在两个对流圈, 而从西经 90° 到经度为零这一段又有两个对流圈. 这种理论与实际的差别主要是由模型的理想化造成的. 在理论上, 地球表面被光滑化, 温度分布也是均匀的. 而实际情则不然, 海洋与高山对大气环流有一个明显的影响, 温度分布也不是均匀的. 理论与实际的差异正好显示出地球表面非均匀性的地理与物理条件在气候上产生的效应. 理想条件下的精确理论是实际情况的一个参照系;

(4) 另一个理论与实际的显著差异就是赤道上对流圈个数的不同. 实际观测到的对流圈个数为 6 个, 而从理论上计算其个数 (即 (8.5.22) 中的波数 k) 大约在 60~200 个之间. 这个差异可能与赤道环流方程是二维模型也有关系;

(5) 最后, 我们需要说明一点, 从 (8.5.27) 式可以看到, 在环流发生的临界 Rayleigh 数 R_C 附近, 环流强度与 Rayleigh 数 R 之间的关系为

$$|e| \sim |R - R_C|^{\frac{1}{2}},$$

这里 $e = e(\varphi, z)$ 为赤道上环流速度场.

§8.6 评　注

§8.1 关于二维不可压缩向量场的几何理论的材料可参见文献 [62 ~ 70].

§8.2 本节的内容是建立在文献 [52 , 59] 的基础上.

§8.3 这一节内容取自 [52 , 54 ~ 56]. 关于周期边界条件的 Benard 问题定态分歧的结果可参见参见文献 [37 , 86 , 113 , 114].

§8.4 这里介绍的结果来自文献 [56 ~ 58]. 关于 z 周期条件的 Taylor 问题定态分歧参见文献 [37 , 98 , 102 , 115].

§8.5 这些结果是作者新证明的. 关于地球物理流体动力学方面的专著可参文献 [83 , 89].

参考文献

[1] Adams R A. Sobolev Space. Academic Press,1975.

[2] Agmon S. The L_p approach to the Dirichlet prolem. I. Regularity theorems. Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa (3), 1959,13:405-448.

[3] Agmon S, Douglis A and Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm. Pure Appl. Math.,1959,12: 623-727, II. Comm. Pure Appl. Math., 1964,17: 35-92.

[4] Arnold V. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, 1978.

[5] Aubin T. Nonlinear Analysis on Mamifolds. Springer-Verlag, 1982.

[6] Bates P W and Fife P C. Spactral comparision principles for the Cahn-Hilliard and phase field equations, and time scales for coarsening. Phys. D, 1990,43: 2-3,335-348.

[7] Cahn J and Hilliard J E. Free energy of a nonuniform system i. interfacial energy. J. Chemical Physics, 1958,28: 258-267.

[8] Chandrasekha S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Dover Publication Inc, 1981.

[9] 陈文嫄 (Chen, W). 非线性泛函分析. 甘肃人民出版社, 1981.

[10] Chow S N and Hale J K. Methods of Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1982.

[11] Clark D C. Eigenvalue bifurcation for odd gradient operators. Rocky Mountain J. Math., 1975, 5: 317-336.

[12] Courant R and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Intersciences Publishers, 1953.

[13] Crandall M G and Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues. J. Func. Anal., 1971, 8: 321-340.

[14] de Fontain D. Ultrafine-Grain Metals. Syracuse Univ. Press, 1971.

[15] de Gennes P. Superconductivity of Metals and Alloys. Westview Press, 1966.

[16] Doering C R, Gibbon J D, Holms D D and Nicolaenko B. Low-dimensional behaviour in the complex Ginzburg-Landau equation. Nonlinearity, 1988, 1: 279-309.

[17] Drazin P and Reid W. Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press, 1981.

[18] Field R J and Noyes R M. Oscillations in chemical systems IV:Limit cycle behaviour in a model of a real chemical reaction. J. Chen. Phys., 1974, 160: 1877-1884.

[19] Foias C and Kukavica I. Determining Nodes for the Kuramoto-Sivashinsky equation. J. Dyna. Diff. Equa., 1995, 7(2): 365-373.

[20] Foias C, Monley O and Temam R. Attractors for the Benard problem: existence and physical bounds on their fractional dimension. Nonlinear Anal., 1987,11(8): 939-967.

[21] Foias C and Temam R. Structure of the set of stationary solutions of the Nowier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30: 149-164.

[22] Fujita H.On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math., 1966, 13: 109-124.

[23] Gabisch G and Lorenz H. Business Cycle Theory, A Survey of Methods and Concepts. Springer-Verlag, 1987.

[24] Ghil M, Ma T and Wang S. Structural bifurcation of 2-D incompressible flows. Indiana Univ. Math. J. 50, Special Issue, 2001, 159-180.

[25] Ghil M, Ma T and Wang S. Structural bifurcation of 2-D incompressible flows with the Dirichlet boundary conditions and applications to boundary layer separations. SIAM J. Appl. Math., 2005, 65(5): 1576-1596.

[26] Gilbarg D and Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. 2nd ed. Springer-Verlag, 1983.

[27] 郭柏灵. 非线性演化方程. 上海科技教育出版社, 1995.

[28] 郭大钧. 非线性泛函分析. 山东科学技术出版社, 1985.

[29] Gor'kov L. Generalization of the Ginzburg-Landau equation for nonstationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities. Sov. Phys. JETP, 1968, 27: 328-334.

[30] Hasting S P and Murray J D. The existence of Oscillatory solutions in the Field-Noyes model for the Belousov-Zhabotinsky reaction. SIAM J. Appl. Math., 1975, 28: 678-688.

[31] Hole J. Asymptotic behaviour of dissipative systems. AMS Providence RI, 1988.

[32] Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations, Vol. 840. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.

[33] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure and Appl. Math.,1950, 3: 201-230.

[34] Hurewice W and Wallman H. Dimension Theory. Princeton Math. Ser. 4. Princeton Univ. Press, 1941.

[35] Kaplan S. On the grousth of solutions of quasilinear parabolic equations. Comm. Pure Appl. Math, 1963, 16: 305-330.

[36] Kato T. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, 1980.

[37] Kirchgassner K. Bifurcation in nonlinear hydrodynamic stability. SIAM Review, 1975, 17(4): 652-683.

[38] Krasnoselskii M A. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Pergamon, 1964.

[39] Krasnoselskii M A and Zabreiko P. Geometrical Methods of Nonlincar Analysis. Springer-Verlag, 1984.

[40] Kuramoto Y and Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration wawes in dissipative media far from thermal equilibrium. Prog. Theo. Phys., 1976, 55(2): 356-369.

[41] Keller J B. On solution of nonlinear wave equations. Comm. Pure Appl. Math., 1957, 10: 523-530.

[42] Kukavika I. Hausdorff length of level sets for solutions of the Ginzburg-Landau equation. Nonlinearity, 1985, 8: 113-129.

[43] Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Comm. Pure Appl. Math, 1954, 7: 159-193.

[44] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math. 1957, 10: 537-566.

[45] Ladyzhenskaja O A. Attractors for Semigroups and Evolution Equations. Cambridge Univ. Press, 1991.

[46] 刘式适, 刘式达, 谭本道. 非线性大气动力学. 国防工业出版社, 1996.

[47] Lu S, Wu H and Zhong C. Attractors for nonautonomous 2D Navier-Stokes equations with normal external forces. Dist. Cont. Dyna. Syst., 2005, 13(3): 701-719.

[48] Ma T. Alternative methods and bifurcation. Ph D thesis. Lanzhou University. China, 1990.

[49] Ma T. A local unique theorem of bifurcation for nonlinear elliptic equations. CEREMADE. Univ. Paris 9. Preprint No.1, 1991.

[50] Ma T. Some bifurcation results for second order elliptic equations. CEREMADE. Univ. Paris 9. Preprint No. 13, 1991.

[51] Ma T, Park J -H and Wang S. Dynamic bifurcation of the Ginzburg-Landau equations. SIAM J. Appl. Dyna. Syst., 2004, 3(4): 620-635.

[52] Ma T and Wang S. Bifurcation Theory and Applications. Nonlinear Science Ser. A, Vol.53. World Scientific, 2005.

[53] Ma T and Wang S. Dynamic bifurcation of nonlinear evolution equations. Chin. Ann. Math., Ser. B, 2005, 26(2): 185-206.

[54] Ma T and Wang S. Attractor bifurcation theory and its applications to Rayleigh-Benard convection. Comm. Pure Appl. Anal., 2003, 2(3): 591-599.

[55] Ma T and Wang S. Dynamic bifurcation and stability in the Rayleigh-Benard convection. Comm. Math. Sci., 2004, 2(2): 159-183.

[56] Ma T and Wang S. Structure of bifurcated solutions of 2D Rayleigh-Benard convection, Submitted, 2005.

[57] Ma T and Wang S. Stability and bifurcation of the Taylor problem. Arch. Rat. Mech. Anal., 2006,181:149-176.

[58] Ma T and Wang S. Dynamic bifurcation and stability of the Taylor problem. Submitted, 2006.

[59] Ma T and Wang S. Bifurcation and stability of superconductivity. J. Math. Phys., 2005, 46: 095112-1-31.

[60] Ma T and Wang S. Bifurcation of nonlinear equations: I. Steachy state bifurcation. Methods and Application of Analysis, 2004, 11(2): 155-178.

[61] Ma T and Wang S. Bifurcation of nonlinear equations: II. Dynamic bifurcation. Methods and Application of Analysis, 2004, 11(2): 179-210.

[62] Ma T and Wang S. Geometric Theory of Incompressible Flows with Applications to Fluid Dynamics. Mathematical Surveys and Monographs, Vol 119, AMS. Providence, 2005.

[63] Ma T and Wang S. Structural classification and stability of divergence-free vector fields. Phys. D, 2002, 171: 107-126.

[64] Ma T and Wang S. Interior structural bifurcation and separation of 2D incompressible flows. J. Math. Phys., 2004, 45(5): 1762-1776.

[65] Ma T and Wang S. The geometry of the stream lines of steady states of the Navier-Stokes equations. AMS Contemporary Math, 1999, 238: 193-202.

[66] Ma T and Wang S. Structure of 2D incompressible flows with the Dirichlet boundary conditions. Dist. Contin. Dyna. Syst., Ser B, 2001, 1(1): 29-41.

[67] Ma T and Wang S. Boundary layer separation and structural bifurcation for 2D incompressible fluid flows. Dist. Contin. Dyna. Syst, 2004, 10(1-2): 459-472.

[68] Ma T and Wang S. A generalized Poincare-Hopf index formula and its to 2D incompressible flows. Nonl. Anal., RWA, 2001, 2: 467-682.

[69] Ma T and Wang S. Bifurcation and stability of the Goldstein problem. Submitted, 2006.

[70] Ma T and Wang S. Stability of secondary flows between coaxial cylinders with three-dimensional perturbation. Submitted, 2006.

[71] Ma Q, Wang S and Zhong C. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications. Indiana Univ. Math. J., 2002, 51(6): 1541-1559.

[72] 马本堃，高尚惠，孙煜. 热力学与统计物理学. 高等教育出版社，1980.

[73] Mazja. V Sovolev Space. Springer-Verlag, 1985.

[74] Nicolaenko B, Scheurer B and Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equation: nonlinear stability and attractors. Phys. D, 1985, 16: 155-183.

[75] Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Courant Lect. Notes in Math., Vol.6. New York Univ., 2001.

[76] Novick-Cohen A and Segel L A. Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation. Phys. D, 1984, 10: 277-298.

[77] Oleinik O A. On Cauchy's problem for nonlinear equations in the class of discontinuous functions. Dok. Akad. Nauk SSSR., 1954, 95: 451.

[78] Oleinik O A. On the uniqueness of a generalized solution of the Cauchy problem for a nonlinear system of equations encounted in mechanics. Uspehi Mat. Nauk, 1957, 12(6): 167-176.

[79] Palis J and de Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1982.

[80] Palis J. On Morse-Smale dynamical systems. Topology, 1968, 8.

[81] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Appl. Math. Sci, Springer-Verlag,1983, 44 .

[82] Peixoto M. Structural stability on two dimensional manifolds. Topology, 1962, 1: 101-120.

[83] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. 2nd ed. Springer-Verlag, 1987.

[84] Rabinowitz P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. J. Funct. Anal., 1971, 7: 487-513.

[85] Rabinowitz P H. A bifurcation theorem for potential operators. J. Funct. Anal., 1977, 25(4): 412-424.

[86] Rabinowitz P H. Existence and non-uniqueness of rectangular solutions of the Benard problem. Arch. Rati. Mech. Anal., 1968, 29: 32-57.

[87] Rayleigh L. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag., 1916, 32(6): 529-546.

[88] Reichl L E. A Modern Course in Statistical Physics. University of Texas Press, 1980.

[89] Salby, M L. Fundamentals of Atmospheric Physics. New York: Acadmic Press, 1996.

[90] Sivashinsky G I. On flame propagation under conditions of stoichiometry. SIAM. J. Appl. Math., 1980, 39: 67-82.

[91] Smoller J. Shock Wave and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, 1983.

[92] Smolders C A, Von Aartsen J J and Steenbergen A, Kolloid-Zu Z. Polymere, 1971, 243: 14.

[93] Schwartz A J, Huamg J S and Goldberg W I. Chem. Phys., 1975, 62: 1847.

[94] Tadmor E. The well-posedness of the Kuramoto-Sivashinsky equation. SIAM. J. Math. Anal., 1986, 17(4): 884-893.

[95] Tang Q and Wang S. Time dependent Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Phys. D, 1986, 88(3-4): 139-166.

[96] Taylor G I. Experiments with rotating fluids. Proc. Camb. Phil. Soc., 1921, 20: 326-329.

[97] Taylor G I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Royl London Ser. A, 1923, 223: 289-343.

[98] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Applied Mathematical Science, Vol.68, 2nd ed. Springer-Verlag, 1997.

[99] Temam R. Navier-Stokes Equations. AMS Providence. RI, 2001.

[100] Temam R and Wang X M. Estimates on the lowest dimension of inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation in the general case. Diff. Integ. Equ., 1994, 7(3-4): 1095-1108.

[101] Tinkham M. Introduction to Super-conductivity. McGrew-Hill Inc., 1996.

[102] Velte W. Stabilitat and verzweigung stationarer losungen der Nowier-Stokeschen gleichungen beim Tylor problem. Ibid., 1966, 22: 1-14.

[103] Vishik M I. Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations. Cambridge Univ. Press, 1992.

[104] Yosida K. Functional Analysis. Sixth ed. Springer-Verlag, 1980.

[105] 叶基孝，李正元. 反应扩散方程引论. 科学出版社， 1999.

[106] 尤秉礼. 常微分议程补充教程. 人民教育出版社， 1981.

[107] 余庆余，马天. 非线性弱连续映射的二择一定理及其应用. 数学学报， 1989, 32(3): 296-306.

[108] Yu Q and Ma T. The positive solutions of quasilinear elliptic boundary value problem. Lecture Notes in Math. Vol. 1411, Springer-Verlag ,1989, 182-188.

[109] Yu Q and Ma T. Positive solutions and bifurcation of nonlinear elliptic equations involving super-critical sobolev expenents. Chinese J. Math. (Taiwan, R.O.C.), 1994, 22(2): 99-109.

[110] Yu Q and Ma T. Bifurcation theorems in ordered Banach spaces with applications to semi-linear elliptic equations. Proc. Inter. Conf. Theo. Appl. Diff. Equ. Ohio Univ. Press, 1988, 496-501.

[111] Yu Q and Ma T. The Alternative principle of nonlinear operators and its applications. Nonlinear Analysis. Ed. by W. Chen. Lanzhou Univ. Press, 1990, 1-33.

[112] 余庆余，马天. 主部单调算子的二择一定理及应用. 高校应用数学学报， 1990, 5(4): 549-554.

[113] Yudovich V I. Free convection and bifurcation. J. Appl. Math. Mech., 1967, 31: 103-114.

[114] Yudovich V I. Stability of convection flows. J. Appl. Math. Mech., 1967, 31: 294-303.

[115] Yudovich V I. Secondary flows and fluid instability between rotating cylinders. J. Appl. Math. Mech., 1966, 30: 822-823.

[116] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题. 第二次修订本. 北京大学出版社， 2000.

[117] 张恭庆，郭懋正. 泛函分析讲义（下册）. 北京大学出版社， 1990.

[118] Zhong C, Yang M and Sun C. The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations. J. D. E. 2006, 223.

[119] Zhong C, Sun C and Niu M. On the existence of global attractor for a class of infinite dimensional nonlinear dissipative dynamical systems. Chinese Ann. Math., 26B(3), 2005, 393-400.

[120] 钟承奎，范先令，陈文嵲 . 非线性泛函分析引论. 兰州大学出版社， 1998.

[121] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems.Springer-Verlag, 1986.

《现代数学基础丛书》出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础(上册)1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982. 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久、陈恕行 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青、华宣积、忻云龙 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华、王建磐 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋、刘永清、王联 编著

72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论-代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵、黄海洋、蒋慕容 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷、吴从 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 著
92 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩、周义仓、王稳地、靳祯 著
93 模李超代数 2004.9 张永正、刘文德 著
94 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
95 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
96 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林、闫宝强、刘衍胜 著
97 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著
98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉、陈志杰、赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤、霍元极、麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞、张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理、裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型、方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.3 马天 汪守宏 著